جامعة الانبار
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات
المادة: نظرية الاحتمالية /النظام الكورسات
الكورس الاول

عدد الاسابيع	المفردات	الموضوع	الوحدات
٤ أسابيع	نبذة تاريخية عن نظرية الاحتمال ،بديهيات الاحتمال، قاعدة جمع وضرب الاحتمالات. مفهوم الاحتمال، التعريف التقليدي للاحتمال، التعاريف الرياضية للاحتمال، التجربة العشوائية والحادثة وفضاء العينة، نظرية المجموعات مبدأ العد وطرق حسابه، التباديل والتوافيق معاملات ذي الحدين والمتعدد، اتحاد وتقاطع الحوادث، الحوادث المستقلة، بعض المفاهيم متعلقة بموضوع الاحتمال.	مقدمة في نظرية الاحتمال	الوحدة الأولى
٤ أسابيع	مفهوم المتغير العشوائي، أنواع المتغير العشوائي، المتغير العشوائي المنفصل(المتقطع)، المتغير العشوائي المستمر. دوال المتغيرات العشوائية، دالة كتلة الاحتمال، دالة كثافة الاحتمال. دالة التوزيع التراكمية. دالة التوزيع للمتغيرات العشوائية المتقطعة. دالة التوزيع للمتغيرات العشوائية المستمرة. دوال لمتغيرين عشوائيين او أكثر، التوزيع المشترك. دالة الكتلة الاحتمالية المشتركة، دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة.	المتغيرات العشوائية وتوزيعاتها .	الوحدة الثانية
٣ أسابيع	مفهوم الاحتمال الشرطي. الدالة التوزيعية الشرطية. قانون الاحتمال الكلي ،نظرية بيز. متراجحة كوشي - شوارتز، الاستقلال العشوائي الانحدار الارتباط	الاحتمال الشرطي	الوحدة الثالثة
٤ أسابيع	التوقع الرياضي للمتغير العشوائي، التوقع الرياضي للمتغيرات العشوائية المتقطعة، التوقع الرياضي للمتغيرات العشوائية المستمرة. خصائص التوقع الرياضي، الوسط الحسابي، الوسيط، المنوال، التباين، العزوم، الالتواء، التفلطح، التباين المشترك والارتباط. التوقع الشرطي، الوسط الحسابي للعينة. تطبيقات التوقع الرياضي. الدالة المولدة للعزوم وأنواعها.	التوقع الرياضي	الوحدة الرابعة

الكورس الثاني

الوحدات	الموضوع	المفردات	عدد الساعات
الوحدة الخامسة	بعض التوزيعات الاحتمالية (التوزيعات المتقطعة)	مفهوم التوزيع المنتظم المتقطع، الدالة التوزيعية، الوسط الحسابي والتباين، الدالة المولدة للعزوم حول نقطة الاصل. توزيع ثنائي الحدين السالب، الوسط الحسابي والتباين، الدالة المولدة للعزوم حول نقطة الاصل.	٧ أسابيع
		توزيع برنولي، الوسط الحسابي والتباين، الدالة المولدة للعزوم حول نقطة الاصل.	
		توزيع ثنائي الحدين، الوسط الحسابي والتباين، الدالة المولدة للعزوم حول نقطة الاصل.	
		التوزيع الهندسي الزائد، الوسط الحسابي والتباين، الدالة المولدة للعزوم حول نقطة الاصل.	
		توزيع بواسون، الوسط الحسابي والتباين، الدالة المولدة للعزوم حول نقطة الاصل.	
		التوزيع متعدد الحدود، الوسط الحسابي والتباين، الدالة المولدة للعزوم حول نقطة الاصل.	
الوحدة السادسة	بعض التوزيعات الاحتمالية (التوزيعات المستمرة)	مفهوم التوزيع المنتظم المستمر، الوسط الحسابي والتباين، الدالة المولدة للعزوم حول نقطة الاصل.	٧ أسابيع
		التوزيع الطبيعي، الوسط الحسابي والتباين، الدالة المولدة للعزوم حول نقطة الاصل.	
		التوزيع المعياري، الوسط الحسابي والتباين، الدالة المولدة للعزوم حول نقطة الاصل.	
		نظرية الغاية المركزية.	
		التوزيع الأسي، الوسط الحسابي والتباين، الدالة المولدة للعزوم حول نقطة الاصل.	
		توزيع كاما، الوسط الحسابي والتباين، الدالة المولدة للعزوم حول نقطة الاصل.	
		توزيع بيتا، الوسط الحسابي والتباين، الدالة المولدة للعزوم حول نقطة الاصل.	
		توزيع مربع كاي + توزيع t + توزيع F .	

المراجع والمصادر:

١- امير حنا هرمز، الاحصاء الرياضي، جامعة الموصل.
٢- مقدمة في الاحتمالات وتطبيقاتها، د. احمد زغلول، الجامعة الاردنية.

3- Larson, Introduction to Probability Theorem and Statistical Inference.
4- Hoel, Port and Stone, Introduction to Probability Theorem.
5- Ross, A First Course in Probability.
6- Kulkarni and Ghatpande, Introduction to discrete Probability and Probability Distribution.
7- De Groot, Probability and Statistics.
8- Hogg and Criage, Introduction the mathematical Statistics.
9- Kapur and Saxena, Mathematical Statistics.
10- Grinstead and Snell, Introduction to Probability.

محاضرات الإحتماليه ١

لطلبة كلية التربيه للعلوم الصرفه – قسم الرياضيات

المرحله الثالثه

ا.م.د.فراس شاكر محمود الغريري

العام الدراسي

٢٠١٥-٢٠١٦

الفصل الاول :المفاهيم الاساسية للاحتمالات

الاحتمالات هو من بين علوم الرياضيات العليا الذي يعتبره البعض على أنها الأكثر تعقيدا و "الأكثر علوا" !!، والحقيقة غير ذلك. إنها لا تعدو أن تكون بالنسبة لمن يريد حقا فهمها لعبة مسلية تتلخص في بضعة قواعد بديهية. ولا يضاهي بساطة الاحتمالات إلا تعدد استخداماتها وتواجدها في جميع الميادين، ما يفسر حتمية دراستها على جميع الشعب تقريبا. بالنسبة لعالم الرياضيات فإن فهم حساب الاحتمالات هو أداة يومية لمعالجة المشاكل المطروحة واتخاذ القرار. فقرارات رب البيت، تبنى في ٩٩ % من الحالات على معلومات غير مؤكدة.

مفهوم التجربة، الحدث والاحتمال Experiment , Event and Probability principle

الاحتمال و الحدث Event and probability

كثيرا ما يخلط الطلبة بين هذين المفهومين لارتباطهما ببعض. فالحدث العشوائي هو واقعة أو نتيجة ما، أما الاحتمال فهو عدد بين الصفر والواحد يعبر عن حظوظ وقوع الحدث (ليس شرطا أن يكون زمن وقوع الحدث هو المستقبل، فقد يكون الماضي أو الحاضر) وعندما نرغب في التعبير بشكل دقيق على مدى إمكانية وقوع حدث معين فإننا عادة نستعمل عبارات مثل: ١٠٠% للحدث المؤكد أو ٥٠% للحدث المحتمل و١٥% مثلا للحدث المستبعد، إذن نحن نستخدم الكسور في سلم تصاعدي من ٠ إلى١، بحيث يرمز ٠ للاستحالة و١ للتأكد.

مثال. احتمال الحصول على صورة عند رمي قطعة نقدية هو ٢/١، و احتمال الحصول على الوجه "٦" عند رمي حجر نرد هو ٦/١ .

التجربة Experiment

لشرح المفهوم المجرد للتجربة و تمييزها عن الحدث يمكن القول أن التجربة هي أم الحدث أو أم النتيجة. لأن التجربة تتفرع بالضرورة إلى أحداث. ففي المقولة السابقة، التجربة هي الحرب بينما الهزيمة هي نتيجة ممكنة للحرب.و التجربة قد تقبل نتيجتين أو أكثر.

ومفهوم التجربة في علم الاحتمالات مفهوم عام و مرن، فإذا كنا ندرس احتمال الحصول على الوجه ٦ عند رمي قطعة نرد تكون التجربة هي الرمي، و إذا كنا ندرس احتمال عدد معين من الوحدات التالفة لآلة ما يمكن اعتبار كل وحدة منتجة كتجربة، وإذا كنا ندرس احتمال عدد معين من الطلبة الراسبين في مقياس ما نعتبر كل طالب كتجربة... نقول احتمال حدث أو احتمال نتيجة ولا نقول إحتمال تجربة.

خصائص الإحتمال

عادة ما نعبر عن هذه الخصائص بالطريقة التالية:

- الاحتمال هو عدد موجب تماما أو معدوم (لا يكون سالبا).
- مجموع احتمالات أحداث تجربة ما يساوي الواحد.

الأركان الخمسة في حساب الاحتمالات

هناك خمس قواعد أساسية في حساب الاحتمال نذكرها الآن باقتضاب لإبراز أهميتها ونعود لشرحها فما بعد وسنحتاج إلى استخدام هذه القواعد في جميع فصول المقياس.

١. احتمال وقوع حدث يساوي ١مطروحا منه احتمال الحدث المعاكس. مجموع احتمال الحدث واحتمال الحدث المعاكس يساوي ١.

٢. احتمال وقوع حدثان "أ" و "ب" يساوي احتمال وقوع الأول مضروبا في احتمال وقوع الثاني لما يكون الأول قد وقع فعلا.

٣. احتمال وقوع حدثان مستقلان يساوي جداء الاحتمالين أي احتمال الحدث الأول مضروبا في احتمال الحدث الثاني.

٤. احتمال وقوع الحدث وعكسه يساوي الصفر، ونقول أن الحدثان متنافيان.

٥. احتمال وقوع حدث "ا" أو "ب" يساوي جمع احتمالي الحدثين مطروحا منه احتمال تحققهما معا.

القاعدة السادسة أو حساب الاحتمال حسب تعريف باسكال للاحتمال

عرف بليز باسكال (Blaise Pascal : 1623) الاحتمال بالشكل التالي:

"احتمال حدث هو عدد الحالات الملائمة لوقوع الحدث مقسوما على عدد الحالات الممكنة، إذا اقترضنا أن كل الحالات لها نفس الاحتمال في الوقوع."

مثال: ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي عند رمي قطعة نرد ؟ بين كل من التجربة، الحدث والاحتمال في هذا المثال.

الجواب: هناك ثلاث حالات ملائمة للحصول على عدد زوجي (٢، ٤ و٦). أما العدد الكلي للحالات الممكنة فهو ٦: (١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦). **وبافتراض أن كل الحالات الممكنة لها نفس الاحتمال** فإن احتمال الحصول على عدد زوجي هو $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

تنبيه: لا يمكن استخدام هذه العلاقة إذا لم تكن احتمالات الحالات متساوية،.

مثال٢. صندوق به ٧ كريات منها ٥ حمراء. نسحب ٣ كريات معا. ما هو احتمال أن تكون كلها حمراء؟ بين كل من التجربة والحدث في هذا المثال.

عدد الحالات الملائمة C_5^3 وعدد الحالات الممكنة: C_7^3. إذا الاحتمال هو $\frac{C_5^3}{C_7^3}=\frac{10}{35}$. التجربة هي السحب من الصندوق، الحدث أو النتيجة هي الحصول على ...

مثال٣. فوج مكون من ١٠ طلبة. نسحب بالقرعة اسم من العشرة. ما هو احتمال أن يكون الطالب أحمد؟ بين كل من التجربة والحدث.

نسحب (بدون إعادة) عينة من ٣ أسماء من العشرة. ما هو احتمال أن يكون منهم الطالب أحمد؟

الجواب: ١) احتمال الحدث الأول أو النتيجة الأولى هي $\frac{1}{10}$،

٢) عدد الطرق الممكنة للعينة: C_{10}^3، عدد الحالات الملائمة لكي يكون أحمد في العينة:

$$C_{10-1}^{3-1}=C_9^2 \qquad C_n^x=\frac{n!}{(n-x)!x!}\Rightarrow C_9^2=36$$

الاحتمال هو إذا: $\frac{C_9^2}{C_{10}^3}=\frac{36}{10(9)(8)/3}=\frac{36}{240}=\frac{3}{20}$

التجربة هي السحب، النتيجة أو الحدث هي أن يكون الطالب أحمد، ...

مثال ٤. يتنافس أحمد مع ٣ زملائه على أعلى نقطة في كل من الامتحانات الستة للسداسي. إذا كانت حظوظ الطلبة الأربعة متساوية، ما هو احتمال: أن يفوز أحمد بأعلى نقطة في كل من الامتحانات الستة؟ أن يفوز أحد الطلبة (أيا كان) بأعلى نقطة في الامتحانات الستة؟

الجواب:

١) هناك $6^4=4096$ حالة ممكنة لنتائج المنافسة، منها حالة فوز أحمد بجميع المقاييس؛ إذا الاحتمال هو **1/4096**.

2) هناك ٤ طلبة إذا هناك ٤ حالات لفوز أحد الطلبة بجميع المقاييس، إذا الاحتمال هو **4/4096** .

الخلاصة

الاحتمال هو عدد لا يزيد عن ١ و لا يقل عن ٠.

التجربة والحدث والاحتمال هي مفاهيم لا يجب الخلط بينها. التجربة يتولد عنها أحداث (نتائج أو حالات) مختلفة. التجربة مفهوم مرن يتطلب أحيانا نظرة ذكية وخيال. من المهم اكتساب هذه المهارة في تحديد ما هي التجربة أو التجارب في مسألة ما لأن ذلك هو المفتاح لفهم و حل المسألة.

هناك خمس قواعد في حساب الاحتمال هي الأركان الأساسية لعلم الاحتمالات. هذه القواعد متعلقة ب:

- احتمال الحدث المعاكس،

- باحتمال تحقق حدثين معا،
- باحتمال تحقق حدثين معا إذا كانا مستقلان،
- باحتمال تحقق أحد حدثين،
- و متعلقة باحتمال تحقق الحدث و عكسه معا.

التعبير الرياضي عن الاحتمالات

نعبر عن احتمال حدث ما بطريقة رياضية فنكتب $P(A)$ ونعبر عن احتمال وقوع الحدث : $X = x$ كما يلي: $P(X = x)$ أو $P(x)$.

مثال: احتمال الحدث: "الحصول على الوجه ٥" عند إلقاء حجر نرد يكتب: $P(X = 5) = 1/6$ ، أو باختصار: $P(5) = 1/6$ وأحيانا نختصر أكثر فنكتب: $P= 1/6$. تستخدم نظرية المجموعات للتعبير عن الأحداث العشوائي كالاتي:

١. نعبر عن النتائج الممكنة لتجربة ما ب Ω، وتسمى المجموعة الكلية أو فضاء العينة.

٢. نعبر عن الحدث بمجوعة جزئية A من فضاء العينة، حيث A هي مجموعة من النتائج الممكنة للتجربة.

٣. إذا انتهت التجربة بنتيجة تمثل عنصرا من A نقول أن الحدث A قد تحقق.

٤. الحدث الذي يحتوي على نقطة أو عنصر واحد من Ω يسمى عادة حدث بسيط.

مثال. تجربة هي إلقاء مكعب نرد. أكتب مجموعة فضاء العينة ثم عبر عمليا عن الأحداث التالية:

الحدث A: الحصول على العدد ٦ (حدث بسيط) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A= \{٦\}$

الحدث B: الحصول على عدد زوجي $B = \{2, 4, 6\}$

الحدث C: الحصول على عدد أولي $C = \{2, 3, 5\}$

الحدث D: الحصول على عدد فردي $D = \{1, 3, 5\}$

مثال ٢: لتكن لدينا تجربة هي رمي قطعتين نقديتين على التوالي: أكتب مجموعة فضاء العينة ثم عبر عن:

الحدث A : الحصول على مرتين كتابة (حدث بسيط) $\Omega =\{PP, PF, FP, FF\}$, $A = \{PP\}$

الحدث B : الحصول على كتابة مرة واحدة $B = \{FP, PF\}$

الحدث C : الحصول على كتابة في الرمية الأولى $C = \{PF, PP\}$

٥. من بين الأحداث الممكنة في تجربة ما أيا كانت، الحدث Φ يمثل الحدث المستحيل لأنه لا يمكن أن يتحقق عنصر منها. $P(\Phi) = 0$.

٦. من بين الأحداث الممكنة في تجربة ما أيا كانت، حدث المجموعة الأساسية Ω نفسها، وهو الحدث الأكيد لأنه لابد أن يتحقق أحد عناصرها على الأقل. $P(\Omega) = 1$

٧. بتطبيق عمليات مثل الإتحاد والتقاطع، الطرح، الجمع .... على المجموعات نحصل على مجموعات جديدة جزئية من Ω ومن ثم أحداث جديدة في Ω . من ذلك :

$A \cup B$ هو الحدث: إما A أو B أو كلاهما.

$A \cap B$ هو الحدث: A و B في وقت معا.

C_A هو الحدث المعاكس ل A.

$A - B$ هو الحدث: A لكن ليس B .

٨. إذا كان $A \cap B = \Phi$ نقول أنA وB متنافيان (أو غير متلائمان) أي لا يمكن وقوعهما معا (mutuellement exclusive).

مثال: نرمي قطعة نقدية مرتين: إذ كان A هو الحدث "مرتين كتابة" و B "صورة على الأقل".

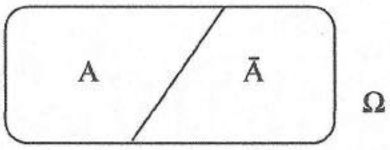
$A = \{PP\}$. $B = \{PF, FP, FF\}$ $\Phi = A \cap B$

التعبير الرياضي عن قواعد حساب الاحتمالات

الحدث المعاكس أو التعبير الرياضي عن القاعدة رقم ١. Event contraire

نعبر عن الحدث المعاكس ل A ب $\bar{A}$ أو A' واحتماله هو احتمال عدم تحقق الحدث A، ونكتب :

$$P(\bar{A}) + P(A) = 1 \iff P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$



مثال: نرمي قطعة نقدية ونرمز ب P للكتابة و F للصورة (الوجه). نلاحظ أن:

$$P(P) = P(F') = 1 - P(F) \iff P(P) + P(F) = 1$$

مثال ٢: عند رمي حجر نرد فإن احتمال الحصول على العدد ٥ هو: $P(5) = 1/6$ ، فما هو الحدث المعاكس في هذه الحالة وما احتماله؟

الحدث المعاكس هو الحصول على عدد غير ٥، واحتماله هو: $P(5') = 1 - P(5) = 1 - (1/6) = 5/6$.

مثال ٣: نرمي حجر نرد، ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي، ماهو الحدث المعاكس وما هو احتماله؟

$$P(\text{nombre pair}) = P(2 \text{ ou } 4 \text{ ou } 6) = 3/6$$

الحدث المعاكس هو الحصول على عدد غير زوجي، و احتماله:

$$P(\text{impair}) = 1 - P(\text{pair}) = 1 - (3/6) = 3/6.$$

احتمال وقوع الحدث "A" و "B" أيا كانت (قاعدة رقم ٢).

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B/A)$$

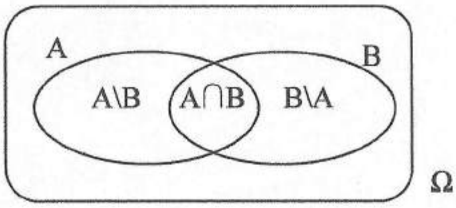
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B/A) * P(C/(A \cap B))$$

A, B, C أحداث ما (مستقلة أو لا، متنافية أو لا)، $P(B/A)$ يسمى الاحتمال الشرطي لB علما أن A محقق.

ومن المعادلة الأولى نحصل على:

$$P(B/A) = P(A \cap B) / P(A) \qquad \text{لما } P(A) > 0$$

حيث A تصبح فضاء المعاينة بما أن A محقق.



رسم 1 الحدث B/A غير الحدث B\A

مثال: ١) أحسب عند إلقاء حجر نرد احتمال الحصول على قيم أقل من ٤ (حدثB).

٢) أحسب احتمال الحصول على نتيجة أقل من ٤ إذا علمت أن الوجه المحصل لمكعب النرد عدد فردي (حدثA).

٣) أحسب احتمال الحصول على قيمة أكبر أو يساوي ٤ إذا علمت أن النتيجة عدد فردي.

$P(B) = P(1 \text{ or } 2 \text{ or } 3) = P(1) + P(2) + P(3) = 3/6$
$P(B/A) = P(B \cap A)/P(A)$
$P(B \cap A) = P(\text{impaire et} \leq ٤) = P(1 \text{ or } 3) = P(1) + P(3) = 1/6 + 1/6 = 2/6$
$P(B/A) = P(B \cap A)/P(A) = 2/6 \ / \ 3/6 = 2/3$

احتمال وقوع الحدث "A" و "B" لما "A" و "B" مستقلان (قاعدة رقم ٣).

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B) \qquad (P(B/A) = P(B))$$

وهو تعريف استقلال حدثين، أي أن وقوع B لا يتأثر بوقوع A أو عدم وقوعه نقول أن A وB مستقلان،

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B) * P(C) \qquad P(C/(A \cap B)) = P(C)$$

مثال: نرمي حجر نرد وقطعة نقدية معا. ما هو احتمال الحصول على الصورة والعدد ٦ ؟ (نتيجة مكعب النرد مستقلة عن نتيجة القطعة النقدية).

$P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0.5 * 1/6 = 1/12.$

مثال ٢. نلقي قطعة نقدية مرتين. أحسب احتمال الحصول على صورة في الرمية الأولى وفي الرمية الثانية.

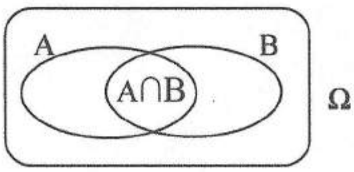
$P(FF) = P(A \cap B) = P(A)\ P(B) = 0.5 * 0.5 = 0.25$

مثال ٣. صندوق به ٥ كريات ٢ حمراء و٣ بيضاء. نسحب كرية نسجل لونها ثم نعيدها للصندوق ونكرر العملية ٣ مرات.

- أحسب احتمال الحصول على ٢ كريات حمراء، ٣ كريات حمراء (أحداث مستقلة).
- كيف يكون الاحتمال في حالة كون السحب بدون إرجاع الكرية (أحداث غير مستقلة)؟

$P(RR) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)\ P(R_2) = 2/5 * 2/5 = 8/25$
$P(RRR) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1)\ P(R_2)\ P(R_3) = 2/5 * 2/5 * 2/5 = 8/125$
$P(RR) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)\ P(R_2/R_1) = 2/5 * 1/4 = 2/20$
$P(RRR) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1)\ P(R_2/R_1)\ P(R_3/(R_1 \cap R_2)) = 2/5 * 1/4 * 0 = 0$

احتمال وقوع حدث "A" أو "B".



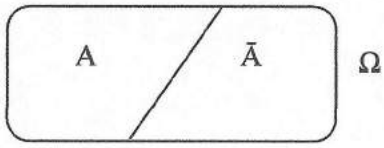
$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

احتمال وقوع حدث "A" أو "B" لما "A" أو "B" متنافيان.

لتكن الأحداث المتنافية A, B

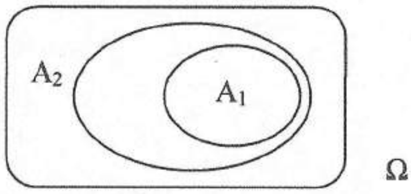
$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) \qquad (P(A\cap B) = 0)$$

$$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \qquad (P(A\cap B\cap C) = 0)$$

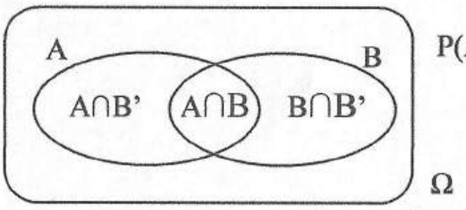


قواعد إضافية مهمة

- من أجل $A_1 \subset A_2$ فإن: $P(A_1) \le P(A_2)$ و $P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1)$

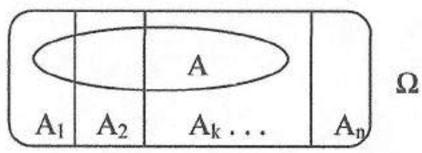


- من أجل A و B أحداث أيا كانت: $P(A\cap B) + P(A\cap B') = P(A)$



- إذا كان A هو نتيجة أحد أو بعض الأحداث المتنافية: $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots\ldots A_n$

$$P(A) = P(A\cap A_1) + P(A\cap A_2) + P(A\cap A_3) + \ldots\ldots + P(A\cap A_n)$$

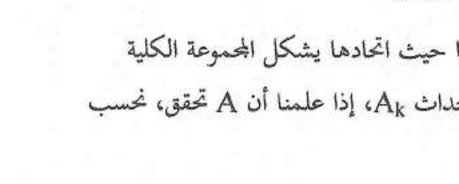


نظرية الاحتمال السببي أو نظرية بايز Théorème ou règle de BAYES

لتكن A_1، A_2، A_3، . . . A_k، . . . ،، A_n أحداث متنافية فيما بينها حيث اتحادها يشكل المجموعة الكلية (الأساسية) Ω، و A حدث ما يتحقق عن طريق واحد أو أكثر من الأحداث A_k، إذا علمنا أن A تحقق، نحسب احتمال تحققه عن طريق الحدث A_k كما يلي:

$$P(A_k / A) = \frac{P(A_k)P(A/A_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(A/A_k)} = \frac{P(A\cap A_k)}{P(A)}$$

تسمى هذه النظرية نظرية الاحتمال السببي لأنها تمكن من حساب احتمال أن يكون حدث ما (A_k) هو المسبب لوقوع حدث آخر (A).



رسم 2 رسم يوضح نظرية بايز

مثال: وظفت أمينة مكتب (A_1) بمكتب للمحاسبة حيث تولت طبع ٢٠ % من الفواتير. يشغل المكتب عاملتين أخريين إحداهما (A_2) تطبع ٣٠% من الفواتير والأخرى (A_3) ٥٠%. ترتكب الموظفة الجديدة أخطاء في ٥% من الفواتير، بينما نسبة الخطأ لدى الثانية (A_2) ٢% ولدى الثالثة (A_3) ١%.

أخذت فاتورة بشكل عشوائي فتبين أن بها أخطاء. استبعُدت الأولىٰ أن تكون هي من أنجزت الفاتورة بحجة أنها لا تنجز إلا ٢٠% من الفواتير، وردت عليها العاملات الأخريات بأن نسبة الأخطاء لديها هي الأكبر(٥%).

١. أحسب احتمال أن تكون الموظفة الجديدة (A_1) هي التي حررت الفاتورة وقارن مع احتمال أن يكون مصدر الخطأ هو A_2 أو A_3.

٢. أحسب مجموع الاحتمالات الثلاث.

٣. أحسب احتمال أن تكون فاتورة مختارة عشوائيا من مجموع المراسلات، أن تكون بها أخطاء.

$$P(A_1/A)=\frac{P(A_1)P(A/A_1)}{\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(A/A_k)}=\frac{0.2*0.05}{(0.2*0.05)+(0.3*0.02)+(0.5*0.01)}=0.238$$

$$P(A_2/A)=\frac{P(A_2)P(A/A_2)}{\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(A/A_k)}=\frac{0.3*0.02}{(0.2*0.05)+(0.3*0.02)+(0.5*0.01)}=0.2857$$

$$P(A_3/A)=\frac{P(A_3)P(A/A_3)}{\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(A/A_k)}=\frac{0.5*0.01}{(0.2*0.05)+(0.3*0.02)+(0.5*0.01)}=0.476$$

يظهر من الحساب أن الاحتمال الأكبر هو أن تكون A_3 هي التي حررت الفاتورة.

٢. مجموع الاحتمالات $P(A_1/A)+P(A_2/A)+P(A_3/A)=1$ لأنها تمثل احتمالات الأحداث المتنافية الثلاث.

٣. احتمال وجود خطأ في مراسلة ما:

$$P(A)=\sum P(A_k)P(A/A_k)=(0.2*0.005)+(0.3*0.02)+(0.5*0.01)=0.012$$

الخلاصة

باستخدام نظرية المجموعات كأساس للترميز في مجال الاحتمالات يمكن الحصول على صياغة أكثر دقة للمفاهيم المختلفة. بهذه الطريقة نستخدم:

رمز التقاطع ∩ بدلا عن عبارة "و" (et) مثال: احتمال "الوجه ٢ و ٥" في رميتي نرد: P("2" ∩ "5") = P(2) * P(5)

رمز الإتحاد U بدلا عن عبارة" أو" "ou" مثال: احتمال الوجه ٢ أو ٥ في رمية نرد P("5"U"2") = P(5) + P(2)

رمز المتمم C_A أو $\bar{A}$ بدلا عن عبارة "عكس A "؛ $P(\bar{A})=1-P(A)$

من خلال هذا الترميز يمكن أن نعبر بسهولة عن القواعد الخمسة الأساسية لحساب الاحتمالات.

- $P(A\cap B)=P(A)*P(B/A)$

=> $P(B/A)=P(A\cap B)/P(A)$ (بشرط $P(A)>0$)

- $P(A\cap B)=P(A)*P(B)$ عندما يكون الحدثان مستقلان

- $P(AUB)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

عندما يكون الحدثان متنافيان أي $(P(A\cap B) = 0)$:
- $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$

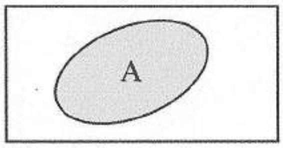
<u>مسألة</u>. نرمي قطعة نقدية مرتين، نسمي A "مرتين كتابة" و B "كتابة في المرة الأولى"، عبر عن الحدث:
A، B، $\bar{A}$، $A\cap B$، $A\cup B$، $A-B$، $B-A$.

$A = \{PP\}$, $B = \{PP, FP\}$, $\bar{A} = \{PF, FP, FF\}$,
$A\cap B = \{PP\}$, $A\cup B = \{PP, FP\}$, $A - B = \Phi$, $B - A = \{FP\}$

الملحق

التعبير الهندسي عن الاحتمالات

قبل الشروع في حل مسألة مركبة للاحتمالات يستحسن تحليلها باستعمال أشكال هندسية توضح عناصر المسألة (الأحداث) والعلاقات بينها. يستخدم لهذا الغرض شجرة الاحتمال (أنظر الملحق) ومخطط فين. تبين شجرة الاحتمال الأحداث المتنافية التي تنتج عن التجربة الواحدة أو المكررة وذلك من خلال أغصان تتفرع من أصل، أما مخطط فين فيستخدم لتمثيل الأحداث الفرعية دوائر داخل مستطيل يمثل التجربة.

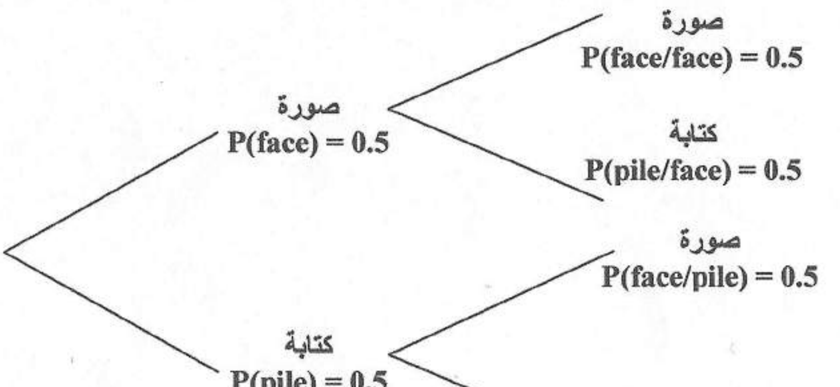


رسم1 مخطط فين

يراعى في رسم الشجرة أن يكون مجموع احتمالات كل تفريعة يساوي الواحد. التفريعة هي بمثابة شجرة فرعية تحتوي أحداث متنافية، لكونها تمثل النتائج المحتملة لتجربة جزئية.

مثال. نرمي قطعة نقدية مرتين. أحسب احتمال الحصول على مرتين صورة.

$P(face \cap face) = P(face) * P(face/face) = 0.5 * 0.5 = 0.25.$



$P(FF) = P(F)\ P(F/F)$

$P(FP) = P(F)\ P(P/F)$

$P(PF) = P(P)\ P(F/p)$

$P(PP) = P(P)\ P(P/P)$

مفهوم الحدث العشوائي

يجب الملاحظة أن كلمة حدث عشوائي لا تعني أن الحدث لا يخضع لأي قانون، بل المقصود أننا نتحدث عن حدث لا نعلم مسبقا ما إذا كان سيقع أو لا يقع. الهزيمة التي وقعت في الحرب وأي هزيمة كانت لها أسبابها وليست محض مصادفة عمياء. والحقيقة أن لا شيء في الطبيعة يقع بالمصادفة. فلا معنى لكلمة مصادفة إلا أننا لم نقصد وقوع الشيء. فعندما أقول التقيت بفلان صدفة، فهذا يعني أنني لم أقصد ولم أخطط لمقابلته. لكن هناك أسباب أدت إلى هذه الملاقاة منها أنني سلكت طريقا معينا ... كذلك إذا رمينا مكعب نرد ٦ مرات فإننا لا نعلم إذا كنا سنحصل على مرة واحدة الوجه (٥). لذلك قيمة P(X) (مثلا P(٥) = 1/6) هي قيمة نظرية، لكن إذا رمينا مكعب عدد كبير جدا من المرات (١٠٠٠ مرة مثلا) فنتوقع أن عدد مرات الحصول على الوجه (٥) سيكون قريبا جدا من العدد 1000/6. موضوع علم الاحتمالات هو البحث في قوانين الأحداث العشوائي، ولذلك أطلق عليه اسم "هندسة الحظ".

حساب عدد الحالات الممكنة أو الملائمة

بالإضافة إلى التوفيقات والترتيبات والأس، نحتاج أحيانا لحساب عدد الطرق الممكنة أو الملائمة إلى مفهوم surjection.

$$\text{surj}(n, k) = k\,[\text{surj}(n-1, k) + \text{surj}(n-1, k-1)] \quad , \quad (n, k > 0),$$

$$\text{Surj}(n, 1) = 1 , \text{Surj}(1, 1) = 1, \text{surj}(1, k > 1) = 0$$

مثلا: في المثال (٤) أحسب احتمال أن يفوز كل طالب على الأقل بمقياس واحد:

عدد الحالات الملائمة هو :

$$\text{Surj}(6, 4) = 4[\text{surj}(5, 4) + \text{surj}(5, 3)]$$

لحساب ذلك نحتاج إلى حساب سلسلة من القيم:

$\text{Surj}(5, 3) = 3[\text{surj}(4, 4) + \text{surj}(4, 2)]$, mais: $\text{Surj}(4, 2) = 2[\text{surj}(3, 2) + \text{surj}(3, 1)]$,
mais: $\text{Surj}(3, 2) = 2[\text{surj}(2, 2) + \text{surj}(2, 1)]$,
mais : $\text{Surj}(2, 2) = 2[\text{surj}(1, 2) + \text{surj}(1, 1)] = 2(0+1) = 2$
$\Rightarrow \text{Surj}(3, 2) = 2(2+1) = 6, \ldots$

n / k	2	3	4	5	6
2	2	0	0	0	0
3	6	6	0	0	0
4	14	36	24	0	0
5	30	150	240	120	0
6	62	540	**1560**	1800	720

الاحتمال هو إذا 1560/4096 .

Chapter One:

The mathematical theory of Probability was started by the French mathematicians Blaise Pascal (1623–1662) and Pierre Fermat (1601-1665) when they succeeded in deriving exact Probabilities for Certain gambling Problems involving dice.

Probability theory began in Seventeenth Century such early researchers as Huygens, Bernoulli and De Moivre in establishing a mathematical theory of probability. Today, Probability theory is established branch of mathematics that finds applications in every area from music to physics, weather prediction, and Predicting the risks of new medical treatments.

In this Notes, we shall study many different experiments from ~~probabilistic~~ point of view.

Definitions

Experiment: this term used in Probability theory to describe virtually any Process whose outcome is not known in advance with Certainty.

A probability experiment: is a chance process that leads to well-defined results called outcomes.

The Sample space: The Collection (set) of all possible outcomes of an experiment denote by the Capital Greek letter Ω.

Event: The subset of the sample space.

Normally, we shall denote outcomes by lower Case letters and events by Capital letters.

outcome: is the result of single trial of Probability experiment.

Example: A die is rolled once. We let X denote the outcome of this experiment. Then the sample space of this experiment is the 6-element set

Roll a dice $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Toss two Coins $= \{HH, TH, HT, TT\}$

The event $E = \{2, 4, 6\}$ Corresponds to the statement that the result of the roll is an even number. We assign a probability of $\frac{1}{6}$ to each six outcomes. i.e $P(i) = \frac{1}{6}$ for $1 \leq i \leq 6$.

$$P(E) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Set Theory:

In many Cases, events Can be described in terms of other events through the use of the standard Constructions of set Theory.

Let A and B be two sets. Then the union of A and B is the set:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}.$$

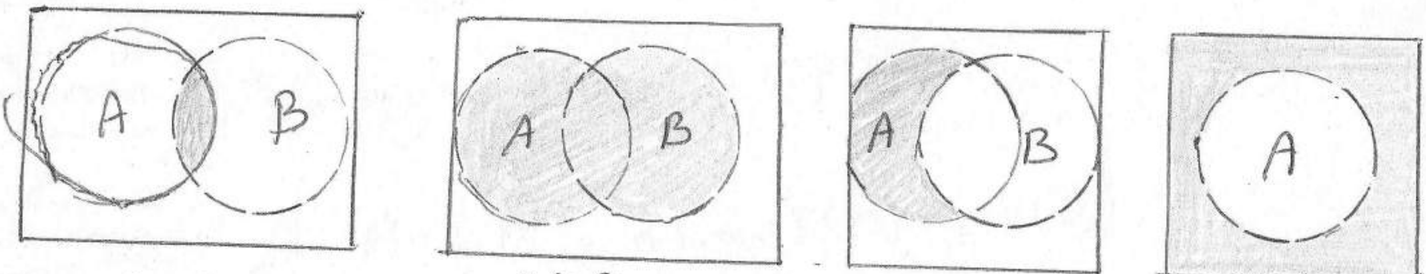
The intersection of A and B is the set

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}.$$

The difference of A and B is the set

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}$$

The set A is a subset of B, written $A \subset B$, if every element of A is also an element of B. Finally, the Complement of A is the set $\bar{A} = \tilde{A} = \{x \mid x \in \Omega \text{ and } x \notin A\}$.



$A \cap B$ $\quad$ $A \cup B$ $\quad$ $A - B$ $\quad$ $\tilde{A}$

Axioms and Basic Theorems of Probability

Axiom 1:- For any event A, $P(A) \geq 0$.

Axiom 2:- if an event is Certain to occur, then the Probability of that event is 1 (i.e. $P(\Omega)=1$).

Axiom 3:- For any infinite sequence of disjoint event $A_1, A_2, \ldots$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Theorem 1:- If an event is impossible (emptyset), then its Probability must be Zero. (i.e. $P(\emptyset)=0$).

Theorem 2: For any finite sequence of disjoint events $A_1, A_2, \ldots A_n$.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Theorem 3:- For any event A, $P(\tilde{A}) = 1 - P(A)$.

Theorem 4: For any event A, $0 \leq P(A) \leq 1$.

Theorem 5:- If $A \subset B$, then $P(A) \leq P(B)$.

Theorem 6:- For any two events A and B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
are not mutually exclusive

Empirical Probability

The different between Classical and empirical Probability, is that classical Probability assumes that Certian outcomes are equally likely (such as the out comes when a die is rolled) while Empirical Probability relies on actual experiments to determine the likelihood of out comes.

Given frequency distribution, the Probability of an event being in a given class is $P(E) = \dfrac{\text{Frequency for the class}}{\text{total Frequency in the distribution}} = \dfrac{f}{n}$

Example: 50 people, 21 had type O blood, 22 had type A blood, 5 had type B blood, and 2 had type AB blood. Set up frequency distribution and find the following Probabilities.

ⓐ A person has type O blood

ⓑ A person has type A or type B blood.

ⓒ A person has neither type A nor type O blood

ⓓ A person doesnot have type AB blood.

Type	Frequency
A	22
B	5
AB	2
O	21
Total	50

Solution:- ⓐ $P(O) = \dfrac{f}{n} = \dfrac{21}{50}$

ⓑ $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) = \dfrac{22}{50} + \dfrac{5}{50} = \dfrac{27}{50}$.

ⓒ $P(\text{neither } A \text{ nor } O) = P(\text{either } B \text{ or } AB) = \dfrac{5}{50} + \dfrac{2}{50} = \dfrac{7}{50}$

ⓓ $P(\text{not } AB) = 1 - P(AB) = 1 - \dfrac{2}{50} = \dfrac{48}{50} = \dfrac{24}{25}$

Theorem 7: For any three events A_1, A_2, and A_3,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - \Big[P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3)\Big] + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Theorem 8:- For any n events $A_1, \cdots A_n$,

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \sum_{i<j<k<t} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_t) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

Theorem 9:- if ~~two~~ events A and B are independent, then the events A^c and B^c are independent.

(a) $P(AB^c) = P(A) \cdot P(B^c)$.

(b) $P(A^cB) = P(A^c) \cdot P(B)$.

(c) $P(A^cB^c) = P(A^c) \cdot P(B^c)$.

Formula for Classical Probability

The Probability of any event E is $\dfrac{\text{number of outcomes in } E}{\text{Total number of outcomes in the sample space}}$

This Probability is denoted by $P[E] = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)}$

This probability is called classical Probability, and it uses the sample space Ω.

Example Consider two events A and B such that $P(A) = \frac{1}{3}$ and $P(B) = \frac{1}{2}$, Determine the value of $P(BA^c)$ for each of the following Conditions:

ⓐ A and B are disjoint (independent)

ⓑ $A \subset B$

ⓒ $P(AB) = \frac{1}{8}$.

Solution

$P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A^c) = \frac{2}{3}$, $P(B^c) = \frac{1}{2}$

ⓐ $P(BA^c) = P(B) \cdot P(A^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$.

ⓑ $B = A \cup (BA^c)$ Therefore, $P(B) = P(A) + P(BA^c)$

$\therefore P(BA^c) = P(B) - P(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

ⓒ $A \cup B = (AB^c) \cup (AB) \cup (A^cB)$

$P(A \cup B) = P(AB^c) + P(AB) + P(A^cB)$

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = P(AB^c) + P(AB) \\ P(B) = P(A^cB) + P(AB) \end{array}\right\} \Rightarrow P(BA^c) = P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Conditional Probability

Def:- if A and B are any two events such that $P(B) > 0$, then

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ is called the Conditional Probability function of A given B.

or such that $P(A) > 0$, then

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$ is called the conditional Probability function of B given A.

Example:. Two dice were rolled, the sum T of two numbers was odd. we shall determine the probability that T was less than 8.

Solution:. let A be the event that $T < 8$ and B the event that T is odd, then $A \cap B = \{3, 5, 7\}$ that T.

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = \frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Hence,
$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3}.$$

Conditional Probability for Independent Events

If two events A and B are independent, then $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Hence, if $P(B) > 0$, then

ⓐ $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$.

ⓑ $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$.

Theorem :- Suppose that $A_1, A_2, \cdots A_n$ are any events such that $P(A_1) > 0$, $P(A_1 \cap A_2) > 0, \cdots, P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$, Then

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n/(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}))$$

Bayes' Theorem :- Let the events $A_1, \cdots, A_K$ from a partition of the space Ω such that $P(A_j) > 0$ for $j = 1, \cdots, k$, and let B be any event such that $P(B) > 0$. Then:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{K} P(A_j) \cdot P(B/A_j)}$$

Chapter Two:
Random Variable and Cumulative Distribution Function.

Def:- Random variable

For agiven probability space $(\Omega, \mathcal{A}, P[\cdot])$, a random variable, denote by X or $X(\cdot)$, is a function with domian Ω and Counter domian the real line. The Function $X(\cdot)$ must be belonge the set $A_r = \{w \mid X(w) \leq r\}$ belongs to $\mathcal{A}$ for every real number r. In other words, in a particular experiment, a random variable X would be some function that assigns a real number $X(s)$ to each possible outcome $s \in \Omega$.

Example: Tossing a Coin. let the random variable X denote the number of heads. $\Omega = \{head, tail\}$, and $X(s) = 1$ if $s = head$, and $X(s) = 0$ if $s = tail$. In this experiment in which a Coin is tossed n-time $P[X=x] = \binom{n}{x} \frac{1}{2^n}$ for $x = 0, 1, 2, \ldots, n$.

The Distribution Function:- The distribution function F of a random variable X is a function defined for each real number x as follows: $F(x) = P[X \leq x]$ for $-\infty < x < \infty$ denoted by d.F. or c.d.f as (Cumulative distribution function)

Def: <u>Indicator function</u>:

let Ω be any space with points s and A any subset of Ω. The indicator function of A, denoted by $I_A(\cdot)$, is the function with domain Ω and counter domain equal to the set consisting of the two real number 0 and 1 defined by

$$I_A(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s \in A \\ 0 & \text{if } s \notin A \end{cases}$$

<u>Properties of Indicator function</u>

let Ω be any space and $\mathcal{A}$ any collection of subsets of Ω

① $I_A(s) = 1 - I_{\bar{A}}(s)$ for every $A \in \mathcal{A}$

② $I_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n}(s) = I_{A_1}(s) \cdot I_{A_2}(s) \cdots I_{A_n}(s)$. for $A_1, A_2, \dots A_n \in \mathcal{A}$.

③ $I_{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}(s) = \max\left(I_{A_1}(s), I_{A_2}(s), \dots, I_{A_n}(s)\right)$ $A_n \in \mathcal{A}$.

④ $I_A^2(s) = I_A(s)$ for every $A \in \mathcal{A}$.

<u>Example</u>: Consider again the experiment of tossing a coin. Let X denote the number of heads. Then,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{if } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{if } 1 \leq x \end{cases}$$

or $F_X(x) = \frac{1}{2} I_{[0,1)}(x) + I_{[1,\infty)}(x)$ in our indicator function notation.

Properties of a Cumulative Distribution Function $F_X(\cdot)$

① The $F_X(x)$ is a monotone, nondecreasing as x increases; i.e (if $x_1 < x_2$, then $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$) that is $F_X(a) \leq F_X(b)$ for $a < b$.

② $F_X(-\infty) = \lim_{X \to -\infty} F_X(x) = 0$, and $F_X(+\infty) = \lim_{X \to +\infty} F_X(X) = 1$

③ $F_X(\cdot)$ is Continuous from the right; that is

$$\lim_{0<h\to 0} F_X(x+h) = F_X(x)$$

<u>Theorem 1</u> For any given value x, $P(X>x) = 1 - F(x)$.

<u>Theorem 2</u>: For any given values x_1 and x_2, such that $x_1 < x_2$

$$P[x_1 < X \leq x_2] = F(x_2) - F(x_1)$$

<u>Theorem 3</u>: For any given value x, $P[X < x] = F(x^-)$

<u>Theorem 4</u>: For any given value x, $P[X = x] = F(x^+) - F(x^-)$

Density Functions

Def.: Discrete Random Variable.

A random variable X will be defined to discrete if the range of X is Countable. if a random variable X is discrete, then its corresponding Cumulative distribution function $F_X(x)$ will be defined to be discrete.

(i.e) if X is discrete with distinct values $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ then $\Omega = \bigcup_n \{s : X(s) = x_n\} = \bigcup_n \{X = x_n\}$ and $\{X = x_i\} \cap \{X = x_j\} = \emptyset$ for $i \neq j$, hence $1 = P(\Omega) = \sum P[X = x_n]$ by the Axiom 3 of Probability.

Def. Discrete density function (Probability mass function)

if X is a discrete r.v. with distinct value $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ then the function, denoted by $f_X(\cdot)$ and defined by

$$f_X(x) = \begin{cases} P[X = x_j] & \text{if } x = x_j \ , j = 1, 2, \dots, n, \dots \\ 0 & \text{if } x \neq x_j . \end{cases}$$

is defined to be the discrete density function of X or

" " " " " Probability mass function of X, if

satisfying two conditions ① $f(x) \geq 0$

② $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$.

Def:- Discrete density function:

Any function $f(\cdot)$ with domain the real line and counter domain $[0,1]$ is defined to be a discrete density function if for some countable set $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

① $f(x_j) > 0$ for $j = 1, 2, \dots$

② $f(x) = 0$ for $x \neq x_j$, $j = 1, 2, \dots$

③ $\sum_j f(x_j) = 1$, where the summation is over the points $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$.

Def:- Continuous Random variable:

A random variable X is called continuous random variable if there exists a function $f_X(\cdot)$ such that $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$ for every real number x. The cumulative distribution function $F_X(\cdot)$ of continuous r.v. X is called absolutely continuous.

Def:- if X is continuous r.v, the function $f_X(\cdot)$ in $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$ is called the probability density function of X.

Theorem Let X be a discrete random variable. $F_X(\cdot)$ can be obtained from $f_X(\cdot)$, and vice versa.

Theorem Let X be a Continuous r.v., Then $F_X(\cdot)$ can be obtained from an $f_X(\cdot)$, and vice versa.

For example, $P[a < X \leq b] = \int_a^b f_X(x)\,dx$ for $a < b$.

Def. Probability density function

Any function $f(\cdot)$ with domain the real line and Counterdomain $[0, \infty)$ is defined to be a Probability density function if and only if

① $f(x) \geq 0$ for all x

② $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

Theorem: if any point x at which the p.d.f is Continuous, the d.f. is differentiable and

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Ex:- Suppose that the p.d.f of a random variable X is as follows:

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-2x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(a) find the value of the constant c and sketch the p.d.f.

(b) Find the value of $P(1 < x < 2)$.

solution (a) $f(x)$ is p.d.f $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} ce^{-2x} dx = 1$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\infty} ce^{-2x} dx = c\left(\frac{-e^{-2x}}{2}\right)\Big|_0^{\infty} = \left(0 + \frac{1}{2}\right)c = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 2}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

(b) $P[1 < x < 2] = \int_1^2 2e^{-2x} dx = -e^{-2x}\Big|_1^2 = -e^{-4} + e^{-2}$

Ex:. Suppose that the d.f of a random variable X is as follows

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \le 0 \\ \frac{1}{9}x^2 & \text{for } 0 < x \le 3 \\ 1 & \text{for } x > 3 \end{cases}$$

Find and sketch the p.d.f of X.

sol. $\frac{dF(x)}{dx} = f(x) = \frac{d\begin{cases} 0 \\ \frac{1}{9}x^2 \\ 1 \end{cases}}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{for } x \le 0 \\ \frac{2}{9}x & \text{for } 0 < x \le 3 \\ 1 & \text{for } x > 3. \end{cases}$

Bivariate Distributions

Def.: The joint Probability distribution of two random variable is Called Bivariate distribution. The joint Probability function or the joint p.f. of X and Y is defined to be the function f such that for any Point (x, y) in the xy-plane,

$$f(x,y) = P[X=x, Y=y]$$

if X and Y are discrete random variables then

① $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega$.

② $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f(x_i, y_j) = 1$ then $f(x,y)$ is called joint p.m.f. of X and Y

if X and Y are Continuous r.v.s then

① $f(x,y) \geq 0$

② $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy\, dx = 1$ then $f(x,y)$ is called joint p.d.f of X and Y.

Example: The following table

$x \backslash Y$	1	2	3	4
1	0.1	0	0.1	0
2	0.3	0	0.1	0.2
3	0	0.2	0	0

is joint p.m.f of X and Y. find $P(X \geq 2 \text{ and } Y \geq 2)$, $P(X=1)$.

solution $P(X \geq 2, Y \geq 2) = f(2,2) + f(2,3) + f(2,4) + f(3,2) + f(3,3) + f(3,4) = 0.5$

$P(X=1) = \sum_{y=1}^{4} f(1,y) = 0.2$.

Bivariate Distribution functions

Def. The joint distribution function, or joint d.f. of two r.v.s X and Y is defined to be the function F such that for all values of x and y ($-\infty < x < \infty$ and $-\infty < y < \infty$)

$$F(x,y) = P[X \leq x \text{ and } Y \leq y] = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(r,s)\, dr\, ds.$$

where r and s are used simply as dummy variables of integration.

Theorem 1. The joint p.d.f can be derived from the joint d.f. by using the relation

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Example Suppose that X and Y are random variables that can only take values in the intervals $0 \leq X \leq 2$ and $0 \leq Y \leq 2$. Suppose also that the joint distribution function

$$F(x,y) = \frac{1}{18} xy(x+y).$$ Determine the probability density function of X & Y.

solution $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{9}(x+y)$ for $0<x<2$, $0<y<2$

Also, if $x<0$, $y<0$, $x>2$, or $y>2$, then

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = 0$$

Hence, the joint p.d.f. of X and Y is as follows!

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{9}(x+y) & \text{for } 0<x<2, \text{ and } 0<y<2, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Marginal Distribution

Def If the joint d.f. $F(x,y)$ of two random variables X and Y is known, then the d.f. F_1 of r.v. X can be derived from F. F_1 is called the marginal d.f. of X. Similarly, if the joint p.f. or joint probability density function f of X and Y is known, then the marginal p.f or marginal p.d.f. of each r.v. can be derived from f.

$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\} = F(x,\infty)$.

$F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} P\{X \le x, Y \le y\} = P\{Y \le y\} = F(\infty, y)$.

Def. if X and Y have a discrete joint distribution for which the joint Probability function is f, then the marginal Probability function f_1 of X can be found as follows:

$$f_1(x) = P[X=x] = \sum_y P[X=x \text{ and } Y=y] = \sum_y f(x,y).$$

Similarly, the marginal p.f f_2 of Y can be found as follows:

$$f_2(y) = P[Y=y] = \sum_x P[X=x \text{ and } Y=y] = \sum_x f(x,y)$$

Def: if X and Y have a continuous joint distribution for the joint Probability density function is f, then the marginal p.d.f f_1 of X as $f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$ for $-\infty < x < \infty$

Similarly, the marginal p.d.f f_2 of Y as $f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$ for $-\infty < y < \infty$

Example Suppose that the joint p.d.f of X and Y as follow

$$f(x,y) = \begin{cases} cx^2y & \text{for } x^2 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

① Find the value of constant c.

② Determine the value of $P(X \geq Y)$.

③ Determine first the marginal p.d.f f_1 of X and then the marginal p.d.f f_2 of Y.

Solution

① The set Ω of point (x,y) for which $f(x,y) \geq 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} c x^2 y \,dx\,dy = 1$$

$$\Rightarrow \frac{4}{21}c = 1 \Rightarrow c = \frac{21}{4}.$$

② $$P(X \geq Y) = \int_0^1\int_{x^2}^{x} \frac{21}{4} x^2 y \,dy\,dx = \frac{3}{20}.$$

③ $$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x,y)\right] dy = \int_{x^2}^{1} \frac{21}{4} x^2 y \,dy = \begin{cases} \frac{21}{8} x^2(1-x^4) & \text{for } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$f_1(x)$ is marginal p.d.f of X

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{21}{4} x^2 y \,dx = \begin{cases} \frac{7}{2} y^{5/2} & \text{for } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$f_2(y)$ is marginal p.d.f of Y.

Independent Random Variable.

<u>Def.-</u> if X and Y are two random variables independent then for any real numbers x and y, it must be true that

$$P(X \le x \text{ and } Y \le y) = P(X \le x) \cdot P(Y \le y).$$

<u>Def.</u> Two random variables X and Y are independent iff, for all real numbers x and y,

$$F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

and $$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

where f_1 is marginal p.d.f of X and f_2 is marginal p.f of Y.

<u>Example</u> Suppose that X and Y have a discrete joint distribution for which the joint p.f is defined as follows.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{30}(x+y) & \text{for } y=0,1,2 \text{ and } x=0,1,2,3. \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(a) Determine the marginal p.f's of X and Y.

(b) Are X and Y are independent.

Solution:

(a)

$f_1(x) = \sum_{y=0}^{3} \frac{1}{30}(x+y)$

$= \frac{1}{10}(x+1)$, for $x = 0,1,2$

$f_2(y) = \sum_{x=0}^{3} \frac{1}{30}(x+y)$

$= \frac{2y+3}{15}$, for $y = 0,1,2,3$

$Y=y_i$ \ $X=x_j$	0	1	2	3	marginal of Y $f_2(y)$
0	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{30}$
1	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{10}{30}$
2	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{14}{30}$
$f_1(x)$ marginal of X	$\frac{3}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{12}{30}$	1

(b) if X and Y are independent then $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \dots *$

it can be found from this table that Equation (*) is not satisfied for all values of i and j. Hence X and Y are not independent.

Example: Suppose that the joint p.d.f of X and Y has the following form:

$$f(x,y) = \begin{cases} Kx^2y^2 & \text{for } x^2+y^2 \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(a) Find the marginal of X, of Y and the constant K.

(b) Are X and Y are independent.

X and Y are not indep.

Solution: $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} Kx^2y^2\,dy\,dx = 1 \Rightarrow K = \frac{9}{4}$ $\quad x^2+y^2 \le 1$, $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$

$$f_1(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{9}{4}x^2y^2\,dy = \frac{3}{4}x^2\Big[y^3\Big]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{3x^4}{2}\sqrt{1-x^2} & \text{for } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$f_2(y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{9}{4}x^2y^2\,dx = \begin{cases} \frac{3}{2}y^2\sqrt{1-y^2} - \frac{3y^4}{2}\sqrt{1-y^2} & \text{for } -1 \le y \le 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Conditional Distribution

Def. if X and Y are jointly discrete r.v's with joint p.m.f. $f(x,y)$, the Conditional Probability mass function of X given $Y=y$, is denoted by $f_{X/Y}(x/y)$ or $f(x/y)$ and is defined for all y such that $f_2(y)>0$ by

$$f_{X/Y}(x/y) = f(X=x/Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} \quad , \quad f_2(y)>0$$

In the same way we defined the Conditional Probability mass function of Y, given $X=x$ which is denoted by $f(y/x)$ or $f_{Y/X}(y/x)$, and is defined for all x such that $f_1(x)>0$

by $$f_{Y/X}(y/x) = f\left(Y=y/X=x\right) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} \quad , \quad f_2(x)>0.$$

Def. if X and Y are jointly Countinuous r.v.'s with joint p.d.f of X and Y. $f(x,y)$, the Conditional Probability density function of X given $Y=y$, and of Y given $X=x$ is denoted by $f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$, for $-\infty<x<\infty$, and $f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$, for $-\infty<y<\infty$ such that $f_2(y)>0$, and $f_1(x)>0$ respectively.

Multivariate Distributions

Def.: The joint d.f of n-random variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ is defined to be the function F whose value at any ~~point~~ point $(x_1, \dots, x_n)$ in n-dimensional space R^n is specified by the relation

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_n \le x_n).$$

Def.: Discrete Distributions: if the random vector $(X_1, \dots, X_n)$ have a discrete joint ~~probability mass~~ ~~distribution~~ distribution function such that

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n]$$ and its p.m.f at any point $x \in R^n$ the relation $f(x) = P[X = x]$, and

for any subset $A \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \overset{F(x_1, \dots x_n)}{=} P[X \in A] = \sum_{x \in A} f(x)$.

Def. Countinuous Distribution

The n-random variables $X_1, \dots X_n$ have continuous joint ~~probability density~~ distribution function such that

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P((X_1, \dots, X_n) \in A) = \int \dots \int_A f(x_1, \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

The function $f(x_1, \dots x_n)$ is called j.p.d.f of $X_1, \dots, X_n$. and $f(x_1, \dots x_n)$ j.p.d.f can be derived from the j.d.f F by using the relation

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}.$$

Def:- The marginal p.d.f f_1 of X_1 is specified at any value x_1 by the relation

$$f_1(x_1) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-1} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_2 \cdots dx_n .$$

Def. The marginal ~~d~~ f, F_1 of X_1 is specified at

$$F_1(x_1) = P(X_1 \le x_1) = P(X_1 \le x_1, X_2 < \infty, \ldots, X_n < \infty)$$

$$= \lim_{\substack{x_j \to \infty \\ j=2,\ldots,n}} F(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Def. Independent Random variables.

The n random variable $X_1, \ldots, X_n$ are independent if for any n sets $A_1, A_2, \cdots A_n$ of real numbers,

$$F(X_1, \ldots, X_n) = P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \cdots X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdot P(X_2 \in A_2) \cdots P(X_n \in A_n)$$

in the same way $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$

Def. Conditional Distribution

Suppose that n r.v.'s $x_1, \ldots, X_n$ have Countinuous j.d.f and Countinuous j.p.d.f then the Conditional p.d.f of X_1 given that $X_2 = x_2, \ldots, x_n = x_n$ is defined as follows

$$g_1\left(\frac{x_1}{X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n}\right) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{f_1(x_2, \ldots, x_n)}$$

Moments of the Random Variables

Def.: Expectation of a Discrete r.v.

The expectation of a discrete r.v. X having a p.m.f $f(x)$ is denoted by $E(x)$, and is defined by

$$E(x) = \sum_i x_i f(x_i).$$

we refer to $E(x)$ as the mean value of x; it is the position of the Center of gravity. (مركز الثقل)

Example

Assume you get 4 I.D. if 1, 2 or 5 appears, and lose 2 I.D. if 3, 4 or 6 appears when a fair die is tossed once, then the total amount of money you get is

Answer $E(x) = \sum x_i f(x_i)$ where x_1, x_2 and x_5 are equal 4, x_3, x_4 and x_6 are equal -2, then

$$E(x) = 4\left(\tfrac{1}{6}\right) + 4\left(\tfrac{1}{6}\right) + (-2)\left(\tfrac{1}{6}\right) + (-2)\left(\tfrac{1}{6}\right) + 4\left(\tfrac{1}{6}\right) + (-2)\left(\tfrac{1}{6}\right) = 1 \text{ I.D.}$$

Def.: The expectation of a Continuous random variable with density function $f(x)$ is

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$ wherever this integration exists.

Example Suppose that X is a r.v. having p.d.f as

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} , & 0 < x < 2 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

find $E(Y)$ if $y = e^{x}$

then $x = \ln y$.

Solution $y = e^{x}$

$$h(y) = f(x) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right| , \quad \frac{dy}{dx} \neq 0 . \Rightarrow x = \ln y$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} , \quad y \neq 0$$

$$\therefore h(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y} \quad \text{for } 1 < y < e^{2} .$$

For $x = 0 , y = e^{0} = 1$ and $x = 2 , y = e^{2}$

Hence,
$$E(y) = \int_{1}^{e^{2}} y \cdot \frac{1}{2y} \, dy = \frac{e^{2} - 1}{2} .$$

Theorem: if X is a r.v. with p.f. $f(x)$, then for any real-valued function $y = g(x)$

$$E(y) = E(g(x)) = \sum_{x} g(x) f(x) \quad \text{if } x \text{ is discrete}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) \, dx \quad \text{if } x \text{ is countinuous.}$$

Theorem let X be a r.v. then for any Constants a and b we have $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Theorem let X be r.v. and for any Constant a and b, we have (i) $E(ag(x) + b) = aE(g(x)) + b$.

(b) $E(a) = a$ where $g(x)$ is any function of X.

Def. Variance and other Moments

The variance of r.v. X is denoted by $Var(x)$ or σ_x^2 and is defined by

$$var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

Def. (Raw moments)
The r-th moment about the origin is denoted by μ_r, if it exists it is defined by

$$\mu_r = E(X^r), \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

$$= \sum x^r f(x) \quad \text{if } X \text{ is discrete}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\, dx \quad \text{if } X \text{ is Countinuous.}$$

Def. The r-th Central moment about the mean μ, $\mu = E(x)$, is denoted by M_r, if it exists it is defined by

$$M_r = E(X - E(X))^2, \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

$$= \sum (X - \mu)^r f(x) \quad \text{if } x \text{ is discrete}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu)^r f(x)\, dx \quad \text{if } X \text{ is Countinuous}$$

if $r = 2$, then $M_2 = $ Variance

Def. The standard deviation of X is denoted by σ, and is defined as

$$\sigma = \sqrt{var(X)}$$

Example let X be a r.v. with p.m.f $f(x)$ given by

$X=x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	K	$2K$	$3K$	$2K$	K	$4K$	$3K$
	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$

(a) find the value of k.

(b) find $E(X)$ and $var(X)$

(c) let $Y = X^2$, find $E(Y)$ and $var(Y)$.

Solution

(a) $f(x)$ is p.m.f then $\sum_{x=-4}^{2} f(x)\,dx = 1$

$K+2K+3K+2K+K+4K+3K = 1 \Rightarrow 16K = 1 \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{16}}$

(b) $E(X) = \sum_{x=-4}^{2} x\,f(x) = (-4)\left(\frac{1}{16}\right) + (-3)\left(\frac{2}{16}\right) + (-2)\left(\frac{3}{16}\right)$

$+ (-1)\left(\frac{2}{16}\right) + (0)\left(\frac{1}{16}\right) + (1)\left(\frac{4}{16}\right) + (2)\left(\frac{3}{16}\right)$

$= -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}$

$E(X^2) = \sum_{x=-4}^{2} x^2 f(x) = (-4)^2\left(\frac{1}{16}\right) + (-3)^2\left(\frac{2}{16}\right) + (-2)^2\left(\frac{3}{16}\right) + (-1)^2\left(\frac{2}{16}\right)$

$+ (0)^2\left(\frac{1}{16}\right) + (1)^2\left(\frac{4}{16}\right) + (2)^2\left(\frac{3}{16}\right) = \frac{54}{16}$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{54}{16} - \frac{1}{4} = \frac{50}{16} = 3.125$

(c) $h(Y=0) = f(x=0) = \frac{1}{16}$

$h(y=1) = f(x=-1 \text{ or } X=1) = \frac{2}{16} + \frac{4}{16} = \frac{6}{16}$

$h(y=4) = f(X=-2 \text{ or } X=2) = \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{6}{16}$

$h(y=9) = f(X=-3) = \frac{2}{16}$

and $h(Y=16) = f(X=-4) = \frac{1}{16}$

Hence we can find the expectation of Y as follows:

$$E(y) = \sum_{y=0}^{16} y\,h(y) = 0\left(\frac{1}{16}\right) + (1)\left(\frac{6}{16}\right) + (4)\left(\frac{6}{16}\right) + (9)\left(\frac{2}{16}\right) + (16)\left(\frac{1}{16}\right)$$
$$= \frac{50}{16}$$

$$E(y^2) = \sum_{y=0}^{16} y^2 h(y) = (0)^2\left(\frac{1}{16}\right) + (1)^2\left(\frac{6}{16}\right) + (4)^2\left(\frac{6}{16}\right) + (9)^2\left(\frac{2}{16}\right) + (16)^2\left(\frac{1}{16}\right)$$
$$= \frac{520}{16}$$

$$Var(y) = E(y^2) - (E(y))^2 = \frac{520}{16} - \frac{2500}{256} = \frac{5820}{256} = 22.73$$

Theorem:- Let X be a r.v. and for any constants a and b, we have: ① $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

② $Var(a) = 0$

Expectation of a Function of two Random variable

Def.: If X and Y are jointly r.v.'s with p.f $f(x,y)$ then the expectation of X and Y is

$$E(h(x,y)) = \sum_x \sum_y h(x,y)\, f(x,y) \quad \text{if } x, y \text{ are discrete r.v.}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\, f(x,y)\, dy\, dx. \quad \text{if } x \text{ and } y \text{ are Countinuous r.v.'}$$

Theorem Let X and y be two r.v's and if E(X) and E(y) exist, then

① $E(x+y) = E(X) + E(y)$

② $E(XY) = E(X) \cdot E(y)$ if X and y are independent r.v's

③ $E(aX+by) = a E(X) + b E(y)$

④ $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \cancel{E}\left(\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

⑤ $E(X_1 X_2 X_3 \cdots X_n) = E\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \prod_{i=1}^{n} (E(X_i))$ if $X_1, \cdots X_n$ are indep.

⑥ $E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$.

⑦ $Cov(X,y) = E[(X - E(X))(Y - E(y))] = E(XY) - E(X)E(y)$ is called the Covariance function bestween X and y, if X and y are independent then $Cov(X,y) = 0$.

Def.- The correlation Coefficient of X and Y, is denoted by $\rho(x,y)$ and is defined by

$$\rho(x,y) = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{var(X)\, var(Y)}} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

where σ_x, σ_y are the standard deviations of X and Y; respectively. We have $-1 \leq \rho(x,y) \leq 1$.

Theorem:- Let X and Y be two r.v's then for any Constants a and b we have:

$$var(aX+bY) = a^2 var(X) + b^2 var(Y) + 2ab\, Cov(X,Y)$$

Def.- Conditional Expectation and Variance

For two discrete or Countinuous random variables X and Y with joint p.m.f or joint p.d.f $f(x,y)$, the Conditional expectation of X, given $Y=y$, is denoted by $E(X/_{Y=y})$, and is defined for all y such that $f_1(x)>0$ or $f_2(y)>0$ as

$$E(X/_{Y=y}) = \sum_x x\, f(x/_{y=y}) = \frac{\sum_x x\, f(x,y)}{f_2(y)} \quad \text{if } X,Y \text{ are discrete}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x/y) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x,y)}{f_2(y)} \quad \text{if } X,Y \text{ are Continuous r.v.}$$

$$E(X^2/_{Y=y}) = \sum_x\!\!\!\!\int\, x^2 f(x/y) = \frac{\sum\!\!\!\!\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,y)}{f_2(y)},$$

Def: ① The conditional expectation of y given X is

$$E(Y/X=x) = \sum_y \!\!\!\!\int y\, f(y/x)\,dy = \frac{\sum_y y\, f(x,y)}{f_1(x)}$$

$$E(Y^2/X=x) = \sum_y \!\!\!\!\int y^2 f(y/x)\,dy = \frac{\sum_y y^2 f(x,y)}{f_1(x)}$$

② The conditional variance of X, given $Y=y$ is

$$E(X^2/Y=y) = \frac{\sum_x \!\!\!\!\int x^2 f(x,y)}{f_2(y)} \quad \text{then}$$

$$var(X/Y=y) = E(X^2/Y=y) - \left[E(X/Y=y)\right]^2$$

and ~~the~~ conditional variance of Y, given $X=x$ is

$$var(Y/X=x) = E(Y^2/X=x) - \left(E\left[Y/X=x\right]\right)^2$$

$$= \frac{\sum_y y^2 f(x,y)}{f_1(x)} - \left[\frac{\sum_y y\, f(x,y)}{f_1(x)}\right]^2 \quad \text{if } x \text{ is discrete r.v.}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x,y)\,dy}{f_1(x)} - \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} y\, f(x,y)\,dy}{f_1(x)}\right]^2 \quad \text{if } x \text{ is Continuous r.v.}$$

Skewness and Kurtosis Coefficients.

Def:- (skewness)

The Skewness of X is the third moment of the ~~the~~ Standard score of X (the lack of symmetry) and define as follows:

$$Skew(X) = \gamma_1 = E\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right) = \sqrt{B_1}$$

where $B_1 = \dfrac{M_3^2}{M_2^3} = \dfrac{(\text{Third Central moments})^2}{(\text{variance})^3}$

The distribution of X is said to be

(a) $\gamma_1 < 0$ negatively skewed
(b) $\gamma_1 > 0$ Positively skewed
(c) $\gamma_1 = 0$ unskewed. (symmetric)

Def. (kurtosis)

The Kurtosis of X is the fourth moment of the standard score (the degree to which the distribution is Peaked) and defined as follows: $Kurt(X) = \gamma_2 = E\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right) = 3 - B_2$

where $B_2 = \dfrac{M_4}{M_2^2} = \dfrac{\text{fourth Central moment}}{(\text{variance})^2}$, The distribution of X is said to be

(a) $\gamma_2 < 0$ ~~Peptkurtosis~~ Playt Kurtis (Peakedness)
(b) $\gamma_2 > 0$ ~~Playt Kurtosis~~ lept Kurtion (flatness)
(c) $\gamma_2 = 0$ un Kurtosis

Moment Generating Function

Def: The moment generating function (m.g.f) of the r.v. X is denoted by $M_X(t)$, and if it exists, is defined as

$$M_X(t) = E(e^{tX}), \quad -h<t<h \quad \text{real parameter.}$$

$$= \sum_x e^{tx} f(x) \quad , \text{ when } X \text{ is discrete r.v.}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx \quad , \text{ when } X \text{ is Continuous r.v.}$$

Example. Given a p.m.f $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{15} & \text{for } x=1,2,3,4,5 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$

Find $M_X(t)$.

Solution:
$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=1}^{5} e^{tx} f(x) = \sum_{x=1}^{5} \frac{x}{15} e^{tx} = \frac{1}{15}\sum_{x=1}^{5} x e^{tx}$$

$$= \frac{1}{15}\left[e^{t} + 2e^{2t} + 3e^{3t} + 4e^{4t} + 5e^{5t}\right] \quad \text{for } -\infty<t<\infty$$

Example. Given a p.d.f $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{for } x>0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$ find $M_X(t)$.

Solution:
$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx-x}\,dx = \int_0^{\infty} e^{-(1-t)x}\,dx = -\frac{1}{(1-t)} e^{-(1-t)x}\Big|_0^{\infty}$$

$$M_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-t} & \text{for } t<1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Theorem: let X be a r.v. have a m.g.f $M_X(t)$, then

$$\left.\frac{d^k M_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = M_X^{(k)}(0) = E(X^k) = \mu_r \cdot \text{ for } k=1,2,\cdots$$

Example: Given $M_X(t) = \frac{1}{1-2t}$, $t<\frac{1}{2}$ find $E(X)$ and $V(X)$

Solution: $M_X(t) = (1-2t)^{-1}$, $t<\frac{1}{2}$

$M_X'(t) = -(1-2t)^{-2} \cdot (-2) = 2(1-2t)^{-2}$

$E(X) = M_X'(0) = 2$

$E(X^2) = M_X''(0) = 8(1-2t)^{-3}\Big|_{t=0} = 8$

$Var(x) = E(x^2) - (E(X))^2 = M_X''(t=0) - (M_X'(t=0))^2 = 4 \geq 0$.

Theorem: let X be a r.v. have m.g.f $M_X(t)$, if $Y = aX+b$

$a, b \in \mathbb{R}$, then $M_Y(t) = e^{bt} \cdot M_X(at)$

Theorem: For any Constants a, and b, the m.g.f of $Y = \frac{x+a}{b}$

is given by $M_Y(t) = e^{\frac{a}{b}t} \cdot M_X\left(\frac{t}{b}\right)$

Theorem: let X and Y be two independent r.v.'s with the m.g.f.'s $M_X(t)$ and $M_Y(t)$ respectively, Then, the m.g.f of $Z = X+Y$ is given by $M_Z(t) = M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$

In General, if $Z = X_1 + \cdots + X_n$, then the m.g.f of Z is

$$M_Z(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$. where $M_{X_i}(t)$ is m.g.f of X_i, $i=1,2,\cdots,n$

The bounded of Probability (Some Moment Inequalities)

1. Markov's Inequality

if X is a r.v. that takes only nonnegative values, then for any constant $a>0$. $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

Proof. ⓐ if X is c.r.v. with p.d.f $f(x)$

$\because P(X \geq 0) = 1 \Rightarrow \int_0^\infty f(x)\,dx = 1$

$$E(x) = \int_0^\infty x f(x)\,dx = \int_0^a x f(x)\,dx + \int_a^\infty x f(x)\,dx \geq \int_a^\infty x f(x)\,dx \quad \text{because} \int_0^a x f(x)\,dx \geq 0$$

$$\geq a \int_a^\infty f(x)\,dx \qquad (x \geq t)$$

$$\geq a \cdot P(X \geq a)$$

Hence $P(X \geq a) \leq \frac{E(x)}{a}$

ⓑ if X is d.r.v. with p.m.f $f(x)$ by the same method.

2. Chebyshev Inequality

let x be a r.v. ~~where~~ with a finite mean μ and variance σ^2 then for any $t>0$, we have

$$P\{|X-\mu| \geq t\} \leq \frac{Var(x)}{t^2} \quad , t>0$$

or

$$P\{|X-\mu| < t\} \geq 1 - \frac{Var(X)}{t^2} \quad , t>0.$$

Note that ① $\frac{Var(X)}{t^2}$ is called the upper bound (u.b) of $P(|X-\mu| \geq t)$

② $1 - \frac{Var(x)}{t^2}$ is called the lower bound (L.b) of $P(|X-\mu| < t)$

Example Given a p.d.f $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{9} & \text{for } 0<x<3 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$

(a) find the lower bound of $P(\frac{5}{4}<x<\frac{11}{4})$

(b) find the value $P(\frac{5}{4}<x<\frac{11}{4})$

Solution (a) $l.b. = 1-\frac{var(x)}{t^2} \Rightarrow E(X)=2,\ E(X^2)=4.5,\ var(X)=\frac{1}{2}$

$P(\frac{5}{4}<X<\frac{11}{4}) = P(\frac{5}{4}-2<X-2<\frac{11}{4}-2) = P(|X-2|<\frac{3}{4})$

$t=\frac{3}{4}$, mean $=2$, $var(X)=\frac{1}{2}$

$\therefore l.b. = 1-\frac{1/2}{(3/4)^2} = \frac{1}{9}$.

(b) $P(\frac{5}{4}<x<\frac{11}{4}) = \int_{5/4}^{11/4} \frac{2x}{9}\,dx = \frac{x^2}{9}\Big|_{5/4}^{11/4} = \frac{6}{9}$.

Characteristic Function :(c.f.)

Def: if the Series $\sum e^{tx}f(x)$ or $\int e^{tx}f(x)\,dx$ does not Converge absolutely, the the m-g-f does not exist. In this Case a more useful function than the m.g.f is the characteristic function which is defined as

$$\phi_X(t) = E(e^{itx})$$

$$= \sum_x e^{itx}f(x), \text{ if } X \text{ is d.r.v.}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}f(x)\,dx, \text{ if } X \text{ is c.r.v.}$$

where $i=\sqrt{-1}$ and t is any real number

Note that $M_X(it) = \phi_X(t)$

Theorem

① $$\left.\frac{d^r \phi_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0} = i^r E(X^r), \quad r=1,2,\cdots$$

therefore $$E(X^r) = \frac{1}{i^r} \left.\frac{d^r \phi_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0}$$

② The characteristic function of $Y = cX$, where c is constant is given by

$$\phi_Y(t) = \phi_X(ct)$$

③ The c.f. of $Z = aX+b$ where a, and b are const. is given by $\phi_Z(t) = e^{itb}\,\phi_X(at)$.

④ The c.f of $Z = X+Y$ where X and Y are indep. r.v. is given by

$$\phi_Z(t) = \phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t).$$

⑤ if $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ then the c.f of Z is given by

$$\phi_Z(t) = \phi_{X_1}(t) \cdot \phi_{X_2}(t) \cdots \phi_{X_n}(t).$$

Mean of random variable:

The Formula for Computing the sample mean is $\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$, where $\sum X$ stands for the Sum of the Scores and N is the number of Scores.

Median of Distribution of r.v: To estimate the median, arrange the scores in order rank, if N is an odd number, the middle position is median, if N is even, the avarge of two scores in the middle position is roughly the median.

Def.: A median of the distribution of X is defined to be a Point m such that $P(X \le m) \ge \frac{1}{2}$ and $P(X \ge m) \ge \frac{1}{2}$

or satisfing the two following inqualities:

$$P(X < m) < \frac{1}{2} \quad \& \quad P(X \le m) \ge \frac{1}{2}.$$

Example Given a p.m.f $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{15} & \text{for } x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$

Find the median of X.

solution:- $P(X \le m) \ge \frac{1}{2}$ & $P(X \ge m) \ge \frac{1}{2}$

or $P(X < m) \frac{1}{2}$ & $P(X \le m) \ge \frac{1}{2}$

Suppose that $m = 1$

$P(X \le 1) = \frac{1}{15} \ngeq \frac{1}{2}$ & $P(X \ge 1) \ge \frac{1}{2}$

Suppose that $m = 2$

$P(X \le 2) = \frac{3}{15} \ngeq \frac{1}{2}$ & $P(X \ge 2) \ge \frac{1}{2}$

Suppose that $m = 3$

$P(X \le 3) = \frac{6}{15} \ngeq \frac{1}{2}$ & $P(X \ge 3) \ge \frac{1}{2}$

Suppose that $m = 4$

$P(X \le 4) = \frac{10}{15} \ge \frac{1}{2}$ & $P(X \ge 4) \ge \frac{1}{2}$ $\quad \therefore m = 4$

$\therefore$ median is 4.

Mode of Distribution

Def. Mode is a value of r.v. x that maximize $f(x)$.

(i.e) if $x_1 = $ mode $\Longrightarrow$ then $f(x_1)$ is a Max.

$f(x_1)$ is Max $\Leftrightarrow$ $f''(x_1) < 0$.

Example Given a p.d.f. $f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & \text{for } 0<x<1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$

find the mode of X?

Solution $0 < \text{mode} < 1$

$f(x) = 12x^2(1-x) = 12x^2 - 12x^3$

$f'(x) = 24\cancel{x} - 36x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \therefore 12x(2-3x) = 0$

either $x = 0$
or $x = \frac{2}{3}$

$f''(x) = 24 - 72x \Rightarrow f''(0) = 24 > 0 \Rightarrow f(0)$ is min.

$f''(\frac{2}{3}) = -24 < 0 \Rightarrow f(\frac{2}{3})$ is max

$\therefore X_1 = \frac{2}{3} = $ mode.

we can calculate the Karl Pearson's Coefficient of skewness by using the Median and the mode as follows:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_x - \mu_o}{\sigma_x}$$

where μ_x is mean
μ_o is mode
σ_x is standard Diviation

and
$$\gamma_1 = \frac{3(\mu_x - \mu_e)}{\sigma_x}$$

where μ_e is median.

Def.: Percentile

It is a value of x say (x_0) such that $P(X \leq x_0) = \frac{t}{100}$

$0 < t < \infty$

denoted by P_t, $0 < t < 100$

i.e. $P_t = x_0$

Example: Given a p.d.f. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , \text{ for } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$

Find P_{40}, P_{65}

Solution: let $P_{40} = x_0$, $t = 40$

$P(X \leq x_0) = \frac{t}{100}$, $P(x \leq x_0) = \frac{40}{100} = 0.4$

$$\int_0^{x_0} \frac{x}{2} \, dx = 0.4$$

$$\left. \frac{x^2}{4} \right|_0^{x_0} = 0.4 \Rightarrow x_0^2 - 1.6 = 0 \Rightarrow x_0 = \sqrt{1.6} = 1.26$$