الفصل الثامن/البديهية الخامسة لاقليدس

ان البديهية الخامسة لاقليدس كانت هدفا لنقد علماء الرياضيات , فقد برهن اقليدس مبرهناته ال ٢٨ بدون ان يستخدم البديهية الخامسة وقد استند اليها لاول مرة في برهان مبرهنة ٢٩ مما اثار انتباه العلماء حيث اعتقد البعض منهم بانها مبرهنة وبهذا يجب ان تبرهن وقد كانت هناك محاولات عديدة لبرهنتها وعلى فترة تزيد عن الفي عام ولكن بائت كل المحاولات بالفشل لان البراهين كانت تعتمد على عبارات تكافئ البديهية الخامسة.

وتنص البديهية الخامسة على مايلي:

اذا قطع مستقيمان بمستقيم ثالث وكان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع اقل من قائمتين , فان المستقيمين يتلاقيان في تلك الجهة من القاطع اذا مدا بغير حد.

بعض مكافئات البديهية الخامسة:

١- بديهية بليفير : من نقطة لاتقع على مستقيم معلوم يمكن رسم موازي واحد فقط للمستقيم المعلوم.
٢- اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين , فان الزاويتين الداخلتين المتبادلتين متساويتان والزاوية الخارجية تساوي الزاوية الداخلية المقابلة لها , ومجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين في نفس الجهة من القاطع يساوي زاويتين قائمتين .(مبرهنة ٢٩)
٣- مجموع زوايا المثلث يساوي زاويتين قائمتين .
٤- الزاوية الخارجية في المثلث تساويمجموع الزاويتين الداخليتين المقابلتين لها.
٥- يوجد زوج من المثلثات المتشابه.
٦- اذا قطع مستقيم احد مستقيمين متوازيين فانه يقطع الاخر.
٧- المسافة العمودية بين مستقيمين متوازيين تكون ثابتة.
٨- يوجد زوج من المستقيمات التي تكون المسافة بينهما ثابتة.
٩- اذا كان مجموع زوايا أي مثلث مقدارا ثابتا, فان هذا المجموع يساوي زاويتين قائمتين.
١٠- اذا كانت ثلاث زوايا من شكل رباعي قوائم فالزاوية الرابعة تكون قائمة ايضا.
١١- المستقيمان الموازيان لمستقيم معلوم يكونان متوازيين.
١٢- لاي ثلاث نقاط لاتقع على مستقيم واحد, توجد دائرة تمر من هذه النقاط.

تعتبر البديهية الخامسة لاقليدس والمسماة " بديهية التوازي" نقطة بداية لدراسة الهندسة اللااقليدية.

ويمكن تحديد مواقف هؤلاء المعترضين باحد المواقف التالية:

١- اعتقد بعضهم بان بديهية التوازي يجب ان تكون نظرية ولذلك تحتاج الى برهان يعتمد على المفاهيم الاساسية والبديهيات الاربعة الاولى .
٢- وقال اخرون يمكن برهان نظرية ٢٩ لاقليدس بدون استخدام بديهية التوازي فلا حاجة لوضع هذه البديهية . بطليموس اعتمد على هذه النظرية.

٣- واخرون فرضوا نقيض بديهية التوازي واستمروا في اشتقاق النظريات لعلهم يحصلون على تناقض وبذلك يثبتون صحتها.

محاولات لبرهنة البديهية الخامسة او احدى مكافئاتها:

ان اول محاولة لبرهان بديهية التوازي لاقليدس كانت من قبل العالم الفلكي بطليموس الذي عاش في القرن ٢ في مدينة الاسكندرية حيث حاول بطليموس:

١- برهان نظرية ٢٩. بدون استخدام بديهية التوازي .
٢- برهان بديهية التوازي.

مبرهنة ٢٩: اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين , فان الزاويتين الداخلتين المتبادلتين متساويتان والزاوية الخارجية تساوي الزاوية الداخلية المقابلة لها , ومجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين في نفس الجهة من القاطع يساوي زاويتين قائمتين.

المفروض / المستقيم AB يوازي المستقيم المستقيم CD .

م. ث: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ بالتبادل.

$\angle 5 = \angle 2$, $\angle 6 = \angle 4$ بالتناظر.

$$\angle 3 + \angle 2 = 180$$
$$\angle 1 + \angle 4 = 180$$

البرهان:

لقد افترض بطليموس مايلي: ان امتداد المتوازين في جهة واحدة من القاطع لايختلف عن امتدادهما من الجهة الاخرى.

اذا كان $180 < \angle 3 + \angle 2$, فان

$180 < \angle 4 + \angle 1$,

اذن $360 < \angle 4 + \angle 1 + \angle 3 + \angle 2$ (لايمكن : لان مجموع الزوايا الاربع يساوي اربع زوايا قوائم).

وبنفس الطريقة اذا كان :

$180 > \angle 3 + \angle 2$, فان

, $\angle 1 + \angle 4 > 180$

اذن $\angle 2 + \angle 3 + \angle 1 + \angle 4 > 360$, وهذا لايمكن لنفس السبب السابق.

اذن يجب ان يكون مجموع الزوايا يساوي 180 .

بما ان $\angle 2 + \angle 3 = 180$ بالبرهان.

وان $\angle 1 + \angle 3 = 180$ (زاوية مستقيمة)

اذن $\angle 3 + \angle 1 = \angle 3 + \angle 2$ وبطرح $\angle 3$ من الطرفين نحصل على $\angle 1 = \angle 2$.

وبنفس الطريقة نبرهن ان $\angle 4 = \angle 3$.

وبما ان $\angle 2 + \angle 3 = 180$ بالبرهان,

ولكن $\angle 5 + \angle 3 = 180$ (زاوية مستقيمة).

اذن $\angle 5 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3$ وبالطرح نحصل , $\angle 5 = \angle 2$.

وبنفس الطريقة نبرهن $\angle 4 = \angle 6$.

الانتقاد: ان فرضية بطليموس التي اعتمدها لبرهان النظرية اعلاه هي تفسير اخر لبديهية بليفير. فهو افترضها من حيث لايعلم لذا فهو افترض مايجب برهانه.

الفصل الثامن // البديهية الخامسة لاقليدس

البديهية الخامسة لاقليدس: اذا قطع مستقيمان بمستقيم ثالث وكان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع اقل من قائمتين , فان المستقيمين يتلاقيان في تلك الجهة من القاطع اذا مدا بغير حد.

البرهان:

المفروض / ليكن AB, CD مستقيمان.

والمستقيم EF يقطعهما في X,Y على التوالي .

بحيث ان $\angle 1 + \angle 2 < 180$.

م. ث: المستقيمان AB, CD يلتقيان في جهة القاطع الحاوية B,D .

البرهان:

ان لم يكن AB,CD متلاقيان فانهما متوازيان.

وحسب Th29 : $\angle 1 + \angle 2 = 180$ وهذا خلاف الفرض. (لان $\angle 1 + \angle 2 < 180$)

اذن المستقيمين AB,CD يجب ان يتلاقيان .

ولو كان المستقيمان AB,CD متلاقيان في جهة A,C لاصبح لدينا مثلث فيه الزاويتين مجموعهما اكبرمن 180 . (يناقض نظرية اقليدس).

اذن المستقيمان AB,CD يتلاقيان من جهة B,D .

محاولة بروكلس لبرهنة بديهية اقليدس الخامسة:

البرهان: افترض بروكلس لبرهان بديهية التوازي الفرضية التالية

" المستقيم الذي يقطع احد مستقيمين متوازيين فانه يقطع الاخر".

المفروض/ AB,CD مستقيمين وقد قطعهما القاطع AC , وكانت الزاويتان الداخليتان $\alpha + \beta < 180$.

م.ث: AB,CD يتلاقيان من جهة B,D .

البرهان:

نرسم AE بحيث ان

$\angle CAE + \angle \beta = 180$.

من Th28 لاقليدس والتي تنص" اذا قطع مستقيم مستقيمين وكانت الزاوية الخارجية تساوي الزاوية الداخلية والمقابلة لها في نفس الجهة من القاطع, او كان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع يساوي قائمتين , يكون المستقيمان متوازيين."

نحصل : AE يوازي CD .

ولكن $\alpha + \beta < 180$ من الفرض.

وبذلك تكون $\angle CAE$ اكبر من $\angle \alpha$.

أي ان AE لاينطبق على AB .

لذا فان AB يقطع احد المتوازيين AE ,فيجب ان يقطع الموازي الاخر CD , وبذلك يتلاقى AB, CD .

ولو كان المستقيمين AB ,CD يتلاقيان في جهة A,C لاصبح لدينا مثلث فيه زاويتين اكبر من 180 وهذا تناقض مع Th17 "مجموع زاويتان في مثلث كيفما اتخذت اقل من زاويتين قائمتين". أقليدس

اذن يجب ان يتلاقيان من جهة B,D .

محاولة عمر الخيام : حاول أن يبرهن " إذا احتوى الشكل الرباعي على ثلاثة زوايا قوائم فان الزاوية الرابعة تكون قائمة أيضا".

رباعي الخيام: فرض ان AB قطعة مستقيم وان AC, BD عمودان على AB ثم رسم قطعة مستقيم بين C,D .

فتكون شكل رباعي ABCD وفيه.

١- $\angle A = \angle B = 90$. زوايا متجاورة وقائمة

٢- A-C=B-D .

يسمى هذا الشكل برباعي الخيام.

ويسمى الضلع A-B القاعدة (الضلع الذي يصل الزاويتين A,B) ويسمى الضلع C-D السمت (وهو الضلع المقابل للقاعدة) . ويسمى AC, BD بالساقين وتسمى الزاويتان $\angle C, \angle D$ بزاويتي السمت .

برهان عمر الخيام:

اولا: برهن عمر الخيام ان زاويتي السمت في رباعي الخيام متساويتين .

ثانيا: برهن عمر الخيام ان المستقيم الواصل بين منتصف القاعدة والسمت في رباعي الخيام يكون عموديا عليها.

الخطأ في برهان عمر الخيام:

اعتمد على بديهيات تكافئ بديهية التوازي وهي:

١- اذا احتوى الشكل الرباعي على ثلاث زوايا قوائم فان الزاوية الرابعة قائمة.
٢- المسافة العمودية بين مستقيمين متوازيين تكون ثابتة.

محاولة جون والاس:

فرض جون والاس انه بالامكان رسم مثلث مهما يكن قياسه يشابه مثلثا معلوما .ولكن هذه العملية من مكافئات البديهية الخامسة لاقليدس.

محاولة ساكيري :

حيث حاول اثبات ان مجموع زوايا المثلث يساوي زاويتين قائمتين وذلك ببرهنة ان مجموع زوايا السمت لرباعي الخيام يساوي قائمتين.

لقد كان برهانه طويل ومعقد وغير واضح وقد اعطى بعض الحقائق الصحيحة منها:

١- اذا كان مجموع زاويتي السمت في شكل رباعي الخيام واحد قائمتين , فان أي شكل رباعي اخر مثل هذا يكون مجموع زاويتي السمت له قائمتان ايضا.
٢- اذا كان مجموع زاويتي السمت في شكل رباعي الخيام اقل او اكثر من قائمتين او يساوي قائمتين , فان مجموع زوايا المثلث يكون اقل او اكثر او يساوي لزاويتين قائمتين.
٣- اذا وجد مثلث واحد مجموع زواياه يساوي قائمتين او اقل او اكثر من قائمتين , فان مجموع زاويتي السمت في رباعي الخيام يساوي قائمتين او اقل او اكثر من قائمتين على التوالي.
٤- كل مستقيمين في المستوي اما ان يكون لهما عمود مشترك او يتقاطعان (اذا مدا) او يتقاربان باستمرار.

محاولة ليجندر:

حاول ليجندر اثبات بديهية اقليدس الخامسة وذلك بان برهن مكافئتها " مجموع زوايا المثلث يساوي قائمتين " , افترض العكس بالبرهان وكان هناك احتمالين:

اولا: اذا كان مجموع زوايا المثلث اكثر من قائمتين. ولكن هذا يخالف نظرية ١٧ لاقليدس.

والخلل في هذا البرهان هو مد قطعة المستقيم الى مالانهاية وهذا غير صحيح.

ثانيا : اذا كان مجموع زوايا المثلث اصغر من قائمتين.

وهذا الاحتمال يؤدي الى ان مجموع زوايا المثلث يساوي $180^{\circ} - 2^{n}\alpha$ سالبا , وهذا غير ممكن لان مجموع زوايا المثلث موجب.

الفصل التاسع

الهندسة الهذلولية " Hyperbdic Geometry "

بعد المحاولات التي بذلت من قبل العلماء في برهان بديهية التوازي الخامسة لاقليدس بدأوا يشكون في امكانية برهان هذه البديهية ونتيجة لهذه المحاولات فقد ولدت الهندسة اللااقليدية وعندما اثبت عدم امكان اشتقاق بديهية التوازي من فرضيات اقليدس فقد بنيت الهندسة اللااقليدية على فرضيات اقليدس عدا بديهية التوازي . ولقد برهن العلماء .لقد تمكن العالمان جون بوليا الهنغاري ولوباجفسكي الروسي بان البديهية الخامسة مستقلة عن البديهيات الاربعة الاولى حيث تم تبديل البديهية الخامسة لاقليدس وحل محلها نقيضها في الحالة :

وجود اكثر من مواز واحد لمستقيم من نقطة خارجة عنه , تدعى هذه الهندسة بالهندسة الهذلولية.

البديهية المميزة للهندسة الهذلولية:

بديهية التوازي الهذلولية HPP :

Ax17 : اذا كانت P نقطة لاتقع على مستقيم معلوم m , فانه يوجد شعاعان فقط , وليكن $\vec{PR}$ و $\vec{PS}$, بحيث ان :

١- $\vec{PR}$ و $\vec{PS}$ شعاعين غير متعاكسين.

٢- $\vec{PR}$ و $\vec{PS}$ لايقطعان m .

٣- أي شعاع $\vec{PQ}$ يقطع m اذا وفقط اذا $\vec{PQ}$ يقع بين $\vec{PR}$ و $\vec{PS}$.

تعريف : كل من الشعاعين $\vec{PR}$ و $\vec{PS}$ المذكورين في HPP , يدعى موازي الى m من P .

مبرهنة ١٠٢:

اذا كان شعاع يقع بين شعاع موازي لمستقيم معلوم وشعاع يقطع المستقيم المعلوم فان الشعاع يقطع المستقيم المعلوم.

البرهان:

ليكن $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ شعاعين يوازيان خط m من نقطة P .

و B اية نقطة تقع على m و $\overrightarrow{PQ}$ أي شعاع يقع بين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PB}$.

يجب ان نبرهن ان $\overrightarrow{PQ}$ يقطع m .

بما ان $\overrightarrow{PB}$ يقطع m , فانه من HPP , $\overrightarrow{PB}$ يقع بين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$. وبما ان $\overrightarrow{PQ}$ يقع بين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PB}$ فانه من Th47, 1 : $\overrightarrow{PQ}$ يقع بين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$, ومن HPP , $\overrightarrow{PQ}$ يقطع m .

وبنفس الطريقة اذا فرضنا ان $\overrightarrow{PQ}$ يقع بين $\overrightarrow{PS}$ و $\overrightarrow{PB}$ فانه $\overrightarrow{PQ}$ يقطع m .

ملاحظة : من الواضح انه توجد مستقيمات عديدة لاتقطع المستقيم والتي هي ليست موازيات للمستقيم .

المبرهنة التالية تبين على ان الموازي هو اول المستقيمات التي لاتقطع.

مبرهنة ١٠٣: اذا كان $\overrightarrow{PQ}$ لايقطع مستقيم m , لكن أي شعاع يقع بين $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PB}$, حيث ان B نقطة على m , يقطع m , فان $\overrightarrow{PQ}$ يوازي المستقيم m .

البرهان:

ليكن m مستقيما , P نقطة لاتقع على m , و $\overrightarrow{PQ}$ شعاع لايقطع m .

من HPP : يوجد شعاعان $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ من P ويوازيان m. لتكن B اية نقطة على m .

من الفرض: P,B,Q لاتقععلى مستقيم واحد.

Q لاتقع على المستقيم PB .

تقع Q في احدى جهتي PB .

من HPP : $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ في الجهتين المتعاكستين للمستقيم PB .

وعليه يوجد احتمالين:

١- اما تقع Q في جهة $\overrightarrow{PB}$ التي تحتوي R .

٢- او Q تقع في جهة $\overrightarrow{PB}$ التي تحتوي S .

الاحتمال الاول: عندما تقع Q في جهة $\overrightarrow{PB}$ التي تحتوي R .

وهذا يؤدي الى ثلاث احتمالات :

أ- اما $\overrightarrow{PR}$ يقع بين $\overrightarrow{PB}$ و $\overrightarrow{PQ}$.

ب- او $\overrightarrow{PQ}$ يقع بين $\overrightarrow{PB}$ و $\overrightarrow{PR}$.

ت- او $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}$.

في حالة أ : $\overrightarrow{PR}$ يقع بين $\overrightarrow{PB}$ و $\overrightarrow{PQ}$.

فمن الفرض : $\overrightarrow{PR}$ يقطع m وهذا يخالف Ax17 .

في حالة ب : $\overrightarrow{PQ}$ يقع بين $\overrightarrow{PB}$ و $\overrightarrow{PR}$.

حسب Th102 : $\overrightarrow{PQ}$ يقطع m وهذا يخالف الفرض.

وعليه الحالة الوحيدة المقبولة عندما $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}$.

وبنفس الطريقة اذا كانت Q تقع في جهة $\overrightarrow{PB}$ التي تحتوي S .

مبرهنة ١٠٤:

اذا كانت نقطة Q هي اثر العمود النازل من نقطة معلومة P لمستقيم m , و $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ الموازيان من P الى المستقيم m , فان $\angle RPQ \cong \angle SPQ$.

البرهان : H.W

مبرهنة ١٠٥:

اذا كان $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ هما الشعاعين الموازيين من نقطة P لمستقيم معلوم m , فان المنصف للزاوية $\angle RPS$ يكون عموديا على المستقيم m .

البرهان:

حسب Th41 : $\overrightarrow{PA}$ يقع داخل الزاوية .

وحسب التعريف : $\overrightarrow{PA}$ يقع بين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$.

وحسب Ax17 "HPP " : $\overrightarrow{PA}$ يقطع m في نقطة ولتكن Q .

لو افترضنا ان $\overrightarrow{PQ}$ لايكون عمودي على m .

وحسب Th89 : اقامة عمود على خط من نقطة خارجة عنه , يوجد $\overrightarrow{PQ'}$ عمود على m .

وحسب Th104 : $\angle RPQ' \cong \angle SPQ'$

$\overrightarrow{PQ'}$ هو منصف اخر للزاوية $\angle RPS$ وهذا يناقض Th 82 " منصف الزاوية وحيد".

نستنتج من هذا ان الشعاع $\overrightarrow{PA}$ هو المنصف للزاوية ويكون عمودي على الخط m .

مبرهنة ١٠٦:

اذا كانت نقطة Q هي اثر العمود النازل من نقطة P على مستقيم معلوم m , و $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ هما الشعاعان الموازيان للمستقيم m من P , فان $\angle SPQ$ و $\angle RPQ$ زاويتان حادتان .

البرهان:

يجب ان نبرهن ان :

$\angle 1, \angle 2$ اقل من 90 (زاوية حادة).

حسب Th62 : يتحقق واحد فقط مما يلي

١- $\angle 1, \angle 2$ قوائم.

٢- $\angle 1, \angle 2$ منفرجة.

٣- $\angle 1, \angle 2$ حادة.

الاحتمال الأول: عندما $\angle 1, \angle 2$ قوائم.

وحسب Ax ? : جميع الزوايا القوائم متساوية.

إذن $\angle 1 = \angle 2$ $\longrightarrow$ $\angle 1 \cong \angle 2$.

اذن الزاويتان $\angle 1, \angle 2$ متكاملتان ومتجاورتان.

وحسب نتيجة ٣ و نظرية ٥٨: $\angle 1, \angle 2$ يكونان زوج خطي.

اذن $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ متعاكسين وهذا تناقض مع Ax17 .

الاحتمال الاول مرفوض.

الاحتمال الثاني: عندما $\angle 1, \angle 2$ منفرجة.

الان $\angle 2 > 90$

وحسب تعريف العلاقة > : يوجد شعاع $\overrightarrow{PE}$ داخل $\angle 2$ بحيث ان $\angle 3$ قائمة.

$\angle 3, \angle 4$ قوائم .

اذن مجموعهما 180 .

حسب Th74 : نحصل على PE يوازي m ١

ولكن الشعاع $\overrightarrow{PE}$ يقع بين القاطع PQ والموازي PR (لانه داخل $\angle 2$).

وحسب Th102 : الشعاع $\overrightarrow{PE}$ يقطع الخط m .

ولكن الشعاع جزء من الخط.

اذن الخط PE يقطع الخط m ٢

من ١ و ٢ نحصل على تناقض.

اذن الاحتمال الثاني مرفوض.

اذن الاحتمال الوحيد المقبول هو ان $\angle 1, \angle 2$ حادتان.

مبرهنة ١٠٧:

اذا كان الشعاع $\overrightarrow{PS}$ موازيا الى مستقيم m من نقطة P , و X هي نقطة على الخط PS بحيث ان X-P-S

١- من الخطأ ان يكون $\overrightarrow{PX}$ موازيا الى m .
٢- من الخطأ ان يكون $\overrightarrow{PX}$ قاطعا الى m .
٣- المستقيم PS لايقطع m .
٤-

تعريف / ليكن $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{QS}$ شعاعين لايقعان على مستقيم واحد , وان Q و P نقطتان مختلفتان , يقال ان $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{QS}$ في نفس الاتجاه اذا وفقط اذا كانا في نفس الجهة من الخط PQ .

تعريف/ اذا كان $\overrightarrow{PS}$ شعاعا يوازي خط m من نقطة P , واذا كان $\overrightarrow{QX}$ أي شعاع على m , في نفس اتجاه $\overrightarrow{PS}$, فانه يقال ان $\overrightarrow{PS}$ يوازي $\overrightarrow{QX}$.

مبرهنة ١٠٨:

ليكن m مستقيما و P نقطة لاتقع على m , $\overrightarrow{PR}$ شعاعا يوازي m من P اذا كانت A أي نقطة على المستقيم الذي يحتوي $\overrightarrow{PR}$, أي ان اذا كان اما P-A-R او A-P-R , فان $\overrightarrow{AR}$ يوازي m .

مبرهنة ١٠٩:

اذا كان $\overrightarrow{AR}$ يوازي $\overrightarrow{BS}$ فان $\overrightarrow{BS}$ و يوازي $\overrightarrow{AR}$.

مبرهنة ١١٠:

اذا كان شعاعان في نفس الاتجاه ويوازيان شعاعا ثالثا , فان احداهما يوازي الاخر.

مبرهنة ١١١ :

الزاويتان المتناظرتان المتكونتان من موازيين واي قاطع غير متطابقتين .

البرهان:

ليكن $\vec{XR}$ يوازي $\vec{YS}$ وان الخط AB يقطع الشعاع $\vec{XR}$ في A والشعاع $\vec{YS}$ في B .

$A \neq B$ (ذلك لان الشعاعين غير متقاطعين).

وحسب Ax9 : توجد نقطة C بحيث B-A-C .

الزاويتان $\angle CAR , \angle CBS$ متناظرتان.

وللسهولة $\angle 1 , \angle 2$ متناظرتان .

يجب ان نبرهن ان $\angle 1$ لاتطابق $\angle 2$.

من Th108 + التعريف : $\vec{AR}$ يوازي $\vec{BS}$.

نفرض ان $\angle 1 \cong \angle 2$.

وان $\angle 1 = 90$ فانه $\angle 2 = 90$.

وبالتالي نحصل ان $\angle 3$ قائمة ايضا.

وعليه فان $\angle 3 \cong \angle 2$ (تناقض مع Th106 , لانه يجب ان تكون احداهما حادة عندما يكون احدهما قائمة).

ناخذ النقطة M منتصف القطعة A-B ,

ومن نقطة M نرسم عمود على الخط AR .

واضح ان $E \neq A$ (لان $\angle 3$ ليست قائمة).

وان النقطة E توجد في احدى جهات الخط AB (حسب Th28).

وناخذ نقطة D على الشعاع $\vec{BS}$ وانها تقع في جهة الخط AB التي لاتحتوي E بحيث ان $E-A \cong B-D$ (حسب Ax11).

وحسب Ax1 : نصل الخط MD , والان نطابق $\Delta\Delta AME , BMD$ وفيهما

$\angle 8 = 90$ بالعمل (لان $ME \perp AR$).

وان $\angle 2 = 90$ (بالافتراض).

وان $A - M \cong M - B$ (M نقطة منتصف).

حسب Th56 : يتطابق المثلثان ومن التطابق ينتج

$\angle 5 \cong \angle 4$, وحسب Ax15 : $\angle 6 \cong \angle 6$.

بما ان $\angle 5 , \angle 6$ تكونان زوج خطي.

وحسب تعريف الزوايا المتكاملة : $\angle 6 , \angle 4$ تكونان متكاملتان لانهما يكافؤان زوجا خطي.

بما ان $\angle 6 , \angle 4$ متكاملتان وتجاورتان , حسب Th58 نتيجة ٣ $\angle 6 , \angle 4$: تكونان زوجا خطيا.

اذن الشعاعين $\vec{ME}$ و $\vec{MD}$ متعاكسين.

وكذلك نحصل $\angle 8 \cong \angle 7$.

ولكن $\angle 8$ قائمة.

اذن $\angle 7$ قائمة وان $\angle 9$ قائمة ايضا.

الان اصبح لدينا الشعاع $\vec{ED}$ عمود على الشعاعين المتوازيين $\vec{ER}$ و $\vec{DS}$, بحيث ان $\angle 8$, $\angle 9$ قوائم.

وهذا تناقض مع Th106 : اذن $\angle 1$ لاتطابق $\angle 2$.

نتيجة : الزاويتان الداخليتان المتبادلتان المتكونتان من مستقيمين متوازيين واي قاطع غير متطابقتين.

البرهان:

حسب Th111: $\angle 1$ لاتطابق $\angle 3$

حسب Th58 نتيجة ٢: $\angle 3 \cong \angle 2$

اذن $\angle 1$ لاتطابق $\angle 2$.

المثلث المحاذي (مثلث ذو راسين)

عندما يقطع مستقيمين متوازيين بقاطع , فان الشكل الناتج يدعى مثلث محاذي او مثلث ذو راسين Two – vertices- triangle ويرمز له T-V-T , سنتناول خواصه كما يلي:

ليكن الشعاعين $\overrightarrow{XR}$ يوازي $\overrightarrow{YS}$ وقد قطعهما قاطع في النقطتين A,B على الترتيب بحيث كان:

١- X-A-R
٢- Y-B-S

اولا : ان المثلث المحاذي RABS يعرف بانه:

$$\Delta RABS = \overrightarrow{AR} \cup \overrightarrow{BS} \cup (A-B) \cup \{A,B\}$$

A-B تدعى ضلع المثلث المحاذي ,A,B تدعيان الراس.

ثانيا: الزاويتين $\angle BAR, \angle ABS$, او بعبارة اخرى $\angle 1, \angle 2$ يسميان زوايا المثلث المحاذي , وكذلك تدعيان الزاويتين الداخليتين.

ثالثا: الزوايا $\angle YBA, \angle XAB$, او بعبارة اخرى $\angle 3, \angle 4$ وزاويتاهما الراسيتان زوايا خارجية للمثلث المحاذي.

رابعا: لو اخذنا زوج من الزوايا احدهما داخلية والاخرى خارجية لمثلث محاذي وغير متجاورتين , فانهما يسميان داخلية مقابلة وخارجية مقابلة نسبة واحدة للاخرى مثل $\angle 4, \angle 1$ $\angle 3, \angle 2$

خامسا: يعرف داخل المثلث المحاذي هو عبارة عن تقاطع المجموعات التالية

(جهة الخط AB الحاوية R) $\cap$ (جهة BS الحاوية A) $\cap$ (جهة AR الحاوية B)=(داخل المثلث RABS)

سادسا: يعرف خارج المثلث المحاذي كما يلي

(داخل المثلث المحاذي) -X= خارج المثلث المحاذي

حيث تمثل X : المستوى الكلي.

او بعبارة اخرى: مجموعة كل النقاط التي لاتقع على المثلث ولاتقع في داخله.

مبرهنة ١١٢:

لتكن P نقطة في داخل مثلث محاذي RABS فان:

١- الخط الذي يمر من P واي راس من المثلث يقطع الشعاع الاخر.
٢- الخط الذي يمر من P ويوازي أي من الشعاعين يقطع الضلع.

البرهان:

١- بما ان P تقع في داخل المثلث المحاذي
اذن P تقع داخل $\angle 1$.

وحسب Th41 : $\overrightarrow{AP}$ يقع داخل $\angle 1$.

حسب تعريف شعاع بين شعاعين: الشعاع $\overrightarrow{AP}$ يقع بين $\overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{AB}$ وان احدهما موازي والاخر قاطع.

وحسب Th102 : الشعاع $\overrightarrow{AB}$ يقطع الخط BS في نقطة ولتكن C.......١

واضح ان $C \neq B$ (لان C تقع داخل $\angle 1$ و B على الزاوية).

الشعاع $\overrightarrow{AC}$ يقع داخل $\angle 1$.

وبالتالي فان النقطة C تقع داخل $\angle 1$.

اذن النقطة C تقع في جهة AB الحاوية C .

اذن C تقع في جهة الخط AB الحاوية S ٢

من ١,٢ و Th28 , ٦ : $C \in \overrightarrow{BS}$.

اذن اصبح لدينا الخط AC وهو نفسه AP يقطع شعاعي $\angle 2$.

اذن الشعاع $\overrightarrow{AP}$ يقطع $\overrightarrow{BS}$ في C .

وبنفس الطريقة نبرهن ان $\overrightarrow{BP}$ سيقطع الشعاع $\overrightarrow{AR}$.

٢- H.W

مبرهنة ١١٣:

اذا كان مستقيم لايمر باي راس من مثلث محاذي وانه:

١- يقطع احد الشعاعين , فانه يقطع الشعاع الاخر او الضلع .
٢- يقطع الضلع ولايوازي أي شعاع , فانه يقطع شعاعا واحدا فقط من الشعاعين.

البرهان:

١- ؟
٢- نفرض m يقطع AB في نقطة ولتكن C .

وان m لايوازي أي شعاع (أي $\overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{BS}$).

وحسب Ax17 (H.P.P): من نقطة C نرسم الشعاع $\overrightarrow{CT}$ ويوازي $\overrightarrow{AR}$.

وحسب Th110 : $\overrightarrow{CT}$ يوازي $\overrightarrow{BS}$.

وبذلك حصلنا على مثلثين محاذيين RACT , TCBS .

اذن توجد نقطة $X \in m$, بحيث ان X تقع داخل $\angle 1$, او داخل $\angle 2$ ؟

وحسب Th112 ,١: الخط m سيقطع الشعاع $\overrightarrow{AR}$.

او الخط m سيقطع الشعاع $\overrightarrow{BS}$ وليس كلاهما.

مبرهنة ١١٤:

الزاوية الداخلية لمثلث محاذي تكون اصغر من الزاوية الخارجية المقابلة لها.

مبرهنة ١١٥:

اذا كانت زاوية في مثلث محاذي تطابق زاوية في مثلث محاذي اخر , والضلعين متطابقين , فان الزاويتين الباقيتين متطابقتان.

البرهان:

لتكن R'A'B'S' ,RABS مثلثين محاذين فيهما :

$A-B \cong A'-B'$

$\angle B \cong \angle B'$

يجب ان نبرهن ان: $\angle A \cong \angle A'$

الان نناقش الزاويتان اعلاه:

حسب Th62 : يتحقق واحد فقط مما يلي

$\angle A < \angle A'$

$\angle A' < \angle A$

$\angle A \cong \angle A'$

الاحتمال الاول : عندما $\angle A' < \angle A$

وحسب تعريف العلاقة اصغر من : يوجد شعاع $\overrightarrow{AC}$ داخل $\angle A$ بحيث ان $\angle 1 \cong \angle 2$

وحسب Th102 : $\overrightarrow{AC}$ يقطع $\overrightarrow{BS}$ في نقطة ولتكن D .

وحسب Ax11 : نختار النقطة 'D على الشعاع $\overrightarrow{B'S'}$ بحيث ان $B-D \cong B'-D'$

وحسب Ax1 : نصل A'D' .

نناقش $\Delta\Delta ADB, A'D'B'$ وفيهما:

$\angle 3 \cong \angle 4$ بالفرض , $B-D \cong B'-D'$ بالعمل

$A-B \cong A'-B'$.

وحسب Th SAS : يتطابق المثلثين ومن التطابق ينتج $\angle 5 \cong \angle 1$

ولكن $\angle 2 \cong \angle 1$

حسب Ax15 : $\angle 5 \cong \angle 2$

وحسب Ax14 : $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{A'R'}$ وهذا تناقض لان $\overrightarrow{A'R'}$ يوازي $\overrightarrow{B'S'}$ و $\overrightarrow{A'D'}$ يقطع $\overrightarrow{B'S'}$.

اذن الاحتمال الاول مرفوض.

وبنفس الطريقة نبرهن ان $\angle A < \angle A'$ احتمال مرفوض ايضا.

الاحتمال الوحيد المقبول هو $\angle A \cong \angle A'$.

مبرهنة ١١٦: اذا كانت الزاويتان في مثلث محاذي تطابقان, على التوالي الزاويتين في مثلث محاذي اخر , فان الضلعين متطابقان.

البرهان:H.W

ملاحظة: في الهندسة الهذلولية يكون مجموع زوايا المثلث اقل من 180 .

تعريف الانحراف المثلثي: ليكن ABC مثلث فان الانحراف المثلثي يعرف كما يلي:

Defect (ΔABC) =180 -($\angle A + \angle B + \angle C$)

مثال / اوجد الانحراف المثلثي لمثلث ABC مجموع زواياه 150 .

ج/ 30 .

الفصل العاشر : الهندسة الاهليجية او (الناقصية , البيضوية)

Elliptic Geometry

ان اول من اشار الى هذه الهندسة هو العالم الالماني ريمان في عام ١٨٥٤ في رسالة الدكتوراه حيث اخذ نقيض بديهية بليفر " وهي احدى مكافئات البديهية الخامسة لاقليدس " وكما يلي :

البديهية المميزة للهندسة الاهليجية:

" لايمكن رسم أي موازٍ لخط معلوم من نقطة خارجة عنه".

وفي هذه الهندسة ميز ريمان بين فكرة المستقيم الغير منتهي وفكرة المستقيم الغير محدود . (حيث سابقا لايوجد فرق) وبذلك اخذ الخطوط اقواس لدوائر عظيمة على سطح كرة نصف قطرها الثابت a . فان الخط منتهي بالطول , حيث له محيط معلوم ولكن غير محدود في المفهوم الذي نستمر فيه حول الكرة دون توقف.

اذا الكرة هي نموذج لهذه الهندسة.

نقاط هذا النموذج هي نقاط على سطح الكرة.

وان المستقيمات لهذا النموذج هي دوائر عظيمة. بما ان الدوائر العظمى تتقاطع دائما , فان المستقيمين يتقاطعان دائما , ولذلك لاتوجد مستقيمات موازية للمستقيم.

بما ان توجد عدد غير منته من دوائر عظمى تمر بنقطتين متقابلتين بالقطر, فان النقطتين لاتعينان دائما مستقيما واحدا فقط. وبذلك فان بديهيات الوقوع غير متحققة. والتحول من الهندسة الاقليدية الى الهندسة الاهليجية لايتم بسهولة كما يتم مع التحول من الهندسة الاقليدية الى الهندسة الهذلولية.

يوجد نوعان من الهندسة الاهليجية:

١- الهندسة الاهليجية الاحادية: (Single E.G) والتي يكون فيها أي مستقيمين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط. وان المستوى الاهليجي يتميز بان سطحه له جهة واحدة . وكمثال بسيط على ذلك ورقة موفيس, ونموذج اخر عليها هو نصف كرة فقط .

٢- الهندسة الاهليجية الثنائية: (Double E.G) والتي يكون فيها أي مستقيمين يتقاطعان في نقطتين . وان المستوي الاهليجي يتميز بان سطحه له جهتين . مثلا الكرة التي فيها جهتين .

مبرهنة ١: أي مستقيمين في الهندسة الاهليجية المزدوجة يتقاطعان في نقطتين ويحيطان منطقة لمساحة منتهية A حيث ان $A \neq 0$. او الخط المار بنقطتين متقابلتين ليس وحيد .

سنوضح عددا من المبرهنات المشتركة للهندسة الاحادية والمزدوجة .

مبرهنة ٢: العمودان على نفس المستقيم يتقاطعان في نقطة . مثلا تقاطع خطوط الطول والعرض على سطح الكرة الارضية.
نستنتج هذه المبرهنة من البديهية المميزة لهذه الهندسة , حيث ان الخطين في المستوي يتقاطعان دائما.

مبرهنة ٣: الاعمدة على كل النقاط لمستقيم تلتقي في نقطة تدعى قطب الخط, وبالعكس كل مستقيم يمر بالقطب يكون عموديا على المستقيم . مثل خطوط الطول هي نماذج للخطوط العمودية على خط الاستواء , وان كل هذه الخطوط تتقاطع في القطبين الشمالي والجنوبي . المسافة q من قطب مستقيم للمستقيم , هي المسافة القطبية للمستقيم.

مبرهنة ٤: في أي مثلث ABC , الذي فيه $\angle B = \angle C = 90$, $\angle A$ تكون اصغر من ,تساوي او اكبر من 90 نسبة الى ان القطعة BC اصغر من , تساوي , او اكبر من المسافة القطبية q .

مبرهنة ٥: مجموع زوايا المثلث هو اكبر من 180 .
البرهان:
لتكن B, C نقطتين مختلفتين على مستقيم l . نرسم مستقيمين عمودين من l على B,C وهذان المستقيمان سيتقاطعان في نقطة A .
ولذلك فان مجموع زوايا المثلث اكبر من 180 .

جدول لمقارنة بين الهندسة الاقليدية واللااقليدية :

	اقليدية	هذلولية	اهليجية
يتقاطع المستقيمان في	نقطة واحدة في الاكثر	نقطة واحدة على الاكثر	نقطة واحدة (احادية) نقطتان (المزدوجة)
ليكن l مستقيما و P نقطة لاتقع على l فانه.	يوجد موازي واحد وواحد فقط للمستقيم l من P	يوجد موازيان للمستقيم l من P	لايوجد موازي الى l من P
يفصل المستقيم الى نصفين	بواسطة نقطة	بواسطة نقطة	كلا
اذا قطع مستقيم احد مستقيمين متوازيين فانه	يقطع الاخر	قد يقطع ا و لا يقطع	ــــ
العمودان على نفس المستقيم يكونان	متوازيين	غير متوازيين	متقاطعان
مجموع زوايا المثلث	تساوي زاويتين قائمتين	اقل من زاويتين قائمتين	اكثر من زاويتين قائمتين

الفصل
الحادي عشر

الهندسة الاسقاطية التركيبية:

نستذكر البديهيات الاربع الخاصة بالهندسة الاسقاطية التي تناولناها بالفصل الاول:

١- لاي نقطتين مختلفتين A و B في π , يوجد مستقيم واحد فقط يحتويهما.
٢- كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل.
٣- توجد في الاقل نقطة واحدة A ويوجد في الاقل مستقيم واحد l بحيث ان $A \notin l$.
٤- أي مستقيمين مختلفين يشتركان في نقطة واحدة في الاقل.

مبرهنة ١: أي مستقيمين مختلفين l,m في π يتقاطعان بنقطة واحدة وواحدة فقط.

مبرهنة ٢: اية نقطة في π يمر بها ثلاث مستقيمات في الاقل.

مبدأ الثنائية (Principle of duality)

تعريف: عبارتان تكون أحداهما ثنائية (dual) للأخرى إذا أمكن حصول واحدة من الأخرى بتبديل الكلمتين " النقطة" و " المستقيم" أحداهما محل الأخرى.

نتيجة لذلك تقع على ⟵ يمر به .
نصل خط بين نقطتان ⟵ يتقاطع الخطان.
نقاط على خط واحد ⟵ خطوط ملتقية بنقطة واحدة.

مثال : اوجد مثنى العبارة التالية
يوجد على الأقل نقطة A خارجة من خط معلوم l .
المثنى (dual): يوجد على الأقل خط l لايمر من نقطة معلومة A .

ملاحظة// تدعى العبارة ثنائية نفسها (self dual) إذا حصلنا على نفس العبارة بتبديل الكلمتين " النقطة" و " المستقيم".
مثال// المثلث " ثلاث نقاط مختلفة ولا تقع على مستقيم واحد مع الخطوط الواصلة بينها"
المثنى// ثلاث خطوط مختلفة ولا تلتقي بنقطة واحدة مع نقاط تقاطعهما.

ملاحظة: من الجدير بالذكر نلاحظ إن مبدأ الثنائية يتحقق على البديهيات الأربع الأولى , لذا فان أي عبارة نحصل عليها من البديهيات الاربع تكون صحيحة.
فمبرهنة ١ هي ثنائية بديهية رقم ١ , مبرهنة ٢ هي ثنائية بديهية ٢ , بديهية ٣ هي ثنائية نفسها , وثنائية بديهية ٤ " لاي نقطتين يوجد على الاقل مستقيم واحد يحتويهما" .

تعريف " حزمة المستقيمات": Pencil of lines
هي مجموعة كل المستقيمات التي تمر بنقطة O . النقطة O تدعى رأس الحزمة " vertex" .

" حزمة النقاط" : Pencil of points
هي مجموعة كل النقاط التي تقع على مستقيم l . المستقيم l يدعى محور الحزمة " axis ".

"الشكل" : هو مجموعة جزئية غير خالية من المستوي الاسقاطي π .

تعريف التشكيلات Configuration :
مجموعة من m من النقاط و n من المستقيمات في π , بحيث ان :

- كل نقطة من m من النقاط يمر بها عدد ثابت وهو a من المستقيمات.
- كل مستقيم من n من المستقيمات يحتوي على عدد ثابت وهو b من النقاط .

هي تشكيل (m_a, n_b) .
امثلة : تشكيل المثلث $(3_2, 3_2)$
: تشكيل المربع $(4_2, 4_2)$.
: تشكيل الخماسي $(5_2, 5_2)$.
: تشكيل فانو $(7_3, 7_3)$.
: تشكيل...... $(6_2, 4_3)$؟
: تشكيل ...... $(4_3, 6_2)$؟

مبرهنة رقم ٣:
اذا كان (m_a, n_b) تشكيلا في المستوي الاسقاطي , فان ma=nb .
البرهان:
بما ان كل نقطة من m من النقاط يمر بها a من المستقيمات , فانه ينبغي ان يكون ma من المستقيمات . لكن كل مستقيم يحتوي على b من النقاط , أي ان المستقيم يتكرر b من المرات.
لذلك , يكون عدد الخطوط $\frac{ma}{b} = n$
أي ان ma=nb .

تعريف : يقال عن تشكيل انه ثنائي نفسه (self - dual) اذا احتوى عل عدد النقاط كعدد المستقيمات .
(m_a, n_b) هو ثنائي نفسه اذا كان m=n .
فان a=b , لان am=mb .
أي ان التشكيل ثنائي نفسه يكون (m_b, m_b) .
سنرمز لهذا التشكيل بالرمز (m_b).
مثال // المثلث هو (3_2) تشكيل ثنائي نفسه .

تعريف: اربع نقاط في π , لاتوجد أي ثلاثة منها على مستقيم واحد, وستة مستقيمات تتعين من ازواج هذه النقاط تكون رباعي زوايا تام (a complete quadrangle) .

تدعى هذه النقاط الرؤوس والمستقيمات التي تتعين من هذه النقاط اضلاع رباعي الزوايا التام سنرمز لرباعي الزوايا التام برؤوسه وعادة نطلق عليه رباعي زوايا , ونقول رباعي الزوايا (ABCD) كما في الشكل التالي:
ضلعان في رباعي الزوايا يقال عنهما متقابلين اذا لم يشتركا باي راس . توجد ثلاثة ازواج من هذه الاضلاع المتقابلة في رباعي الزوايا. نقطة تقاطع زوج من الاضلاع المتقابلة لرباعي الزوايا تدعى نقطة قطرية لرباعي الزوايا . رباعي الزوايا له ثلاث نقاط قطرية.
تكون رؤوس رباعي الزوايا هي: A,B,C,D ,
والاضلاع هي : BC, BD ,CD, DA ,AB ,AC.
الضلع المقابل للضلع AB هو CD ونقطة تقاطعهما G هي نقطة قطرية لرباعي الزوايا (ABCD).لذلك النقاط القطرية لرباعي الزوايا التام تكون مثلثا يدعى المثلث القطري لرباعي الزوايا التام.

Ax5 (بديهية فانو) : النقاط القطرية لرباعي الزوايا التام لاتقع على مستقيم واحد.

تعريف: رباعي الاضلاع التام
هو شكل رباعي يتكون من اربعة مستقيمات بحيث لاتكون أي ثلاث منها تلتقي بنقطة واحدة, وست نقاط تتعين من تقاطع ازواج من هذه المستقيمات , تكون رباعي اضلاع تـــــــام (a complete quadrilateral). المستقيمات التي تكون رباعي اضلاع تام تدعى اضلاعه والنقاط المتعينة من المستقيمات تدعى رؤوسه . نرمز لرباعي الاضلاع التام باضلاعه (abcd) .
راسان لرباعي الاضلاع التام يقال عنهما متقابلين اذا لم يقعا على نفس الضلع . توجد ثلاثة ازواج من هذه الرؤوس المتقابلة في رباعي اضلاع تام. المستقيم الواصل بين زوج من الرؤوس المتقابلة لرباعي اضلاع تام يدعى خطا قطريا (a diagonal line) .

مبرهنة ٤: ثنائية بديهية فانو
الخطوط القطرية لرباعي اضلاع تام لاتلتقي بنقطة واحدة.
البرهان:
ليكن (abcd) رباعي اضلاع تام . فان الرؤوس لهذا الرباعي هي:

$$a \cap b = A, c \cap d = D$$
$$b \cap c = B, a \cap d = E$$
$$a \cap c = C, b \cap d = F$$

الخطوط القطرية تكون : AD, BE, CF .
لتكن $CF \cap BE = P$
يجب ان نبرهن ان P لاتقع على AD .
ناخذ رباعي الزوايا التام (BCEF), نقاطه القطرية هي: P, A ,D.
من بديهية ٥: النقاط القطرية P, A ,D لاتقع على مستقيم واحد .
لذلك , فان P لاتقع على المستقيم AD .

مبرهنة ٥:
المستقيم في مستوي اسقاطي يحقق البديهيات الخمس يحتوي على اربع نقاط في الاقل.
البرهان:

ناخذ رباعي زوايا (ABCD) , ولتكن E,F,G نقاطه القطرية . بما ان النقطتين G,F لاتقعان على المستقيم BC , فان المستقيمين GF و BC مختلفان.
لذلك يجب ان يتقاطعان في نقطة واحدة ولتكن P .
$P \neq B$, لانه اذا كان P = B , فان GF يقطع AB في نقطتين مختلفتين B و G وهذا تناقض مع مبرهنة ١.
بنفس الطريقة , $P \neq C$. وكذلك من بديهية ٥ , $P \neq E$.
وهكذا P هي النقطة الرابعة على الخط BC , التي تختلف عن B , C , و E .

تعريف : مثلثين منظورين من نقطة
يكون مثلثان في π منظورين (perspective) من نقطة O اذا وجد تناظر متباين بين رؤوس المثلثين بحيث ان كل المستقيمات الواصلة بين الرؤوس المتناظرة تمر من نقطة O .
تدعى O مركز المنظورية.
يرمز للمثلثين ABC و A'B'C' المنظورين من نقطة O بحيث ان A, B, C تناظر A', B', C' على التوالي , بالرمز $\Delta ABC \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} \Delta A'B'C'$.

حسب مبدا الثنائية :
يكون مثلثان في π منظورين من مستقيم l اذا وجد تناظر متباين بين اضلاع المثلثين بحيث ان كل نقاط تقاطع الاضلاع المتناظرة تقع على المستقيم l . يدعى l محور المنظورية.
اذا كان ΔABC و $\Delta A'B'C'$ منظورين من l بحيث ان AB, BC, CA تناظر A'B', B'C', C'A' على التوالي يرمز لهذا بالرمز $\Delta ABC \overset{l}{\underset{\wedge}{=}} \Delta A'B'C'$.

Ax6: بديهية ديزارك
اذا كان مثلثان في مستوي اسقاطي منظورين من نقطة , فانهما يكونان منظورين من مستقيم.
هذا يعني , اذا كان ΔABC و $\Delta A'B'C'$ مثلثين بحيث ان AA', BB', CC' تلتقي جميعا في نقطة O , فان النقاط

$$L = AB \cap A'B',$$
$$M = BC \cap B'C'$$
$$N = CA \cap C'A'$$

تقع على مستقيم واحد.

مبرهنة ٦: ثنائية بديهية ديزارك
اذا كان مثلثان في مستوي اسقاطي منظورين من مستقيم , فانهما يكونان منظورين من نقطة.
البرهان:
ليكن ABC و A'B'C' مثلثين منظورين من مستقيم l , ليكن

$$L = AB \cap A'B',$$
$$M = BC \cap B'C'$$
$$N = CA \cap C'A'$$

فان L ,M ,N تقع على المستقيم l . يجب ان نبرهن على ان المستقيمات AA',BB',CC' تلتقي بنقطة.

لتكن $O = BB' \cap CC'$ سنبرهن ان 'AA يمر من O .

المثلثان 'LBB', NCC منظورين من M , أي ان

$$\Delta LBB' \overset{M}{\underset{\wedge}{=}} \Delta NCC'$$

لذلك من بديهية ٦: النقاط $LB \cap NC = A$, $BB' \cap CC' = O$, و $B'L \cap C'N = A'$ تقع على مستقيم واحد .

وبالتالي فان 'AA يمر من O والمثلثين يكونان منظورين من النقطة O .

المجموعات التوافقية (Harmonic Sets)

سنتناول نتيجة اخرى لبديهية فانو , أي مفهوم المجموعات التوافقية

تعريف:

ليكن F شكلا و P نقطة لاتنتمي الى F , نقاط F والنقطة P تعين حزمة مستقيمات حيث P راس الحزمة . ان حزمة المستقيمات مع الراس P تدعى قطع نقطي (Point Section) للشكل F من P .

مثال: رباعي الزوايا التام ABCD و $P \notin ABCD$, وحزمة المستقيمات الاربعة المارة من P مع P تدعى بالقطع النقطي للشكل ABCD من P .

تعريف: ليكن F شكلا و l مستقيما لاينتمي الى F , مستقيمات F والمستقيم l تعين حزمة من النقاط تدعى قطع خرطي والخط l يسمى محور القطع الخرطي , مثال:

ناخذ رباعي الزوايا التام ABCD , فان النقاط A1,.........A6 المتولدة من تقاطع الخطوط الستة لرباعي الزوايا مع الخط l تولد حزمة من النقاط تسمى قطع خطي.

تعريف:

مجموعة مرتبة من اربع نقاط A,B,C,D على مستقيم l هي مجموعة توافقية من نقاط اذا وجد رباعي زوايا تام فيه A و B نقطتين قطريتين و C و D تقعان على الضلعين الباقيين من رباعي الزوايا التام .

ملاحظات//

- ❖ الرمز H(AB,CD) يرمز للعبارة "A, B,C,D" تكون مجموعة توافقية .
- ❖ H(BA, CD) $\longleftrightarrow$ H(AB,CD) التاخير والتقديم بين A,B لايؤثر حسب شروط التعريف.
- ❖ H(AB,DC) $\longleftrightarrow$ H(AB,CD) نفس السبب السابق بالنسبة C,D

مثال// في الشكل رباعي الزوايا التام PQRS , وفيه نقطة

$$A = PQ \cap RS$$
$$B = SP \cap RQ$$

حيث A, B نقاط قطرية , $C \in PR$ ، $D \in SQ$

في الحقيقة النقاط {A,B,C,D} هو قطع خرطي للشكل رباعي الزوايا وذلك لان حزمة نقاط التقاطع لخطوط الشكل مع هذا الخط (المفروض هي ستة نقاط , ولكن يوجد زوجان من الخطوط يقطعانه كل زوج في نقطة واحدة وهي عند كل من A, B).

مبرهنة ٧:

$H(AB,CD) \leftrightarrow H(BA,CD) \leftrightarrow H(BA,DC) \leftrightarrow H(AB,DC) \leftrightarrow H(AB,CD)$.

تعريف: اذا كان H(AB,CD) , فانه يقال بان D النقطة التوافقية الرابعة للنقاط A,B,C , او هي المرافق التوافقي للنقطة C بالنسبة الى A و B .

من مبرهنة ٧ نستنتج اذا كانت D مرافق توافقي الى C بالنسبة الى A و B , فان C هي مرافق توافقي الى D بالنسبة الى B و A .

مبرهنة ٨:

ليكن A,B,C ثلاث نقاط مختلفة على مستقيم l . فانه من الممكن ايجاد مرافق توافقي الى C بالنسبة الى A و B .

البرهان:

حسب Ax3 :لتكن P_1 نقطة لاتقع على l , وحسب Ax1 نصل AP_1 ,

حسب Ax2 : لتكن P_2 نقطة على AP_1 بحيث ان $P_2 \neq A$ ، $P_2 \neq P_1$

نصل BP_1, BP_2, CP_1 . حسب Ax4 : لتكن $P_4 = CP_1 \cap BP_2$ ، $P_3 = AP_4 \cap BP_1$

فان (P1 P2 P3 P4) هو رباعي الزوايا المطلوب , وفيه A,B نقطتين قطريتين و C نقطة على الضلع P_1P_4 .

لتكن $D = P_2P_3 \cap l$, فتكون D هي المرافق التوافقي ال C بالنسبة الى A و B .

مبرهنة٩:

لتكن A, B ,C ثلاث نقاط على مستقيم l , فان المرافق التوافقي للنقطة C بالنسبة الى A و B يكون وحيدا.

مبرهنة١٠:

$$H(AB,CD) \leftrightarrow H(CD,AB)$$

نتيجة:

$$H(AB,CD) \leftrightarrow H(CD,AB) \leftrightarrow H(CD,BA) \leftrightarrow H(DC,BA) \leftrightarrow$$
$$H(DC,AB) \leftrightarrow H(AB,DC) \leftrightarrow H(BA,DC) \leftrightarrow H(BA,CD).$$

بديهيات الفصل (Separation Axioms) :

على المستقيم الاقليدي كما هو معروف في بديهيات الترتيب وبالاخص Ax9 " توجد نقطة C تقع بين A و B " أي اذا بدانا التحرك من A باتجاه B يجب ان نمر من نقطة C وبالعكس.

ولكن عندما تكون النقاط على دائرة حيث ان A و B نهايتا قطعتان مختلفتان : واحدة , القطعة بالخط الغامق , والاخرى القطعة المنقطة. اذ كانت C في القطعة بالخط الغامق , يمكن التحرك من A الى B على القطعة المنقطة بدون المرور من C . لكن اذا وجدت نقطة D على هذه القطعة المنقطة , لايمكن التحرك من A الى B في أي اتجاه بدون المرور من واحدة او اخرى من النقطتين C او D .

رمز: الرمز "AB / CD" يستعمل ليرمز للفصل لزوج من نقاط A,B بزوج من نقاط C,D .

بديهيات الفصل:

Ax7 : الزوجان A,B و C,D لمجموعة توافقية من النقاط احدهما يفصل الاخر .

بتعبير اخر : اذا كان H(AB,CD) , فان AB / CD .

Ax8 : اذا كان الزوجان A,B و D1,C احدهما يفصل الاخر وكذلك الزوجان A,D1 و D2,B احدهما يفصل الاخر , فان الزوجين A,B و C,D2 احدهما يفصل الاخر.

او بعبارة اخرى: اذا كان $AB/D_1C \wedge AD_1/D_2B$ فان AB/CD_2 .

Ax9 : اذا كان الزوجان A,B و C,D احدهما يفصل الاخر فان A,B,C,D نقاط مختلفة.

تعريف قطعة المستقيم بالهندسة الاسقاطية:

لتكن A,B,C ثلاث نقاط مختلفة على خط معلوم l , تعرف القطعة كما يلي:

$$(A-B)=\{X \in l : AB/CX)$$

حيث النقطة C خارجة عن الخط AB .

ملاحظة : اذا كانت النقطة C لاتقع على القطعة A-B فانه يرمز لها بالرمز AB // C.

مبرهنة ١١: القطعة AB // C هي منجموعة غير خالية.

البرهان:

لتكن A,B,C ثلاث نقاط على مستقيم l .

من مبرهنة ٨: يمكن ايجاد نقطة D التي هي مرافق توافقي الى C بالنسبة الى A و B .

اذن H(AB,CD) ,

ومن Ax7 : AB / CD ,

ومن ثم تقع D على قطعة المستقيم AB // C .

المتتابعة التوافقية: مجموعة من نقاط $D_1, D_2, ..., D_n$ على مستقيم l يحتوي على ثلاث نقاط معلومة A,B,C تكون متتابعة توافقية اذا كانت نقطة D_1 هي مرافق توافقي لواحدة من النقاط A,B,C بالنسبة الى النقطتين الاخريتين. وان أي نقطة تتبع D_1 هي مرافق توافقي لاي واحدة من النقاط التي تسبقها من المتتابعة بالنسبة الى نقطتين اخريتين تسبقها في المتتابعة.

مبرهنة ١٢: كل مستقيم في المستوي الاسقاطي يحتوي على عدد غير منته من النقاط.

Ax10 :" بديهية الاستمرارية"

يوجد مستقيم اسقاطي l يحتوي على مجموعة من نقاط متشاكلة تقابليا (isomorphic) مع مجموعة اعداد لنظام الاعداد الحقيقية الموسع.

من هذه البديهية من الممكن ايجاد تناظر متباين بين نقاط المستوي الاسقاطي واعداد نظام عددي هو نظام الاعداد الحقيقية.

المنظورية والاسقاطية (Perspectivity and Projectivity)

تعريف المنظورية من نقطة:

- ❖ لتكن F و 'F شكلين في المستوي الاسقاطي π , يكون الشكلين اعلاه منظورين من نقطة O , اذا تحقق الشرط التالي:" النقاط في F تكون في تناظر متباين مع نقاط الشكل 'F , بحيث ان الخطوط الواصلة بين النقاط المتناظرة تمر من نقطة O ويسمى مركز المنظورية.

  يرمز لهذا بالرمز $F \underset{\wedge}{\overset{O}{=}} F'$

$$F(A,B,C) \underset{\wedge}{\overset{O}{=}} F'(A',B',C')$$

- ❖ ليكن F و 'F شكلا في π , وليكن l مستقيم معلوم , يقال عن F,F' بانهما منظورين من l , اذا تحقق الشرط التالي :" مستقيمات الشكل F في تناظر متباين (1-1&onto) مع مستقيمات الشكل 'F , نقاط تقاطع المستقيمات المتناظرة تقع على المستقيم l . يدعى l محور المنظورية ويعبر عنه بالرمز : $F \underset{\wedge}{\overset{l}{=}} F'$

تعريف الاسقاطية:

هدف الهندسة الاسقاطية هو دراسة الخواص الهندسية لشكل يسقط من نقطة ما الى شكل اخر.

والاسقاطية "هو تطبيق لمستقيم l الى مستقيم m يعبر عنه بانه تركيب منظوريتين او اكثر , ولكن المنظورية هي دائما (1-1& onto) اذن الاسقاطية (1-1& onto)".

وايضا "خاصية شكل لاتتغير باي اسقاط تدعى خاصية اسقاطية ".

مثال// ليكن l,m مستقيمين بحيث ان $l(p_1,p_2,p_3) \underset{\wedge}{\overset{O}{=}} m(p_1',p_2',p_3')$,.......*

وكذلك $m(p_1',p_2',p_3') \underset{\wedge}{\overset{O}{=}} n(p_1'',p_2'',p_3'')$,.................**

أي ان :

$$\begin{aligned} p_1 &\to p_1' \to p_2' \\ p_2 &\to p_2' \to p_2'' \\ p_3 &\to p_3' \to p_3'' \end{aligned}$$

من * و ** نحصل على الاسقاطية $l(p_1,p_2,p_3) \underset{\wedge}{\overset{O}{=}} n(p_1'',p_2'',p_3'')$.

ملاحظة // كل المنظوريات هي تناظرات اسقاطية , لكن ليس كل التناظرات الاسقاطية هي منظوريات .

مبرهنة ١٤:

اذا كانت A,B,C,D تكون مجموعة توافقية من نقاط على مستقيم l , فان القطع النقطي الى H(AB,CD) من نقطة O لاتقع على l هو مجموعة توافقية من مستقيمات.

بعبارة اخرى:

المستقيمات التي تصل مجموعة توافقية من نقاط A,B,C,D على مستقيم l ونقطة O لاتقع على l هي مجموعة توافقية من مستقيمات.

البرهان:

لتكن A,B,C,D نقاط على l بحيث ان H(AB,CD) . ولتكن O نقطة لاتقع على l .

نرسم من A خطا يقطع OC و OB في نقطتين P و Q على التوالي.

وليكن BP يقطع OA في نقطة R .فانه يتكون رباعي زوايا تام (PQRO) وقطريه A و B حيث ان $A = PQ \cap OR, B = PR \cap OQ, C = OP \cap l$

بما ان النقطة التوافقية الرابعة وحيدة , فان RQ يمر من D , المستقيمات AD,AQ,RD,BR تكون رباعي اضلاع وفيه :

OA و OB خطين قطريين , بما ان OC و OD هما المستقيمان الواصلان بين O والراسين P و D , على التوالي , فان المستقيمات OA,OB, OC,OD تكون مجموعة توافقية.

مبرهنة ١٥: (ثنائية مبرهنة ١٤)

اذا كانت a,b,c,d تكون مجموعة توافقية من مستقيمات تمر من نقطة O , فان نقاط تقاطع هذه المستقيمات مع مستقيم l لايمر من O هي مجموعة توافقية من نقاط.

بتعبير اخر:

نقاط تقاطع مجموعة توافقية من مستقيمات a,b,c,d تمر من نقطة O مع مستقيم l بحيث ان $O \notin l$,l هي مجموعة توافقية من نقاط.

البرهان:

ليكن $A = a \cap l, B = b \cap l, C = c \cap l, D = d \cap l$

ليكن m خطا اخر يمر من A .

لتكن $P = m \cap Cc$ و $Q = m \cap BO$

وبذلك يكون عندنا رباعي أضلاع , أضلاعه:

AD,DQ,PQ,PB وقطريه OA و OB .

لذلك, فان الضلعين DQ و PB يتقاطعان في نقطة R على OA .

ويكون عندنا رباعي زوايا (PQRO) وفيه A وB نقطتين قطريتين , والضلعين من النقطة القطرية الثالثة يقطعان l في النقطتين C وD .

لذلك A,B,C,D تكون مجموعة توافقية من نقاط.

مبرهنة١٦:

الاسقاطية تحفظ الخاصية التوافقية

بعبارة اخرى:

اسقاط مستقيم الى مستقيم اخر يرسل مجموعة توافقية من نقاط الى اية مجموعة اخرى توافقية من نقاط.

البرهان:

H.W

مبرهنة ١٠:

اذا كان a و b مستقيمين مختلفين في المستوي , c مستقيم اخر يمر بنقطة تقاطعهما اذا وفقط اذا كان c تركيب خطي للمستقيمين a وb .

مبرهنة ١١:

أي اربع نقاط (مستقيمات) في المستوي الاسقاطي تكون مرتبطة خطيا.

مبرهنة ١٢:

اذا كانت $P_1, P_2, ...P_m$ نقاط غير مرتبطة خطيا بينما النقاط $P_1, P_2, ..., P_{m+1}$ تكون مرتبطة خطيا, فان احداثيات النقاط يمكن ان تختار بحيث ان

$$P_1 + P_2 + ... + P_m = P_{m+1}$$

تعريف التحويل الخطي على R^n:

التطبيق $A : R^n \to R^n$, الذي له الخواص التالية :

حيث $\lambda \in R$ و $X, Y \in R^n$

١- $A(\lambda X) = \lambda A(X)$,

٢- $A(X + Y) = A(X) + A(Y)$.

ان هذا التطبيق يدعى تحويل خطي .

واذا كان $|A| \neq 0$, فان هذا التطبيق يدعى تحويل خطي غير انفرادي.

$$A(X) = AX = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & .. & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{x_1}{x_2} \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + & .... & + a_{1n}x_n \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1}x_1 & + a_{n2}x_2 & + & .... & + a_{nn}x_n \end{bmatrix}$$

ملاحظة : من التطبيقات الهندسية عن الارتباط الخطي

اذا كان ABC و 'A'B'C مثلثين منظورين من نقطة O , فانهما يكونان منظورين من مستقيم.

وثنائية العبارة اعلاه ايضا تطبيقا هندسيا اخر عن الارتباط الخطي.

وايضا بديهية فانو , والخطوط القطرية لرباعي اضلاع تام لاتلتقي بنقطة واحدة.

النظام الاحداثي للمستقيم:

اذا كانت $A(a_1, a_2, a_3)$ و $B(b_1, b_2, b_3)$ نقطتين مختلفتين على مستقيم l , فان لاية نقطة $P = (P_1, P_2, P_3)$ على المستقيم l , نستطيع ايجاد عددين حقيقيين λ_1 و λ_2 بحيث ان:

$$P_1 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 \qquad \text{(i= 1,2,3)}$$

حيث ان $\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$

لان

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_2 & \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 & \lambda_1 a_3 + \lambda_2 b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

مثال //

اذا كانت A(1,2,3) , و B(1,0,1) , فان نقطة $P(P_1, P_2, P_3)$ تقع على المستقيم AB اذا كان

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

أي ان , $P_1 + P_2 + -P_3 = 0$.

وعندما النقطة P تقع على الخط AB , فانه يمكن ايجاد λ_1 و λ_2 بحيث ان:

$P_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ $\qquad$ $P_2 = 2\lambda_1 = 0$

$P_3 = 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

بحل أي معادلتين منها , نجد λ_1 و λ_2 . ذلك , اذا كانت $(P_1, P_2, P_3) = (2,3,5)$, فان

$$\lambda_1 + \lambda_2 - 2 = 0$$
$$2\lambda_1 - 3 = 0$$
$$3\lambda_1 + \lambda_2 - 5 = 0$$

$\lambda_1 = 2/3, \lambda_2 = 1/2$.

ملاحظة: ان تعيين $[\lambda_1, \lambda_2]$ للنقطة P بالنسبة الى A وB لايتم بطريقة وحيدة.

حيث اذا اخترنا ثلاثيات مختلفة لتمثل A و B فان λ_1 و λ_2 سيختلفان .

ذلك , اذا اخذنا (2.3 , 2.2 , 2.1) لتمثل A , فان $\lambda_1 = 3/4, \lambda_2 = 1/2$

للحل هذه المشكلة يمكن اخذ نقطة ثالثة $C(c_1, c_2, c_3)$ على المستقيم باختيار تمثيلات للنقطتين A وB بحيث ان C تتعين من [1,1] . ان وحدانية $[\lambda_1, \lambda_2]$ يمكن ان تعين لاية نقطة على المستقيم نسبة الى تمثيلات A و B .

تغيير الاحداثيات:

اذا كانت النقطة $P = (x_1, x_2, x_3)$ لها احداثيات $[\lambda_1, \lambda_2]$ بالنسبة الى النقاط $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, و C=A+B , فان

$X_1 = \lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i, i = 1,2,3$ ....(١)

لتكن $[\lambda_1^{'}, \lambda_2^{'}]$ هي احداثيات P فيما يخص نظاما اخرا $A^{'} = (a_1^{'}, a_2^{'}, a_3^{'})$, $B^{'} = (b_1^{'}, b_2^{'}, b_3^{'})$ و

C'= A' + B' فان

$X_1 = \lambda_1^{'} a_i^{'} + \lambda_2^{'} b_i^{'}, i = 1,2,3$ ....(٢)

يجب ان نعين العلاقة بين $[\lambda_1, \lambda_2]$ و $[\lambda_1^{'}, \lambda_2^{'}]$.

لتكن احداثيات A و B بالنسبة الى الاحداثي الثاني [a,c] و [b,d] , على التوالي , أي ان ,

$$\begin{matrix} a_i = aa_i^{'} + cb_i^{'}, i = 1,2,3 \\ b_i = ba_i^{'} + db_i^{'} \end{matrix} \quad ....(٣)$$

بما ان A وB مختلفتين , فان

$$a/c \neq b/d$$
$$ad - bc \neq 0$$

أي ان

بتعويض هذه القيم الى a_i و b_i في (١) , نحصل على

$$X_1 = \lambda_1(aa_i' + cb_i') + \lambda_2(ba_i' + db_i')$$
$$= (\lambda_1 a + \lambda_2 b)a_i' + (\lambda_1 c + \lambda_2 d)b_i'$$

بالمقارنة مع (٢) , يكون

$$\lambda_1' = (\lambda_1 a + \lambda_2 b)$$
$$\lambda_2' = (\lambda_1 c + \lambda_2 d)$$

أي ان,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{.........(٤)}$$

حيث ان $ad - bc \neq 0$.

لذلك , اذا كانت p على مستقيم لها احداثيات $[\lambda_1, \lambda_2]$ بالنسبة الى A,B,C , فان الاحداثيات الجديدة $[\lambda_1', \lambda_2']$ الى p بالنسبة الى ثلاث نقاط اخرى A' , B' , C' .

مبرهنة ١٧:

ليكن l مستقيما نظامه الاحداثي $[\lambda_1, \lambda_2]$ و m مستقيما نظامه الاحداثي $[\lambda_1', \lambda_2']$. فان الاسقاطية بين l و m يمكن ان يعبر عنها بطريقة وحيدة بالشكل:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

حيث ان $ad - bc \neq 0$.

النسبة التبادلية Cross Ratio

تعريف: النسبة التبادلية لاربعة اعداد a, b,c,d هي

$$R(a,b,c,d)=\frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}$$

مبرهنة ١٨:

اذا كانت R(a,b,c,d) = k فان النسب التبادلية الستة المختلفة هي:

$$\begin{aligned}
&R(a,b,c,d)=k\\
&R(b,a,c,d)=1/k\\
&R(a,c,b,d)=1-k\\
&R(c,a,b,d)=1/(1-k)\\
&R(c,b,a,d)=1-(1/(1-k))=k/(k-1)\\
&R(b,c,a,d)=(k-1)/k
\end{aligned}$$

مبرهنة ١٩:

اذا كان اثنان من الاعداد الاربعة a, b,c,d متساويين , فان النسبة التبادلية تكون ∞,0 او 1 .

وبالعكس , اذا كانت النسبة التبادلية R (a,b,c,d) تساوي ∞ ,0 , او 1 , فانه في الاقل اثنين من الاعداد a,b,c,d متساويين.

البرهان: اذا كان a = b , فان

$$R(a,a,c,d)=\frac{(a-c)(a-d)}{(a-d)(a-c)}=1$$

اذا كان b = c , فان

$$R(a,b,b,d)=\frac{(a-b)(b-d)}{(a-d)(b-b)}=\infty$$

اذا كان a = c , فان

$$R(a,b,a,d)=\frac{(a-a)(b-d)}{(a-d)(b-a)}=0$$

مبرهنة ٢٠:

R(a,b,c,d) . R(a,b,d,e) = R(a,b,c,e)

البرهان:

$$R(a,b,c,d)*R(a,b,d,e)=\frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}*\frac{(a-d)(b-e)}{(a-e)(b-d)}$$

$$=\frac{(a-c)(b-e)}{(b-c)(a-e)}=R(a,b,c,e)$$

مبرهنة ٢١:

النسبة التبادلية لاربع نقاط مختلفة لايمكن ان تكون ∞, 0 , او 1 .

مبرهنة ٢٢:

اذا كانت $Y=\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}$ $X=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ نقطتين على مستقيم , فان الشرط Z= aX + bY و

S= cX+dY تكون توافقية بالنسبة الى X وY هو ان

$$.\frac{c}{d}+\frac{a}{b}=0,[a,b]\neq[c,d]$$

مبرهنة ٢٣:

$$R(A,B,C,D)=-1\leftarrow H(AB,CD)$$

استذكار بعض التعاريف الخاصة بالجبر الخطي :

تعريف الارتباط الخطي : يقال لمجموعة متجهات $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,.......,\vec{v}_n\}$ من فضاء متجهات V , بانها

مرتبطة خطيا اذا وفقط اذا يوجد اعداد $k_1,k_2,........,k_n$ ليست جميعها اصفارا , بحيث :

$$k_1\vec{v}_1+k_2\vec{v}_2+......+k_n\vec{v}_n=0$$

ويقال للمجموعة $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,.......,\vec{v}_n\}$ مستقلة خطيا اذا وفقط اذا

$$k_1\vec{v}_1+k_2\vec{v}_2+......+k_n\vec{v}_n=0$$

فان ,

$$k_1=k_2=.......=k_n=0$$

مثال//

المتجهات $\vec{u_1}(1,0,0), \vec{u_2}(0,1,0), \vec{u_3}(0,0,1), \vec{u_4}(2,3,-5)$

مرتبطة خطيا , لان

$$2\vec{u_1} + 3\vec{u_2} - 5\vec{u_3} - \vec{u_4} = 0$$

تعريف التركيب الخطي:

ليكن V فضاء متجهات , وان $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots\ldots\ldots, \vec{v}_n$ متجهات في V , يقال للمتجه $\vec{v}$ في V بانه تركيب خطي من $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots\ldots\ldots, \vec{v}_n$, اذا امكن التعبير عن $\vec{v}$ بالشكل التالي:

$V = k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + \ldots\ldots + k_n \vec{v}_n$, حيث ان $k_1, k_2, \ldots\ldots\ldots, k_n$ اعداد.

مثال//

ليكن $\vec{v_1} = (1,2,-1), \vec{v_2} = (1,0,-1)$ متجهين من R^3 , هل ان المتجه $\vec{v} = (1,0,2)$ تركيب خطي الى $\vec{v_1}, \vec{v_2}$.

الحل//

يجب ان نجد عددين k_1, k_2 لكي يكون $\vec{v}$ تركيب خطي الى $\vec{v_1}, \vec{v_2}$, بحيث ان

$$V = k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2$$
$$(1,0,2) = k_1(1,2,-1) + k_2(1,0,-1)$$

أي :

$$k_1 + k_2 = 1$$
$$2k_1 = 0$$
$$-k_1 - k_2 = 2$$

هذه المنظومة ليس لها حل , اذن $\vec{v}$ ليست تركيب خطي من $\vec{v_1}, \vec{v_2}$.

الفصل الثاني عشر

المستوى الاسقاطي التحليلي

نموذج اقليدي للمستوي الاسقاطي:

تبدأ دراسة الطرق الجبرية والاحداثية في المستوي الاسقاطي بانشاء نموذج تحليلي الذي فيه كل نقطة تمثل بثلاثي من اعداد حقيقية يدعى احداثيات متجانسة للنقطة .

نموذج اقليدي يستعمل في تكوين النموذج التحليلي.

- في الفضاء الثلاثي الاقليدي , ناخذ مجموعة كل المستقيمات التي تمر بنقطة O لهذا الفضاء .

بما ان كل زوج من المستقيمات المختلفة لهذه المجموعة تعين مستويا , فالمجموعة الناتجة من المستويات مع كل المستقيمات التي تمر من O , تكون نموذجا للمستوى الاسقاطي.

تفسير هذا النموذج يكون كما يلي:

تفسر " النقاط " بانها مستقيمات تمر من O .

و "المستقيمات " بانها مستويات تمر من O .

والعلاقة " نقطة على مستقيم " بانها مستقيم في مستوي.

ان المستقيمات والمستويات التي تمر من نقطة O في الفضاء الاقليدي تحقق بديهيات الوقوع والوجود لنقاط ومستقيمات المستوى الاسقاطي.

نموذج تحليلي:

نقاط ومستقيمات المستوى الاسقاطي تمثل بمستقيمات ومستويات الفضاء – الثلاثي الاقليدي .

- في الفضاء الثلاثي الاقليدي , X_{12}, X_{13}, X_{23} ثلاثة مستويات متعامدة بالتبادل . فان كل نقطة P في هذا الفضاء تناظر ثلاثي من الاعداد الحقيقية (X_1, X_2, X_3) , حيث ان X_1 , X_2 , X_3 هي المسافات من P الى هذه المستويات , على التوالي.

ناخذ أي مستقيم يمر من نقطة الاصل 0 لهذا النظام الاحداثي . يتعين المستقيم من مجموعة من ثلاثة اعداد متجهة $(a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0)$. أي مجموعة اخرى (ta_1, ta_2, ta_3) تعين نفس الخط , حيث t أي عدد حقيقي لايساوي صفر.

اذن العدد الثلاثي (a_1, a_2, a_3) يكافئ عددا ثلاثيا اخر (b_1, b_2, b_3) اذا وجد عددا $K \neq 0$, بحيث ان $(b_1, b_2, b_3) = K(a_1, a_2, a_3)$.

مجموعة كل الثلاثيات المتكافئة بالتبادل تكون صف تكافؤ يرمز له بالرمز $\{a_1, a_2, a_3\}$.

بما انه يوجد تناظر متباين بين صفوف التكافؤ $\{X_1, X_2, X_3\}$, التي ليست جميع عناصرها صفرية, والمستقيمات التي تمر بنقطة الاصل في الفضاء الثلاثي الاقليدي , وبما ان هذه

المستقيمات تمثل نموذجا لنقاط المستوي الاسقاطي , تكون صفوف التكافؤ هذه نموذجا تحليليا لنقاط المستوي الاسقاطي.
أي تمثيل مثل (a_1, a_2, a_3) لصف تكافؤ يدعى احداثيات متجانسة لنقطة في المستوي الاسقاطي الحقيقي, اذا كان الثلاثي العددي يتناسب مع ثلاثي لاعداد حقيقية.
فمثلا, $(1,2,3)$ و $(2,4,6)$ تمثلان نفس النقطة الحقيقية.
ان المستقيم في المستوي الاسقاطي يناظر مستويا يمر بنقطة الاصل للفضاء الثلاثي الاقليدي .
معادلة هذا المستوي تعرف كما يلي:

$$d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 = 0$$

حيث ان d_1, d_2, d_3 تتناسب مع مجموعة من ثوابت حقيقية , وان $(d_1, d_2, d_3) \neq (0,0,0)$.
بما ان النقطة التي تحقق المعادلة اعلاه , تحقق ايضا المعادلة

$$kd_1x_1 + kd_2x_2 + kd_3x_3 = 0$$

حيث k أي عدد لايساوي صفر, فان المستوي يتعين اما بثلاثي الاعداد الحقيقية (d_1, d_2, d_3) ليست جميع العناصر صفرية, او باي ثلاثي اخر (kd_1, kd_2, kd_3) , حيث ان $k \neq 0$, لذلك يوجد تناظر متباين بين صفوف التكافؤ $(d_1, d_2, d_3) \neq (0,0,0)$ والمستويات التي تمر بنقطة الاصل , وبالتالي كذلك , بين صفوف التكافؤ هذه ومستقيمات المستوي الاسقاطي .
أي تمثيل (d_1, d_2, d_3) لصف تكافؤ $\{d_1, d_2, d_3\}$ يدعى إحداثيات متجانسة لمستقيم في المستوي الاسقاطي الحقيقي.
أي ان النقاط والمستقيمات في المستوي الاسقاطي التحليلي تكون صفوف تكافؤ , وهذا يوضح مبدأ الثنائية في المستوي الاسقاطي.

معادلات النقاط والمستقيمات:
مبرهنة ١:
النقطة التي إحداثياتها المتجانسة (a_1, a_2, a_3) تقع على المستقيم الذي إحداثياته المتجانسة (d_1, d_2, d_3) إذا وفقط إذا $d_1a_1 + d_2a_2 + d_3a_3 = 0$
إذا كانت الإحداثيات المتجانسة للنقطة (X_1, X_2, X_3), فان المعادلة أعلاه تصبح:

$$d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 = 0$$

وتدعى معادلة المستقيم.

معادلة النقطة (a_1, a_2, a_3) هي: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$
مثال: معادلة النقطة $(1,2,3)$ هي $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$.
واحداثيات النقطة $X_1 - X_3 = 0$ هي $(1,0,-1)$.

مبرهنة ٢:
ثلاث نقاط مختلفة $A(X_1, X_2, X_3)$, $B(Y_1, Y_2, Y_3)$ و $C(Z_1, Z_2, Z_3)$ تقع على مستقيم واحد اذا وفقط اذا

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = 0$$

مبرهنة ٣: (ثنائية مبرهنة ٢)

ثلاثة مستقيمات مختلفة $a[X_1, X_2, X_3]$, $b[Y_1, Y_2, Y_3]$ و $c[Z_1, Z_2, Z_3]$ تلتقي بنقطة واحدة اذا وفقط اذا

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = 0$$

مثال:

النقاط الثلاث A(1,0,0) , B(0,1,0) و C(0,0,1) لاتقع على مستقيم واحد , لان

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

مثال:

النقاط الثلاث A(1,0,-1) , B(2,3,1) و C(-1,1,2) تقع على مستقيم واحد لان

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

ومن مبدأ الثنائية , تلتقي المستقيمات a [1,0,-1], b[2,3,1] و c[-1,1,2] بنقطة واحدة .

مبرهنة ٤:

معادلة المستقيم المتعين من النقطتين المختلفتين $A(Y_1, Y_2, Y_3)$, و $B(Z_1, Z_2, Z_3)$ تكون

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_2 & Y_3 \\ Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} Y_3 & Y_1 \\ Z_3 & Z_1 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} x_3 = 0$$

واحداثياته :

$$\left[\begin{vmatrix} Y_2 & Y_3 \\ Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} Y_3 & Y_1 \\ Z_3 & Z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} \right]$$

مثال :

معادلة المستقيم الذي يصل النقطتين P(2,1,-3) و Q(4,-2,4) تكون

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} x_3 = 0$$

$$= -2x_1 - 20x_2 - 8x_3 = 0$$
$$x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 0$$

فتكون احداثيات المستقيم $[1,10,4]$.
او يحل السؤال حسب خواص المحدد أي:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} x_3 = 0$$
$$= -2x_1 - 20x_2 - 8x_3 = 0$$
$$x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 0$$

ونحصل على نفس احداثيات المستقيم اعلاه $[1,10,4]$.

مبرهنة ٥ (ثنائية مبرهنة ٤):
معادلة النقطة المتعينة من تقاطع المستقيمين المختلفين $a[X_1, X_2, X_3]$ و $b[Y_1, Y_2, Y_3]$ تكون

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_2 & Y_3 \\ Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} Y_3 & Y_1 \\ Z_3 & Z_1 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} x_3 = 0$$

واحداثياتها تكون: $\left[\begin{vmatrix} Y_2 & Y_3 \\ Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} Y_3 & Y_1 \\ Z_3 & Z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}\right]$

مثال//
المستقيمات الثلاثة:

$$p : 7x_1 - 11x_2 - 5x_3 = 0$$
$$q : 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 0$$
$$r : 10x_1 - 11x_2 - 4x_3 = 0$$

تلتقي بنقطة واحدة , لان $\begin{vmatrix} 7 & -11 & -5 \\ 3 & -3 & -1 \\ 10 & -11 & -4 \end{vmatrix} = 0$

معادلة نقطة التقاطع تكون:

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ 3 & -3 & -1 \\ 7 & -11 & -5 \end{vmatrix} = 4X_1 + 8X_2 - 12X_3 = 0$$

لذا فان احداثياتها تكون: (4,8,-12) او (1,2,-3) .

ملاحظة مهمة جدا حول المثال اعلاه: ناخذ أي مستقيمين , حتى ولو اختلفت القيم فيكون الناتج من مضاعفات ناتج المستقيمات الاخرى.
أي : لو ناخذ الاحتمالات التالية

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ 7 & -11 & -5 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -4X_1 - 8X_2 + 12X_3 = 0$$

لذا فاحداثيات نقطة التقاطع هي (-1,-2,3) .

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ 10 & -11 & -4 \\ 7 & -11 & -5 \end{vmatrix} = 11X_1 + 22X_2 - 33X_3 = 0$$

فاحداثيات نقطة التقاطع هي : (1,2,-3).

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ 7 & -11 & -5 \\ 10 & -11 & -4 \end{vmatrix} = 33X_1 - 22X_2 + 33X_3 = 0$$

لذ , احداثيات نقطة التقاطع هي : (3,-2,3)

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ 10 & -11 & -4 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -1X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 0$$

لذا , احداثيات نقطة التقاطع هي: (-1,-2,3) .

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ 3 & -3 & -1 \\ 10 & -11 & -4 \end{vmatrix} = X_1 + 2X_2 - 3X_3 = 0$$

لذا , احداثيات نقطة التقاطع هي : (1,2,-3) .

المعنى الهندسي للارتباط الخطي:
رمز: اذا كان V متجه مركباته (a_1, a_2, a_3) فالرمز P(V) , سيعني ان احداثيات P المتجانسة هي (a_1, a_2, a_3) , كمثال , اذا كانت مركبات المتجه W هي:
(1,0,-1) , فان احداثيات P(W) هي (1,0,-1) و P(2W) هي (2,0,-2) .

تعريف الضرب العددي : Scalar Multiplication
C P (V) = P (CV)
ضرب نقطة P بعدد C , هو ببساطة ضرب المتجه الممثل الى P بالعدد C .

تعريف (الجمع) :
اذا كان

$$V = C_1V_1 + C_2V_2 + ...+ C_mV_m \neq 0$$

فان

$$C_1P_1(V_1) + C_2P_2(V_2) + ...+ C_mP_m(V_m) = P(C_1V_1 + C_2V_2 + ...+ C_mV_m)$$

و

$$C_1P_1(V_1) + C_2P_2(V_2) + ...+ C_mP_m(V_m) = 0$$

ليعني ان

$$C_1V_1 + C_2V_2 + ...+ C_mV_m = 0$$

مثال//
$P_1(-5V_1) + P_2(V_2) + P_3(-3V_3) = 0$, يعني ان

$-5V_1 + V_2 + -3V_3 = 0$,
وبذلك فان النقاط P_1, P_2, P_3 مرتبطة خطيا.

تعريف:
النقاط $P_1(V_1),......., P_m(V_m)$ تكون مرتبطة او غير مرتبطة خطيا اذا كانت المتجهات $V_1,........., V_m$ مرتبطة او غير مرتبطة خطيا.

تعريف:
اذا كانت النقاط $P_1, P_2,......P_m$ مرتبطة خطيا , فانه يوجد في الاقل واحد من الاعداد $C_1,..........., C_m$ لايساوي صفرا , بحيث ان

$$C_1P_1 + C_2P_2 + ...+ C_mP_m = 0$$

ليكن $C_1 \neq 0$

$$P_1 = -1/C_1\,(C_2P_2 + C_3P_3 + ...+ C_mP_m) .$$

فانه يقال بان النقطة P_1 هي تركيب خطي للنقاط $P_2,......P_m$.

مبرهنة ٦:
نقطتان (مستقيمان) مختلفتان تكونان مرتبطتين خطيا اذا وفقط اذا كانتا متساويتين.

مبرهنة ٧:
ثلاث نقاط مختلفة تكون مرتبطة خطيا اذا وفقط اذا كانت تقع على مستقيم واحد.

مبرهنة ٨:
ثلاثة مستقيمات مختلفة تكون مرتبطة خطيا اذا وفقط اذا كانت تلتقي بنقطو واحدة.

مبرهنة ٩:
اذا كانت A و B نقطتين مختلفتين في المستوي, C نقطة اخرى تقع على المستقيم AB اذا وفقط اذا كانت C تركيب خطي للنقطتين A و B .

هندسة اولية:

سنبرهن بعض مبرهنات اقليدس بطريقة هلبرت

مبرهنة ٦٦:

في المثلث ABC , اذا كان $A-B\cong A-C$ وان G,F نقطتان بحيث ان A-B-F و A-C-G .
فان $\angle CBF\cong\angle BCG$ و $\angle ABC\cong\angle ACB$.

البرهان:

من Ax9 : توجد نقطة G بحيث ان A-C-G .
من Ax11 : توجد نقطة F من جهة A التي تحتوي B بحيث ان $A-G\cong A-F$
من Th 52 + Ax11 : فان A-B-F .
ناخذ المثلثين ABG و ACF , وفيهما:
$A-B\cong A-C$, $A-G\cong A-F$, و $\angle A\cong\angle A$.
فانه من Th SAS : $\Delta ABG=\Delta ACF$
لذا فان $\angle ABG\cong\angle ACF,\angle AGB\cong\angle AFC,B-G\cong F-C$
من مبرهنة طرح القطع : نستنتج ان $B-F\cong C-G$.
ومن مبرهنة SAS : $\Delta FBC=\Delta GCB$.
لذا فان $\angle CBF\cong\angle BCG$ وكذلك $\angle BCF\cong\angle CBG$
وبذلك يكون عندنا $\angle ABG\cong\angle ACF$ و $\angle BCF\cong\angle CBG$.
بما ان A-C-G , A-B-F , ومن تعريف شعاع بين شعاعين و Th 46 : الشعاع $\vec{BC}$ يقع في داخل $\angle ABG$ وان $\vec{CB}$ يقع في داخل $\angle ACF$. لذلك من مبرهنة طرح الزوايا , فان $\angle ABC\cong\angle ACB$.

مبرهنة ٦٧:

اذا كانت زاويتان في مثلث متطابقتين , فانه يتطابق كذلك الضلعان المقابلان لهما.
البرهان:
ليكن ABC مثلث معلوم وفيه $\angle B\cong\angle C$
يجب ان نبرهن ان $A-B\cong A-C$
وحسب Th62 يتحقق واحد فقط ممايلي:

$$A-B\cong A-C$$
$$A-B<A-C$$
$$A-C<A-B$$

الاحتمال الثاني عندما $A-B<A-C$: وحسب تعريف العلاقة اصغر من على القطع توجد نقطة D بحيث ان

١- A-D-B .
٢- $A-C\cong B-D$.

والان في المثلثين ABC, BCD وفيهما :
$\angle BDC\cong\angle ACB$ بالفرض
وحسب Ax12 : $B-C\cong B-C$ وكذلك بالفرض $A-C\cong B-D$
حسب ThSAS : يتطاق المثلثان ومن التطابق ينتج ان : $\angle 2\cong\angle 1$
ولكن بالفرض $\angle 2\cong\angle 3$
وحسب Ax12 : $\angle 1\cong\angle 3$

وحسب ?Th : الشعاع $\overrightarrow{CD}$ يقع داخل $\angle 3$.
وبالتالي فان الشعاعين $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CA}$ يقعان في نفس الجهة من الخط CB .
بما ان $\angle 3 \cong \angle 1$ تناقض مع Ax14 ؟
اذن الاحتمال الاول مرفوض.
الاحتمال الثاني مرفوض ايضا.
والاحتمال الوحيد المقبول هو $A-C \cong A-B$.

مبرهنة ٦٨:
لتكن A-B قطعة معلومة وان $A-C \cong A-D$ و $B-C \cong B-D$ وكانت النقطتين D,C تقعان في نفس الجهة من الخط AB فان C=D .
البرهان : H.W

مبرهنة ٦٩: (S.S.S)
اذا كانت ثلاثة اضلاع من مثلث تطابق ثلاثة اضلاع من مثلث اخر فان المثلثين يتطابقان.
البرهان:
ليكن ABC و DEF مثلثين وفيهما: الاضلاع الثلاثة من احدهما تطابق الاضلاع الثلاثة على التوالي من المثلث الاخر.
لكي نبرهن ان المثلثين يتطابقان من مبرهنة SAS يجب ان نبرهن ان زوجا واحدا من الزوايا تكون متطابقة , وليكن $\angle ABC \cong \angle DEF$.
نفرض ان العبارة خطا.
من Th 62 : $\begin{array}{l}\angle ABC < \angle DEF \\ \angle DEF < \angle ABC\end{array}$
نفرض ان $\angle DEF < \angle ABC$
من تعريف العلاقة اصغر من : فانه يوجد شعاع $\overrightarrow{BG}$ في داخل $\angle ABC$ بحيث ان
$\angle GBC \cong \angle DEF$. من Ax11 , توجد نقطة H على $\overrightarrow{BG}$ بحيث ان $B-H \cong E-D$.
وبما ان $B-C \cong E-F$ فانه من SAS , $\Delta DEF \cong \Delta HBC$.
ولذلك $H-C \cong D-F$ وبما ان $A-C \cong D-F$, فان $A-C \cong H-C$ وبالمثل
$A-B \cong H-B$, وبما ان A و H في نفس الجهة من BC , فانه من Th68 , A=H
(تناقض)؟.
وبنفس الطريقة اذا كان $\angle ABC < \angle DEF$. لذلك $\angle ABC \cong \angle DEF$ وان $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

مبرهنة ٧٠ : (A.S.A)
اذا كانت زاويتان وضلع مشترك بينهما في مثلث تطابق على التوالي زاويتين وضلع مشترك بينهما من مثلث اخر , فان المثلثين يتطابقان .
البرهان:
ليكن ABC, DEF مثلثين وفيهما :
$\angle ABC \cong \angle DEF$ و $\angle ACB \cong \angle DFE$ و $B-C \cong E-F$.
يجب ان نبرهن ان: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$
نفرض ان $D-E < A-B$, فانه توجد نقطة G بحيث ان A-G-B وان $B-G \cong D-E$ وبما ان $B-C \cong E-F$, و $\angle GBC \cong \angle DEF$, فانه من SAS , $\Delta GBC \cong \Delta DEF$.
لذا فان $\angle GCB \cong \angle DFE$, لكن $\angle DFE \cong \angle ACB$, فان $\angle GCB \cong \angle ACB$. لكن بما ان

A-G-B , فان $\angle GCB < \angle ACB$ تناقض مع Th62 .
وبنفس الطريقة , اذا كان $A-B < D-E$. لذلك فان $A-B \cong D-E$, ومن SAS , فان $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

تعريف:
اذا قطع مستقيمين بقاطع في نقطتين مختلفتين A, B . فالزوايا التي تكون القطعة A-B كجزء من ضلع , تدعى زوايا داخلية . تدعى الزوايا الاخرى خارجية .

الزاويتان اللتان يكون راسيهما النقطتين A,B وفي نفس الجهة من القاطع احداهما داخلية والاخرى خارجية تدعيان زاويتين متناظرتين .

زاويتان غير متجاورتان على جهتي القاطع المتعاكستين وكلا منهما داخلية تدعيان زاويتين داخليتين متبادليتين .

مبرهنة ٧٢:
اذا قطع مستقيمين بقاطع وكانت الزاويتان الداخليتان المتبادلتان متطابقتين , فان المستقيمين لايتقاطعان.
البرهان:
ليكن المستقيم k يقطع المستقيمان المختلفان l,m في النقطتين المختلفتين A,B على التوالي بحيث ان $\angle 1 \cong \angle 2$.
يجب ان نبرهن ان الخط l لايقطع الخط m .
نفرض العكس أي ان الخطين l,m يتقاطعان في نقطة ولتكن C .
نناقش القطعة A-C والنقطة B على المستقيم BC .
وحسب Ax11 : توجد نقطة G على الشعاع المعاكس للشعاع $\vec{BC}$ بحيث ان $A-C \cong G-B$.
أي انه توجد نقطة G بحيث ان
١- G-B-C
٢- $A-C \cong G-B$
والان نطابق المثلثين ABC,ABG
$A-B \cong A-B$ (حسب Ax12)
$A-C \cong G-B$ بالعمل
$\angle 1 \cong \angle 2$ بالفرض.
وحسب Th SAS : يتطابق المثلثين ومن التطابق ينتج ان $\angle 3 \cong \angle 4$ و $\angle 2, \angle 4$ تكافؤان زوج خطي وهما $\angle 1, \angle 3$.
وحسب تعريف ؟ $\angle 2, \angle 4$ متكاملتين,
ولكن $\angle 2, \angle 4$ يكونان زوجا خطيا.
اذن الشعاعين $\vec{AG}$ $\vec{AC}$, متعاكسين.
الان C-A-G + Ax6 : النقاط C,A,G مختلفة وعلى خط واحد.
والخطين m,CG يتقاطعان في نقطتين مختلفتين وهذا (تناقض مع Th2).
اذن الفرضية مرفوضة.
اذن الخط l لايقطع الخط m.

تعريف : الزاوية التي تكون مجاورة ومكملة لزاوية من مثلث تدعى زاوية خارجية للمثلث . زوايا المثلث غير المجاورة لزاوية خارجية تدعى زوايا داخلية مقابلة للزاوية الخارجية. زاوية خارجية لمثلث غير مجاورة لزاوية مثل $\angle A$ في المثلث تدعى زاوية خارجية مقابلة الى $\angle A$.

مبرهنة ٧٥: (مبرهنة الزوايا الخارجية)
أي زاوية داخلية لمثلث تكون اصغر من أي زاوية خارجية مقابلة لها.
البرهان:
ليكن ABC مثلثا , و D نقطة بحيث ان A-B-D , فان $\angle CBD$ تكون زاوية خارجية للمثلث ABC . يجب ان نبرهن ان $\angle BCA < \angle CBD$ و $\angle BAC < \angle CBD$.
اذا لم تكن $\angle BCA < \angle CBD$, فمن Th62 اما $\angle BCA \cong \angle CBD$ او $\angle CBD < \angle BCA$.

١- اذا كانت $\angle BCA \cong \angle CBD$, ولكن هذا يناقض Th72 .
٢- نفرض ان $\angle CBD < \angle BCA$: من تعريف ؟ يوجد شعاع CE في داخل $\angle BCA$ بحيث ان $\angle ECB \cong \angle CBD$ ومن Th 44 : يقطع الشعاع الضلع A-B في نقطة E . فيكون في المثلث $\angle BCE \cong \angle CBD$ وهذا تناقض مع ١-.
لذا فان $\angle BCA < \angle CBD$.
لتكن F نقطة بحيث ان C-B-F ومن نتيجة ٢ و Th58 , يكون $\angle ABF \cong \angle CBD$.
ومن البرهان اعلاه , يكون $\angle BAC < \angle ABF$, ومن Th 64 : يكون $\angle BAC < \angle CBD$.

مبرهنة ٧٦: (S.A.A)
اذا كانت زاويتان وضلع غير مشترك بينهما من مثلث تطابق على التوالي زاويتين وضلعا غير مشتركا من مثلث اخر , فان المثلثين يتطابقان.
البرهان:
ليكن ABC, DEF مثلثين , وفيهما:
$A-B \cong D-E$, $\angle B \cong \angle E$ و $\angle C \cong \angle F$. يجب ان نبرهن ان $\Delta ABC \cong \Delta DEF$
اذا كان $B-C \cong E-F$, فانه من ASA او SAS يتطابق المثلثين.
نفرض ان B-C لاتطابق E-F . من Th53 اما $B-C < E-F, E-F < B-C$.
نفرض ان $E-F < B-C$, فانه توجد نقطة H بحيث ان B-H-C و $E-F \cong B-H$.
من SAS , $\Delta ABH \cong \Delta DEF$. لذلك , $\angle BHA \cong \angle EFD$, لكن $\angle BCA = \angle HCA \cong \angle EFD$
وبذلك في المثلث AHC الزاوية الخارجية $\angle BHA$ تطابق الزاوية الداخلية المقابلة لها $\angle BCA$ وهذا خلاف Th75 .
نستنتج ان $B-C \cong E-F$ ومن SAS يتطابق المثلثين.