الفصل الثامن والعشرون

المعادلات التفاضلية الجزئية

المعادلات التفاضلية الجزئية :

هى تلك المعادلات التى تحوى مشتقا جزئيا واحدا أو أكثر ، فهى لذلك ينبغى أن تتضمن متغيرين مستقلين اثنين على الأقل . ورتبة المعادلة التفاضلية الجزئية هى رتبة المشتقة الأعلى رتبة فى هذه المعادلة . فالمعادلة التالية ، على سبيل المثال ، حيث z هو المتغير التابع و x و y المتغيران المستقلان :

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z \quad (١) \qquad \text{أو} \quad (١') \quad xp + yq = z$$

هى من الرتبة الأولى . أما المعادلة .

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (٢) \qquad \text{أو} \quad (٢') \quad r + 3s + t = 0$$

فهى من الرتبة الثانية ، علما بأننا استخدمنا فى (١') و (٢') الرموز الاصطلاحية .

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

ويمكن الحصول على المعادلات التفاضلية الجزئية من حذف الثوابت الاختيارية من علاقات مفروضة بين المتغيرات أو من حذف دوال اختيارية لهذه المتغيرات . كما أنه يمكن أن تنشأ هذه المعادلات فى المسائل الهندسية والفيزيائية .

الاشتقاق

حذف الثوابت الاختيارية :

لنفرض z دالة فى المتغيرين المستقلين x و y ومعرفة بالعلاقة :

$$g(x, y, z, a, b) = 0 \qquad (٣)$$

حيث a و b ثابتان اختياريان . باشتقاق (٣) جزئيا بالنسبة لـ x ثم بالنسبة لـ y نحصل على

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} + p\frac{\partial g}{\partial z} = 0 \qquad (٤)$$

و

$$\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} + q\frac{\partial g}{\partial z} = 0 \qquad (٥)$$

حيث يمكن بوجه عام حذف الثابتين الاختياريين من (٣) و (٤) و (٥) فنحصل على معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولى .

$$\boxed{f(x, y, z, p, q) = 0} \qquad (٦)$$

مثال ١ :

احذف الثابتين الاختياريين a و b من $\boxed{z = ax^2 + by^2 + ab}$ تمارين ٨

نشتق جزئيا بالنسبة لـ x ثم بالنسبة لـ y فنجـــد :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q = 2by \quad و \quad \frac{\partial z}{\partial x} = p = 2ax$$

وبحساب a و b من هاتين المعادلتين والتعويض فى العلاقة المفروضة نجـد :

$$pq + 2px^2y + 2qxy^2 = 4xyz \quad أو \quad z = (\tfrac{1}{2}\tfrac{p}{x})x^2 + (\tfrac{1}{2}\tfrac{q}{y})y^2 + (\tfrac{1}{2}\tfrac{p}{x})(\tfrac{1}{2}\tfrac{q}{y}) \quad (١٣)$$

وهى معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولى

إذا كانت z دالة فى x و y ومعرفة بعلاقة تحوى ثابتا اختياريا واحدا فإنه من الممكن عادة الحصول على معادلتين تفاضليتين جزئيتين مختلفتين من الرتبة الأول نتيجة لحذف الثابت .

مثال ٢ :

احذف a من $z=a(x+y)$

بالاشتقاق بالنسبة لـ x نحصل على $p=a$ وعلى المعادلة التفاضلية الجزئية $z=p(x+y)$

أما إذا اشتققنا بالنسبة لـ y فإننا نحصل على $q=a$ وعلى المعادلة $z=q(x+y)$. إذا كان عدد الثوابت الاختيارية المطلوب حذفها يزيد عن عدد المتغيرات المستقلة فإن رتبة المعادلة (أو المعادلات) التفاضلية الجزئية الناتجة أعلى من الرتبة الأولى .

مثال ٣ :

احذف a و b و c من $z = ax + by + cxy$

بالاشتقاق بالنسبة لـ x و y نجـد :

$$q = b + cx \quad (ii) \qquad p = a + cy \quad (i)$$

ولكن هاتين المعادلتين بالإضافة إلى المعادلة المفروضة غير كافية لحذف الثوابت .

لذلك نشتق (i) جزئيا بالنسبة لـ x فنجـد $\frac{\partial}{\partial x}p = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r = 0$

وهى معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية وإذا اشتققنا (ii) جزئيا بالنسبة لـ y فإننا نجـد

$$\frac{\partial}{\partial y}q = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t = 0$$

وهى من الرتبة الثانية . أما إذا اشتققنا (i) جزئيا بالنسبة لـ y أو (ii) بالنسبة لـ x فإننا نحصل على

$$\frac{\partial}{\partial y}p = \frac{\partial}{\partial x}q = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = s = c$$

وبالعوده إلى (i) نجـد $p=a+sy$ ومنه $a = p - sy$ وإلى (ii) نجـد $b = q - sx$ وبالتعويض عن a و b و c فى العلاقة المفروضة نجـد :

$$z = (p - sy)x + (q - sx)y + sxy = px + qy - sxy$$

وهى من الرتبة الثانية

وهكذا نكون قد حصلنا على ثلاث معادلات تفاضلية جزئية $r = 0,\ t = 0,\ z = px + qy - sxy$ من نفس الرتبة (وهى أصغر رتبة) للعلاقه المفروضة .

أنظر المسائل ١ - ٤

حذف الدوال الاختيارية :

ليكن $u=u(x, y, z)$ و $v = v(x, y, z)$ دالتين مستقلتين فى المتغيرات x, y, z :

ولتكن

$$\phi(u, v) = 0 \qquad (٧)$$

أية علاقة اختيارية بينهما . فإذا اعتبرنا z متغيرا غير مستقل واشتققنا بالنسبة لـ x و y جزئيا نجد :

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0 \qquad (٨)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0 \qquad (٩)$$

وبحذف $\frac{\partial\phi}{\partial u}$ و $\frac{\partial\phi}{\partial v}$ من (٨) و (٩) ينتج :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + p\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right) + q\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$$

وإذا كتبنا

$$\lambda P = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \lambda Q = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \lambda R = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

فإن المعادلة الأخيرة تأخذ الشكل :

$$Pp + Qq = R$$

وهى معادلة تفاضلية جزئية خطية فى p و q وخالية من الدالة الاختيارية .

مثال ٤ :

أوجد المعادلة التفاضلية التى تنشأ عن $\phi(z/x^3, y/x) = 0$ حيث ϕ دالة اختيارية للمتغيرات .

لنكتب العلاقة الدالية المفروضة بالشكل $\phi(u, v) = 0$ حيث $u = z/x^3$ و $v = y/x$ ثم نشتق جزئيا بالنسبة لـ x و y فنجد :

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{p}{x^3} - \frac{3z}{x^4}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial v}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = 0, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{q}{x^3}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

وبحذف $\frac{\partial\phi}{\partial u}$ و $\frac{\partial\phi}{\partial v}$ ينتج

$$\begin{vmatrix} p/x^3 - 3z/x^4 & -y/x^2 \\ q/x^3 & 1/x \end{vmatrix} = p/x^4 - 3z/x^5 + qy/x^5 = 0$$

أو $px + qy = 3z$.

نلاحظ أنه يمكن كتابة العلاقة الدالية المفروضة بالشكل $\frac{z}{x^3} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ أو بالشكل $z = x^3 f\left(\frac{y}{x}\right)$

حيث f دالة اختيارية لمتغيرها . فإذا وضعنا $v = y/x$ ثم اشتققنا $z = x^3 f(v)$ بالنسبة لـ x , y نجد :

$$p = 3x^2 f(v) + x^3 \frac{df}{dv}\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 f(v) + x^3\left(\frac{df}{dv}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right) = 3x^2 f(v) - xy f'(v)$$

$$q = x^3 \frac{df}{dv}\frac{\partial v}{\partial y} = x^3\left(\frac{df}{dv}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 f'(v)$$

وبحذف $f'(v)$ من هاتين العلاقتين ينتج :

$$px + qy = 3x^3 f(v) = 3z$$

تماما كما حصلنا قبل قليل

أنظر المسائل ٥–٨

مسائل محلولة

١ – احذف a و b من $z = (x^2 + a)(y^2 + b)$

نشتق جزئيا بالنسبة لـ x و y فنجد $p = 2x(y^2 + b)$ و $q = 2y(x^2 + a)$ وعلى هذا فإن $x^2 + a = \frac{q}{2y}$ ، $y^2 + b = \frac{p}{2x}$ ومنه $z = (x^2 + a)(y^2 + b) = (\frac{q}{2y})(\frac{p}{2x})$ أو $pq = 4xyz$ كذلك يمكن حذف a و b كما يلي :

$$pq = 4xy(y^2 + b)(x^2 + a) = 4xyz$$

٢ – أوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة كرات نصف قطرها 5 ومركزها في المستوى $x = y$

أن معادلة مجموعة الكرات هذه هي : (١) $(x - a)^2 + (y - a)^2 + (z - b)^2 = 25$ ، حيث a و b ثابتان اختياريان .

نشتق جزئيا بالنسبة لـ x و y ونقسم على ٢ فنحصل على :

$$(x - a) + (z - b)p = 0 \quad و \quad (y - a) + (z - b)q = 0$$

فإذا وضعنا $z - b = -m$ يكون $x - a = pm$ و $y - a = qm$

وبالتعويض في (١) ينتج

$$m^2(p^2 + q^2 + 1) = 25$$

ولكن بما أن $x - y = (p-q)m$ إذن $m = \frac{x - y}{p - q}$ ، $m^2(p^2 + q^2 + 1) = \frac{(x - y)^2}{(p - q)^2}(p^2 + q^2 + 1) = 25$

والمعادلة التفاضلية المطلوبة هي

$$(x - y)^2 (p^2 + q^2 + 1) = 25(p - q)^2$$

٣ – برهن أن المعادلة التفاضلية الجزئية التي نحصل عليها من حذف الثابتين الاختياريين a و c من $z = ax + h(a)y + c$ حيث $h(a)$ دالة اختيارية في a لا تحوى المتغيرات x, y, z

لنشتق $z = ax + h(a)y + c$ جزئيا بالنسبة لـ x و y فنجد $p = a$ و $q = h(a)$ والمعادلة التفاضلية الناتجة عن حذف a هي $q = h(p)$ أو $f(p, q) = 0$ حيث f دالة اختيارية لمتغيرها . وهكذا نرى أن المعادلة تحوى p و q ولكنها لا تحوى أيا من المتغيرات x, y, z

٤ – برهن أن المعادلة التفاضلية الجزئية التي نحصل عليها بحذف الثابتين a و b من :

$$z = ax + by + f(a,b)$$

هي معادلة كليرو الموسعة :

$$z = px + qy + f(p,q)$$

لنشتق $z = ax + by + f(a,b)$ جزئيا بالنسبة لـ x و y فنجد $p = a$ و $q = b$

ومنه تنتج المعادلة التفاضلية المطلوبة مباشرة .

٥ – أوجد المعادلة التفاضلية التي تنشأ عن $\phi(x+y+z,\ x^2+y^2-z^2) = 0$.

لنضع $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 - z^2$ تأخذ العلاقة المفروضة الشكل $\phi(u, v) = 0$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ x و y ينتج

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}(1+q) + \frac{\partial\phi}{\partial v}(2y-2zq) = 0 \qquad \frac{\partial\phi}{\partial u}(1+p) + \frac{\partial\phi}{\partial v}(2x-2zp) = 0$$

وبحذف $\frac{\partial \phi}{\partial u}$ و $\frac{\partial \phi}{\partial v}$ ينتج :

$$\begin{vmatrix} 1+p & 2x-2zp \\ 1+q & 2y-2zq \end{vmatrix} = 2(y-x) + 2p(y+z) - 2q(z+x) = 0$$

أو $(y+z)p - (x+z)q = x - y$

٦ – احذف الدالة الاختيارية $\phi(x+y)$ من $z=\phi(x+y)$

لنضع $x+y=u$ فتأخذ العلاقة المفروضة الشكل $z=\phi(u)$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ x و y ينتج $p = \frac{\partial\phi}{\partial u} = \phi'(u)$ و $q = \phi'(u)$

والمعادلة $p=q$ هى المعادلة التفاضلية الناتجة .

٧ – أن معادلة أى مخروط رأسه فى النقطة $P_0(x_0,y_0,z_0)$ هى من الشكل $\phi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}\right) = 0$ أوجد المعادلة التفاضلية .

لنضع $\frac{y-y_0}{z-z_0} = v$ ، $\frac{x-x_0}{z-z_0} = u,$ فتأخذ العلاقة المفروضة الشكل $\phi(u,v)=0$

بالاشتقاق بالنسبة لـ x و y ينتج :

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{1}{z-z_0} - p\frac{x-x_0}{(z-z_0)^2}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial v}\left(-p\frac{y-y_0}{(z-z_0)^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(-q\frac{x-x_0}{(z-z_0)^2}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{1}{z-z_0} - q\frac{y-y_0}{(z-z_0)^2}\right) = 0$$

وبحذف $\frac{\partial\phi}{\partial u}$ و $\frac{\partial\phi}{\partial v}$ ينتج $p(x-x_0) + q(y-y_0) = z - z_0$

٨ – احذف الدالتين الاختياريتين $f(x)$ و $g(x)$ من $z = y f(x) + x g(y)$

بالاشتقاق جزئيا بالنسبة لـ x و y ينتج :

$$p = y f'(x) + g(y) \quad (١) \qquad ، \qquad q = f(x) + x g'(y) \quad (٢)$$

وبما أنه لا يمكن حذف f, g, f', g' من هاتين العلاقتين والعلاقة المفروضة فإننا نوجد المشتقات الجزئية الثانية :

$$r = y f''(x), \qquad s = f'(x) + g'(y), \qquad t = x g''(y) \quad (٣)$$

من (١) و (٢) نجد $f'(x) = \frac{1}{y}[p-g(y)]$ و $g'(y) = \frac{1}{x}[q-f(x)]$ ، ومنه :

$$s = f'(x) + g'(y) = \frac{1}{y}[p-g(y)] + \frac{1}{x}[q-f(x)]$$

وهكذا فإن $xys = x[p-g(y)] + y[q-f(x)] = px + qy - [y f(x) + x g(y)] = px + qy - z$ هى المعادلة التفاضلية الجزئية الناتجة .

لاحظ أن المعادلة التفاضلية هى من الرتبة الثانية مع أنه كان من المتوقع أن تكون ، بوجه عام ، أعلى من ذلك . ويعود هذا الأمر إلى أن إحدى العلاقات (٣) تحوى المشتقتين الأوليتين فقط لـ f و g مما ساعد على حذف f, g, f', g' من هذه العلاقة و (١) و (٢) والعلاقة المفروضة .

٩ – أوجد المعادلة التفاضلية لجميع السطوح التى تقطع مجموعة المخاريط $x^2+y^2-a^2z^2 = 0$ بشكل قائم (عمودى).

لتكن $z=f(x,y)$ معادلة السطوح المطلوبة . أن أعداد توجيه العمودى على السطح عند نقطة ما $P(x,y,z)$ منه هى $[p,q,-1]$

و كذلك فإن أعداد توجيه العمودى على المخروط المار بـ P عند النقطة P نفسها هى $[x, y, -a^2z]$ وبما أن العمودين متعامدان فإن :

$$px + qy + a^2 z = 0$$

وبحـــذف a^2 بين هذه المعادلة والمعادلة المفروضة تنتج المعادلة التفاضلية المطلوبة .

$$z(px + qy) + x^2 + y^2 = 0$$

١٠ – نسمى السطح الذى يغلف مجموعة المستويات التى لها متغير واحد سطحا منبسطا (يمكن بسط هذا السطح فى مستوى دون أن يصيبه أى إطالة أو تمزق) . أوجد المعادلة التفاضلية للسطوح المنبسطة .

لنفرض أن معادلة السطح المنبسط هى $z=f(x, y)$

عندئذ تكون معادلة المستوى المماس لهذا السطح عند نقطة (x_0, y_0, z_0) منه هى :

$$F = (x - x_0)p + (y - y_0)q - (z - z_0) = 0 \qquad (1)$$

وهكذا إذا حققت p و q علاقة $\phi(p,q)=0$ فإن (١) تمثل معادلة مجموعة مستويات لها متغير واحد

تكون $z=f(x, y)$ غلافا لها . إذن تكون المعادلة $\phi(p, q) = 0$ أو $q = \lambda(p)$ هى المعادلة التفاضلية المطلوبة .

إن مخروط المسألة ٩ سطح منبسط لأن $p = \dfrac{x}{a^2 z}$ ، $q = \dfrac{y}{a^2 z}$ تحقق $\phi(p,q) = a^2(p^2 + q^2) - 1 = 0$

١١ – احذف الدالتين الاختياريتين ϕ_1 و ϕ_2، من

$$z = \phi_1(y + m_1x) + \phi_2(y + m_2x) = \phi_1(u) + \phi_2(v)$$

حيث m_1 و m_2 $(m_1 \neq m_2)$ ثابتان اختياريان

بالاشتقاق الجزئى ينتج :

$$r = m_1^2 \frac{d^2\phi_1}{du^2} + m_2^2 \frac{d^2\phi_2}{dv^2}, \qquad s = m_1 \frac{d^2\phi_1}{du^2} + m_2 \frac{d^2\phi_2}{dv^2}, \qquad t = \frac{d^2\phi_1}{du^2} + \frac{d^2\phi_2}{dv^2}$$

وبحذف $\dfrac{d^2\phi_1}{du^2}, \dfrac{d^2\phi_2}{dv^2}$ نحصل على

$$\begin{vmatrix} m_1^2 & m_2^2 & r \\ m_1 & m_2 & s \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = (m_1 - m_2)r - (m_1^2 - m_2^2)s + (m_1^2 m_2 - m_1 m_2^2)t = 0$$

وبما أن $m_1 \neq m_2$ فإن المعادلة الأخيرة تأخذ الشكل $r - (m_1 + m_2)s + m_1 m_2 t = 0$

١٢ – برهن أن (أ) $z = ax^3 + by^3$ و (ب) $z = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^4/x$ يعطيان نفس المعادلة التفاضلية .

(أ) نشتق $z = ax^3 + by^3$ جزئيا بالنسبة لـ x و y فينتج :

$$p = 3ax^2 \quad \text{و} \quad q = 3by^2$$

إذن المعادلة التفاضلية الناتجة هى $px + qy = 3(ax^3 + by^3) = 3z$

(ب) نشتق $z = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^4/x$ جزئيا بالنسبة لـ x و y فينتج $p = 3ax^2 + 2bxy + cy^2 - dy^4/x^2$

و $q = bx^2 + 2cxy + 4dy^3/x$

والمعادلة التفاضلية الناتجة هى $px + qy = 3(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^4/x) = 3z$ وهى التى حصلنا عليها قبل قليل .

وهكذا نرى أن معادلتين ، واحدة بثابتين اختياريين والثانية بأربعة ثوابت اختيارية ، أوصلتا إلى المعادلة التفاضلية

ذاتها ، وهذا يشير إلى الدور الثانوى الذى تلعبه الثوابت الاختيارية هنا . فبدلا عنها سيكون لدينا دوال اختيارية . أن المعادلة (١) يمكن أن تكتب بالشكل :

$$z = ax^3 + by^3 = x^3[a + b(y/x)^3] = x^3 \cdot g(y/x)$$

أما المعادلة (ب) فى الشكل :

$$z = x^3[a + b(y/x) + c(y/x)^2 + d(y/x)^4] = x^3 \cdot h(y/x)$$

وكل منهما حالة خاصة من $z = x^3 . f(y/x)$ التى مرت فى المثال (٤)

مسائل اضافية

احذف الثوابت الاختيارية $a.b,c$ من كل المعادلات التالية :

١٣ – $z = (x-a)^2 + (y-b)^2$ ج : $4z = p^2 + q^2$

١٤ – $z = axy + b$ $\quad xp - yq = 0$

١٥ – $ax + by + cz = 1$ $\quad r = 0, \; s = 0, \;$ or $\; t = 0$

١٦ – $z = axe^y + \frac{1}{2}a^2e^{2y} + b$ $\quad q = xp + p^2$

١٧ – $z = xy + y\sqrt{x^2 - a^2} + b$ $\quad pq = xp + yq$

١٨ – $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ $\quad xzr + xp^2 - zp = 0, \; yzt + yq^2 - zq = 0, \;$ or $\; zs + pq = 0$

احذف الثابتين الاختياريين a و b والدوال الاختيارية g و f و ϕ :

١٩ – $z = x^2\phi(x-y)$ or $\psi(z/x^2, x-y) = 0$ ج : $2z = xp + xq$

٢٠ – $xyz = \phi(x+y+z)$ $\quad x(y-z)p + y(z-x)q = z(x-y)$

٢١ – $z = (x+y)\,\phi(x^2 - y^2)$ $\quad yp + xq = z$

٢٢ – $z = f(x) + e^y g(x)$ $\quad t - q = 0$

٢٣ – $x = f(z) + g(y)$ $\quad ps - qr = 0$

٢٤ – $z = f(xy) + g(x+y)$ $\quad x(y-x)r - (y^2 - x^2)s + y(y-x)t + (p-q)(x+y) = 0$

٢٥ – $z = f(x+z) + g(x+y)$ $\quad qr - (1+p+q)s + (1+p)t = 0$

٢٦ – $z = ax^2 + g(y)$ $\quad p - xr = 0$ or $s = 0$

٢٧ – $z = \frac{1}{2}(a^2 + 2)x^2 + axy + bx + \phi(y + ax)$ $\quad r - 2t + rt - s^2 = 2$

٢٨ – أوجد المعادلة التفاضلية لجميع الكرات التى يقع مركزها فى المستوى xoy والتى يساوى نصف قطرها 2 .

إرشاد : احذف a و b من $(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = 4$

ج : $z^2(p^2 + q^2 + 1) = 4$

٢٩ – أوجد المعادلة التفاضلية للمستويات التى تحصر من الاحداثى السينى نفس ما تحصر من الاحداثى الصادى .

ج : $p - q = 0$

٣٠ – أوجد المعادلة التفاضليه لجميع السطوح الدورانية حول المحور z .

إرشاد : احذف ϕ من $z = \phi(\sqrt{x^2 + y^2}) = \psi(x^2 + y^2)$

ج : $yp - xq = 0$

الفصل التاسع والعشرون

المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الأولى

نقول عن المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الأولى مثل :

$$px + qy = 3z \qquad (١١) \qquad و \qquad px^2 + qy = z^3 \qquad (٢١)$$

إنها خطية إذا كانت من الدرجة الأولى فى p و q وهنا نلاحظ أنه ، على عكس المعادلات التفاضلية العادية ، لا يوجد أى قيد نفرضه على درجة المتغير غير المستقل z ونقول عن جميع المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الأولى وغير الخطية مثل :

$$p^2 + q^2 = 1 \qquad (١٢) \qquad و \qquad p + \ln q = 2z^3 \qquad (٢٢)$$

إنها ليست خطية (غير خطية)

المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الأولى :

لقد حصلنا على المعادلة (١١) فى المثال ٤ من الفصل ٢٨ من العلاقة الدالية الاختيارية :

$$\phi(z/x^3,\ y/x) = 0 \qquad (٣)$$

أو من العلاقة المكافئة لها $z/x^3 = f(y/x)$ نسمى هذا الحل الذى يحوى دالة اختيارية الحل العام لـ (١١) ولقد حصلنا على المعادلة التفاضلية نفسها (فى المسألة ١٢ من الفصل ٢٨) بحذف الثوابت الاختيارية من (١٤) $z = ax^3 + by^3$

ومن (٢٤) $z = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^4/x$

ولدى دراسة مسائل الفصل السابق نلاحظ أن العلاقات التى تحوى ثابتين اختياريين تقودنا عادة إلى معادلات تفاضلية جزئية غير خطية من الرتبة الأولى ، وأن العلاقات التى تحتوى أكثر من ثابتين اختياريين تقودنا إلى معادلات من رتبة أعلى من الرتبة الأولى . ومن جهة ثانية أن هاتين العلاقتين هما ، كما أشرنا فى المسألة ١٢ من الفصل ٢٨ ، حالتان خاصتان من العلاقة الدالية الاختيارية (٣) . ومن الواضح أن الحل العام لـ (١) يعطينا تنوعا فى الحلول أوسع بكثير مما نحصل عليه (فى حالة المعادلات التفاضلية العادية) بإدخال الثوابت الاختيارية . فمثلا أن

$$z/x^3 = A\sin(y/x)^2 + B\cos(y/x) + C\ln(y/x) + De^{y/x} + E(y/x)^{12}$$

متضمن فى الحل العام (٣)

طريقة لاكرانج

الحل العـــام :

إن الشكل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى والتى تحوى متغيرا غير مستقل z ومتغيرين مستقلين y,x هو :

$$Pp + Qq = R \qquad (٥)$$

حيث P,ϕ,R دوال فى x,y,z

يمكن حل هذه المعادلة بسهولة عندما يكون $P = 0$ أو $Q = 0$ فللمعادلة $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$ مثلا الحل $z = x^2 + 3xy + \phi(y)$ حيث ϕ دالة اختيارية .

ولقد أرجع لاجرانج مسألة الحصول على الحل العام لـ (٥) إلى حل مجموعة مساعدة (تسمى مجموعة لاجرانج) من المعادلات التفاضلية العادية :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \qquad (٦)$$

فبرهن (انظر المسألة ٧) أن

$$\phi(u, v) = 0 \qquad (٧)$$

هو الحل العام لـ (٥) حيث ϕ اختيارى وبفرض أن $u = u(x, y, z) = a$ و $v = v(x, y, z) = b$ هما حلان مستقلان لـ (٦) وأن a و b ثابتان اختياريان وأن واحدا على الأقل من u و v يحوى z .

مثــال ١ :

أوجد الحل العام لـ

$$px + qy = 3z \qquad (١)$$

أن المجموعة المساعدة هى $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{3z}$

ونحصل من $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{3z}$ على $u = z/x^3 = a$ ومن $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ على $v = y/x = b$ وهكذا فإن الحل العام هو $\phi(z/x^3, y/x) = 0$ حيث ϕ اختيارى

ونحصل بالطبع ، من $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{3z}$ على $z/y^3 = c$ وبالتالى يمكننا أن نكتب

$$\psi(z/x^3, z/y^3) = 0 \quad \text{أو} \quad \lambda(z/y^3, y/x) = 0$$

حيث λ ، ψ اختياريان . أن جميع هذه الحلول متكافئة وسندعو كلا منها الحل العام . يمكن تعميم طريقة العمل السابقة لتشمل حالة المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى التى تحوى أكثر من متغيرين مستقلين .

مثــال ٢

أوجد الحل العام لـ : $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + t\frac{\partial z}{\partial t} = xyt$

حيث z هو المتغير غير المستقل .

إن المجموعة المساعدة هى $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dt}{t} = \frac{dz}{xyt}$

ومنها نحصل مباشرة على $u = x/y = a, \quad v = t/y = b$

ويمكن الحصول على حل مستقل ثالث باستخدام المضاريب $yt, xt, xy, -3$ وذلك لأن :

$$x(yt) + y(xt) + t(xy) + (xyt)(-3) = 0$$

$$yt\,dx + xt\,dy + xy\,dt - 3\,dz = 0$$

ومنه $$xyt - 3z = c$$

إذن فالحل العام هو $\phi(x/y,\ t/y,\ xyt-3z) = 0.$

الحلول التامة : إذا كان $v=b, u=a$ حلين مستقلين لـ (٦) ، وكان α و β ثابتين اختياريين فإننا نسمي :

$$u = \alpha v + \beta \tag{٨}$$

حلا تاما لـ (٥) . فالحل التام لمعادلة المثال ١ هو على سبيل المثال :

$$z/x^3 = \alpha(y/x) + \beta$$

يمثل الحل التام (٨) مجموعة سطوح تابعة لوسيطين دون أن يكون لها غلاف لظهور الثابتين الاختياريين فيها بشكل خطي . إلا انه من الممكن أن نختار منها مجموعة سطوح تابعة لوسيط واحد ولها غلاف . وهذه الأغلفة (السطوح) كما سنرى في المسألة ٨ ليست إلا سطوحا خاصة من الحل العام .

مسائل محلولة

١ – أوجد الحل العام لـ $2p + 3q = 1$

إن المجموعة المساعدة هي $\dfrac{dx}{2} = \dfrac{dy}{3} = \dfrac{dz}{1}$

ونجد من $\dfrac{dx}{2} = \dfrac{dz}{1}$ ، أن $x-2z = a$ كما نحصل من $\dfrac{dx}{2} = \dfrac{dy}{3}$ على $3x-2y = b$

إذن فالحل العام هو $\phi(x-2z,\ 3x-2y) = 0$

ويتكون الحل التام $x-2z = \alpha(3x-2y) + \beta$ من مجموعة مستويات تابعة لوسيطين وإذا اخترنا $\beta = \alpha^2$ فإننا نحصل على مجموعة سطوح لوسيط واحد .

$$x - 2z = \alpha(3x-2y) + \alpha^2 \tag{أ}$$

لنشتق (أ) بالنسبة لـ α فينتج $0 = 3x - 2y + 2\alpha$ أو $\alpha = -\frac{1}{2}(3x-2y)$

وبالتعويض عن α في (أ) نحصل على الغلاف $x - 2z = -\frac{1}{4}(3x-2y)^2$ وهو عبارة عن اسطوانة مكافئة .

ومن الواضح أن هذه الاسطوانة جزء من الحل العام .

٢ – أوجد الحل العام لـ $y^2zp - x^2zq = x^2y$

أن المعادلات المساعدة هي $\dfrac{dx}{y^2z} = \dfrac{dy}{-x^2z} = \dfrac{dz}{x^2y}$

ونحصل من $\dfrac{dz}{x^2y} = \dfrac{dy}{-x^2z}$ التي تكتب بالشكل $z\,dz + y\,dy = 0$ على $y^2 + z^2 = a$. ونحصل من $\dfrac{dx}{y^2z} = \dfrac{dy}{-x^2z}$ على $x^3 + y^3 = b$

إذن فالحل العام هو $\phi(y^2+z^2,\ x^3+y^3) = 0$

٣ – أوجد الحل العام لـ $(y-z)p + (x-y)q = z - x$

أن المجموعة المساعدة هي $\dfrac{dx}{y-z} = \dfrac{dy}{x-y} = \dfrac{dz}{z-x}$

وبما أن $(y-z) + (x-y) + (z-x) = 0$ فإن $dx + dy + dz = 0$ ومنه $x + y + z = a$

وبما أن $x(y-z)+z(x-y)+y(z-x) = 0$ فإن $x\,dx + z\,dy + y\,dz = 0$ ومنه $x^2+2yz = b$

والحل العام هو $\phi(x^2+2yz,\ x+y+z) = 0$

ويمثل الحل التام $x^2+2yz = \alpha(x+y+z) + \beta$ مجموعة من السطوح الزائدة .

٤ – أوجد الحل العام لـ $(x^2-y^2-z^2)p + 2xyq = 2xz$

إن المجموعة المساعدة هى $\dfrac{dx}{x^2-y^2-z^2} = \dfrac{dy}{2xy} = \dfrac{dz}{2xz}$

ونحصل من $\dfrac{dy}{2xy} = \dfrac{dz}{2xz}$ على $y/z = a$

ونحصل من $\dfrac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{x(x^2+y^2+z^2)} = \dfrac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{x(x^2-y^2-z^2)+y(2xy)+z(2xz)} = \dfrac{dz}{2xz}$ أو من $\dfrac{2(x\,dx+y\,dy+z\,dz)}{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{dz}{z}$

على $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{z} = b$

إذن فالحل العام هو $\phi\left(\dfrac{y}{z},\ \dfrac{x^2+y^2+z^2}{z}\right) = 0$

ويتكون الحل التام $x^2+y^2+z^2 = \alpha y+\beta z$ من الكرات المارة بنقطة الأصل والتى تقع مراكزها فى المستوى yoz

٥ – حل المعادلة $ap + bq + cz = 0$

إن المجموعة المساعدة هى $\dfrac{dx}{a} = \dfrac{dy}{b} = \dfrac{dz}{-cz}$ ونحصل من $\dfrac{dx}{a} = \dfrac{dy}{b}$ على $ay-bx = A$ وإذا كان $a \neq 0$

فإن $\dfrac{dx}{a} = \dfrac{dz}{-cz}$ تقودنا إلى $\ln z = -\dfrac{c}{a}x + \ln B$ أو $z = Be^{-cx/a}$. وبالتالى يمكن كتابة الحل العام بالشكل $z = e^{-cx/a}\phi(ay-bx)$

أما إذا كان $b \neq 0$ فإن $\dfrac{dy}{b} = \dfrac{dz}{-cz}$ يقودنا إلى $z = Ce^{-cy/b}$ ويمكن عندئذ كتابة الحل العام بالشكل

$z = e^{-cy/b}\psi(ay-bx)$

٦ – أوجد حل (١) $2p+q+z=0$ ، (٢) $p-3q+2z=0$ ، (٣) $2p+3q+5z=0$ ، (٤) $q+2z=0$

(١) لنقارن بالمسألة ٥ فنرى $a=2,\ b=1,\ c=1$

إذن فالحل العام هو $z = e^{-x/2}\phi(2y-x)$ أو $z = e^{-y}\psi(2y-x)$

(٢) لدينا هنا $a=1,\ b=-3,\ c=2$ والحل العام هو $z = e^{-2x}\phi(y+3x)$ أو $z = e^{2y/3}\psi(y+3x)$.

(٣) أن الحل العام هو $z = e^{-5x/2}\phi(2y-3x)$ و $z = e^{-5y/3}\psi(2y-3x)$

(٤) أن الحل العام هو $z = e^{-2y}\phi(-x) = e^{-2y}\psi(x)$.

٧ – بين أنه إذا كان $u = u(x,y,z) = a$ و $v = v(x,y,z) = b$ حلين مستقلين لـ $\dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q} = \dfrac{dz}{R}$ حيث P, Q, R دوال فى x, y, z فإن $\phi(u,v) = 0$ ، حيث ϕ اختيارى ، هو الحل العام لـ $Pp+Qq = R$

لنفاضل كلا من $u=a, v=b$ فنجد :

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz = 0$$

وبما أن v,u دالتان مستقلتان فإننا نجد بحل هاتين المعادلتين أن :

$$dx : dy : dz = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}\right) : \left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}\right) : \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = P : Q : R.$$

ولكن هذه العلاقات (انظر الفصل ٢٨) هى التى تعرف P, Q, R فى المعادلة $Pp + Qq = R$ التى حلها العام هو $\phi(u, v) = 0$

٨ – ليكن $u = \alpha v + \beta$ حلا تاماً لـ $Pp+Qq=R$. اختر من هذه المجموعة من السطوح التابعة لوسيطين مجموعة تابعة لوسيط واحد بأن تضع $\beta = h(\alpha)$ حيث h دالة مفروضة لـ α ثم ابحث عن الغلاف .

نحصل على غلاف الحزمة .

$$u = \alpha v + h(\alpha) \tag{1}$$

بحذف α بين (١) والمعادلة :

$$0 = v + h'(\alpha) \tag{2}$$

بحل (٢) ، وليكن $\alpha = \mu(v)$ هو الحل ، والتعويض فى (١) نجد :

$$u = v\cdot\mu(v) + h[\mu(v)] = \lambda(v) \tag{3}$$

وتمثل المعادلة (٣) الآن جزءاً من الحل العام $\phi(u,v)=0$. وهكذا على عكس حالات المعادلات التفاضلية العادية ، فإن الغلاف لا يعطى حلا جديدا .

إذا اعتبرنا $h(\alpha)$ دالة اختيارية فى α فإن $\lambda(v)$ تكون دالة اختيارية فى v وتكون (٣) الحل العام . أى ان الحل العام لمعادلة تفاضلية جزئية خطية من الرتبة الأولى يتكون من جميع الأغلفة لجميع المجموعات (١) التابعة لوسيط واحد والتى نحصل عليها من الحل التام . نلاحظ كذلك أنه عندما يكون $h(\alpha)$ اختياريا فإن حذف α بين (١) و (٢) ليس ممكنا ، وبالتالى لا يمكن الحصول على الحل العام من الحل التام .

٩ – برهن أن الشروط التى عندها تكون المعادلة التفاضلية العادية :

$$\mu(x,y)\, M(x,y)dx + \mu(x,y)\, N(x,y)dy = 0$$

تامة هو عبارة عن معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولى . بين ، بهذا ، كيف يمكن أن نجد عاملا تكامليا لـ $Mdx+Ndy = 0$ (انظر الفصل الرابع)

إذا كانت $\mu M dx + \mu N dy = 0$

تامة فإن $\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$ أو $M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$

وهذه ليست إلا معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ، ومجموعتها المساعدة هى

$$\frac{dx}{-N} = \frac{dy}{M} = \frac{d\mu}{\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)} \tag{1}$$

أن أى حل لهذه المجموعة يحوى μ هو عامل تكاملى لـ $M\,dx + N\,dy = 0$. لنكتب (١) بالشكل

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N}\,dx = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}\,dy = \frac{d\mu}{\mu} \tag{2}$$

عندئذ يتضح أنه إذا كان $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} = f(x)$, فإن $\mu = e^{\int f(x)dx}$ عامل تكاملي ، وإذا كان $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = g(y)$

فإن $\mu = e^{\int g(y)dy}$ هو عامل تكاملي . بالإضافة لذلك إذا كانت المعادلة خطية (أي إذا كان $y' + Py = Q$

فإن $M = Py - Q$ و $N = 1$) وبذلك تأخذ (٢) الشكل $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{-P}{Py-Q}dy = P\,dx$ ويكون $\mu = e^{\int P\,dx}$ عاملا تكامليا .

١٠ – أوجد عاملا تكامليا لـ $(2x^3y - y^2)dx - (2x^4 + xy)dy = 0$ (انظر المسألة ٩ أعلاه)

لدينا هنا $\frac{\partial N}{\partial x} = -(8x^3 + y)$ ، $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x^3 - 2y$, $N = -(2x^4 + xy)$, $M = 2x^3y - y^2$.

ولنبحث عن حل لـ $\frac{dx}{2x^4 + xy} = \frac{dy}{2x^3y - y^2} = \frac{d\mu}{\mu(y - 10x^3)}$ يحوي μ

ولنكتب لذلك $\frac{d\mu}{\mu(y - 10x^3)} = \frac{-2y\,dx - 3x\,dy}{-2y(2x^4 + xy) - 3x(2x^3y - y^2)} = \frac{-2y\,dx - 3x\,dy}{xy(y - 10x^3)}$ ومنه $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{-2y\,dx - 3x\,dy}{xy}$

وهكذا نحصل على $\ln\mu = -2\ln x - 3\ln y$ ، وبالتالي فإن $\mu = x^{-2}y^{-3}$ عامل تكاملي .

١١ – أوجد السطح التكاملي للمعادلة $x^2p + y^2q + z^2 = 0$ الذي يقع عليه القطع الزائد :

$$xy = x + y, \quad z = 1$$

إن المجموعة المساعدة هي $\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{-z^2}$

ونحصل من $\frac{dx}{x^2} = \frac{dz}{-z^2}$ على $u = \frac{x+z}{xz} = a$ ، ومن $\frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{-z^2}$ على $v = \frac{y+z}{yz} = b$

لنحذف أولا x_0, y_0, z_0 بين $z_0 = 1$ ، $x_0y_0 = x_0 + y_0$ و $u = \frac{x_0 + z_0}{x_0z_0} = \frac{x_0 + 1}{x_0} = a$ و $v = \frac{y_0 + z_0}{y_0z_0} = \frac{y_0 + 1}{y_0} = b$.

بحل الأخيرة نجد $y_0 = \frac{1}{b-1}$ ، $x_0 = \frac{1}{a-1}$ وبالتعويض في $x_0y_0 = x_0 + y_0$ نحصل على $\frac{1}{(a-1)(b-1)} = \frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1}$

أو $a + b = 3$ وهذه هي العلاقة التي ينبغي أن تربط a بـ b

إذن فمعادلة السطح المطلوب هي :

$$a + b = u + v = \frac{x+z}{xz} + \frac{y+z}{yz} = 3 \quad \text{أو} \quad 2xy + z(x+y) = 3xyz$$

مسـائل اضـافية

أوجد الحل العام لكل من المعادلات التالية :

١٢ – $p + q = z$ ج : $z = e^{y}\phi(x-y)$

١٣ – $3p + 4q = 2$ $3y - 4x = f(3z - 2x)$ or $\phi(3y - 4x,\ 3z - 2x) = 0$

١٤ – $yq - xp = z$ $\phi(xy,\ xz) = 0$

١٥ – $xzp + yzq = xy$ $y = x\,\phi(xy - z^{2})$

١٦ – $x^{2}p + y^{2}q = z^{2}$ $x - y = xy\,\phi(1/x - 1/z)$

١٧ – $yp - xq + x^{2} - y^{2} = 0$ $\phi(x^{2} + y^{2},\ xy - z) = 0$

١٨ – $yzp - xzq = xy$ $\phi(x^{2} + y^{2},\ y^{2} + z^{2}) = 0$

١٩ – $zp + yq = x$ $x + z = y\,\phi(x^{2} - z^{2})$

٢٠ – $x(y-z)p + y(z-x)q = z(x-y)$ $\phi(xyz,\ x + y + z) = 0$

٢١ – $x(y^{2} - z^{2})p + y(z^{2} - x^{2})q = z(x^{2} - y^{2})$ $\phi(xyz,\ x^{2} + y^{2} + z^{2}) = 0$

٢٢ – أوجد معادلة جميع السطوح التى تمر مستوياتها المماسة بالنقطة (0,0,1)

إرشاد : حل المعادلة $xp + yq = z - 1$

ج : $z = 1 + x\phi(y/x)$

٢٣ – أوجد معادلة السطح الذى يحقق المعادلة $4yzp + q + 2y = 0$ ويمر بـ $y^{2} + z^{2} = 1,\ x + z = 2$

ج : $y^{2} + z^{2} + x + z = 3$

الفصل الثالث

المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية من الرتبة الأولى

الحلول التامة والوحيدة :

لتكن المعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية من الرتبة الأولى

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \qquad (١)$$

المستنتجة من :

$$g(x, y, z, a, b) = 0 \qquad (٢)$$

بحذف الثابتين الاختياريين a و b. نسمى عندئذ (٢) حلا تاما (أو الحل التام) لـ (١)

يمثل هذا الحل التام مجموعة من السطوح تابعة لوسيطين . وقد يكون لهذه المجموعة غلاف وقد لا يكون . فإذا أردنا أن نوجد هذا الغلاف (فى حال وجوده) نحذف a و b من :

$$g = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial b} = 0$$

فإذا حققت العلاقة الناتجة عن ذلك :

$$\lambda(x, y, z) = 0 \qquad (٣)$$

المعادلة (١) فإننا نسميها الحل الوحيد لـ (١) ، وإذا كان :

$$\lambda(x, y, z) = \xi(x\ y\ z)\cdot\eta(x, y, z)$$

وإذا حقق $\xi=0$ المعادلة (١) ولم يحقق $\eta=0$ هذه المعادلة فإن $\xi=0$ هو الحل الوحيد . وقد نحصل ، كما فى حالة المعادلات التفاضلية العادية (الفصل ١٠) على الحل الوحيد من المعادلة التفاضلية الجزئية بحذف p و q من .

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = 0$$

مثال ١ :

يمكننا أن نتحقق بسهولة من أن $z = ax + by - (a^2 + b^2)$ هو حل تام لـ $z = px + qy - (p^2 + q^2)$ ونحذف b,a من

$$g = z - ax - by + a^2 + b^2 = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial a} = -x + 2a = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial b} = -y + 2b = 0$$

نحصل على $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$. وهذا يحقق المعادلة التفاضلية وهو حل وحيد . ويمثل الحل التام مجموعة من المستويات تابعة لوسيطين غلافها هو مجسم القطع المكافئ $x^2 + y^2 = 4z$

الحل العـــام :

إذا استبدلنا بأحد الثابتين فى الحل التام (٢) ، وليكن b دالة معلومة لثابت آخر مثل $b = \phi(a)$ ، فعندئذ تمثل المعادلة :

$$g(x, y, z, a, \phi(a)) = 0$$

مجموعة سطوح (١) تابعة لوسيط واحد . وإذا كان لهذه المجموعة غلاف فإننا نحصل عليه كالمعتاد ، بحذف a من

$$\frac{\partial}{\partial a} g(x,y,z,a,\phi(a)) = 0 \quad \text{و} \quad g(x,y,z,a,\phi(a)) = 0$$

ثم تعيين ذلك الجزء من النتيجة الذى يحقق (١)

مثال ٢ :

لنضع فى الحل التام (١): $b=\phi(a)=a$ ولنحذف a بين $g = z - a(x+y) + 2a^2 = 0$ و $\frac{\partial g}{\partial a} = -(x+y) + 4a = 0$

فينتج السطح $z = \frac{1}{8}(x+y)^2$ الذى يحقق المعادلة التفاضلية للمثال ١ ، كما يتضح بسهولة . ويمثل هذا السطح اسطوانة مكافئة بعناصر موازية للمستوى xoy. نسمى المجموعة المكونة من جميع الحلول التى نحصل عليها بتغيير $\phi(a)$ الحل العام للمعادلة التفاضلية . وهكذا فإن السطح $8z = (x+y)^2$ الذى مر فى المثال ٢ متضمن فى الحل العام للمعادلة للمثال ١

وعندما $b=\phi(a)$ حيث ϕ اختيارى ، فإن عملية حذف a بين

$$\frac{\partial g}{\partial a} = 0 \quad \text{و} \quad g = 0$$

غير ممكنة وبالتالى فإننا لسنا قادرين على التعبير عن الحل العام بمعادلة مفردة تحوى دالة اختيارية كما هو الحال فى حالة المعادلة التفاضلية الخطية .

الحلول :

لنبدأ ، قبل النظر فى الطريقة العامة التى تعطى حلا تاما لـ (١) ، بتقديم طرق خاصة لمعالجة أربعة أنماط من المعادلات .

النمط I : $f(p,q)=0$ مثال ذلك $p^2-q^2=1$

ينتج من المسألة ٣ فى الفصل ٢٨ أن :

$$z = ax + h(a)\,y + c \qquad (٤)$$

حل تام وذلك بفرض أن $f(a,h(a)) = 0$ ، وأن a و c ثابتان اختياريان .

والمعادلات التى تعين الحل الوحيد هى :

$$z = ax + h(a)\,y + c, \quad 0 = x + h'(a)\,y, \quad 0 = 1$$

وبالتالى فإنه لا يوجد حل وحيد

ونحصل على الحل العام بوضع $c=\phi(a)$ حيث ϕ اختيارى وحذف a بين

$$0 = x + h'(a)\,y + \phi'(a) \quad \text{و} \quad z = ax + h(a)\,y + \phi(a) \qquad (٥)$$

تمثل المعادلة الأولى من (٥) بالدالة المفروضة $\phi(a)$ مجموعة من المستويات تابعة لوسيط واحد . وغلاف هذه الحزمة (وهو جزء من الحل العام) هو سطح منبسط (انظر المسألة ١٠ من الفصل ٢٨) .

مثال ٣ :

حل المعادلة $p^2-q^2=1$.

لدينا هنا $f(a,h(a)) = a^2-[h(a)]^2-1 = 0$ ، $f(p,q) = p^2-q^2-1 = 0$ و $h(a) = (a^2-1)^{1/2}$

و $z = ax + (a^2-1)^{1/2}y + c$ حل تام لها .

ويمكن تبسيط شكل هذا الحل بوضع $a = \sec\alpha$ فيكون $h(\alpha) = \tan\alpha$

وبالتالى : $z = x\sec\alpha + y\tan\alpha + c$

وإذا وضعنا $c = \phi(\alpha) = 0$ وحذفنا α من :

$$0 = x\tan\alpha + y\sec\alpha \quad z = x\sec\alpha + y\tan\alpha \quad \text{أو} \quad 0 = x\sin\alpha + y$$

فإننا نحصل على $z^2 = x^2 - y^2$

وهذا السطح المنبسط (مخروط) هو جزء من الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة .

لاحظ أنه كان بإمكاننا أن نأخذ $h(a) = -(a^2-1)^{1/2}$ فنحصل على الحل التام :

$$z = ax - (a^2-1)^{1/2}y + c$$

انظر المسألتين ١ — ٢

النمط II : $z = px + qy + f(p,q)$ مثال ذلك : $z = px + qy + 3p^{1/3}q^{1/3}$

ينتج من المسألة ٤ من الفصل ٢٨ أن :

$$z = ax + by + f(a,b) \quad (٦)$$

حل تام . تعرف هذه المعادلة ، لأسباب واضحة ، بمعادلة كليرو الموسعة . يتكون هذا الحل التام من مجموعة من المستويات تابعة لوسيطين . والحل الوحيد (أن وجد) هو سطح يكون الحل التام مستويات مماسة له .

مثال ٤ :

حل المعادلة $z = px + qy + 3p^{1/3}q^{1/3}$

إن $z = ax + by + 3a^{1/3}b^{1/3}$ حل تام لهذه المعادلة

وبالاشتقاق بالنسبة لـ a و b نجد $x + a^{-2/3}b^{1/3} = 0$ و $y + a^{1/3}b^{-2/3} = 0$

ومنه $xy = a^{-1/3}b^{-1/3}$ $\quad ax + by = -2a^{1/3}b^{1/3}$

وبالتعويض فى الحل التام نحصل على الحل الوحيد

$$z = a^{1/3}b^{1/3} = 1/xy \quad \text{أو} \quad xyz = 1$$

انظر المسألتين ٣ — ٤

النمط III : $f(z,p,q) = 0$ مثال ذلك $z = p^2 + q^2$

لنفرض $z = F(x + ay) = F(u)$ حيث a ثابت اختيارى . عندئذ يكون :

$$q = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = a\frac{dz}{du} \quad , \quad p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dz}{du}$$

وبالتعويض فى المعادلة التفاضلية المفروضة نحصل على معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الأولى

$$f(z, \frac{dz}{du}, a\frac{dz}{du}) = 0$$

حلها هو الحل التام المطلوب.

مثال ٥ :

حل المعادلة $z = p^2 + q^2$

لنضع $z = F(x+ay) = F(u)$ عندئذ $p = dz/du, \quad q = a\, dz/du$ وبالتعويض فى المعادلة المفروضة نحصل على

$$z = \left(\frac{dz}{du}\right)^2 + a^2\left(\frac{dz}{du}\right)^2$$

وبحل $\frac{dz}{du} = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{1+a^2}}$ أو $\frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\,du$ نحصل على $2\sqrt{z} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}u + k = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(u+b)$

وهكذا فإن الحل التام $4(1+a^2)z = (x+ay+b)^2$ يتكون من مجموعة من الاسطوانات المكافئة .

لنشتق بالنسبة لـ a و b فنجد :

$$8az - 2(x+ay+b)y = 0 \qquad x + ay + b = 0$$

والحل الوحيد هو $z = 0$

انظر المسائل ٥ — ٧

النمط IV : $f_1(x,p) = f_2(y,q)$. مثال ذلك $p - x^2 = q + y^2$

لنضع $f_1(x,p) = a, \quad f_2(y,q) = a$ حيث a ثابت اختيارى ، وبالحل بالنسبة لـ p و q نجد :

$$p = F_1(x,a) \quad , \quad q = F_2(y,a)$$

وبما أن z دالة فى x و y فإن $dz = p\,dx + q\,dy = F_1(x,a)\,dx + F_2(y,a)\,dy$

وهكذا فإن :

$$z = \int F_1(x,a)\,dx + \int F_2(y,a)\,dy + b \qquad (٧)$$

يحوى ثابتين اختياريين وهو الحل التام المطلوب .

مثال ٦ :

حل $p - q = x^2 + y^2$ أو $p - x^2 = q + y^2$

لنضع $p - x^2 = a, \quad q + y^2 = a$ فنحصل على $p = a + x^2, \quad q = a - y^2$.

وبالتكامل نجد $dz = p\,dx + q\,dy = (a+x^2)dx + (a-y^2)dy$ والحل التام المطلوب هو

$z = ax + x^3/3 + ay - y^3/3 + b$ لا يوجد هنا حل وحيد .

انظر كذلك المسألتين ٨ — ٩

تحويلات :

يمكن أحيانا ، كما فى حالة المعادلات التفاضلية العادية ، الوصول إلى تحويل للمتغيرات بنقل المعادلة المفروضة إلى أحد الأصناف الأربعة التى تحدثنا عنها .

فمثلا أن التركيب px يرشح لنا التحويل $X = \ln x$ لأن :

$$px = \frac{\partial z}{\partial X} \quad , \quad p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial X}\frac{dX}{dx} = \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial X}$$

وبهذا تأخذ المعادلة $q = px + p^2x^2$ الشكل $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial X} + (\frac{\partial z}{\partial X})^2$ وهو من النمط I

وبشكل مشابه يرشح تركيب qy التحويل $Y = \ln y$

كما أن وجود $\frac{p}{z}$ و $\frac{q}{z}$ فى المعادلة يرشح التحويل $Z = \ln z$ لأنه يكون عندئذ

$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dZ}\frac{\partial Z}{\partial x} = z\frac{\partial Z}{\partial x}$ و $\frac{p}{z} = \frac{\partial Z}{\partial x}$ وكذلك يكون بشكل مماثل $\frac{q}{z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$

وبهذا تأخذ المعادلة $\frac{q}{z} = (\frac{p}{z})^2$ الشكل $\frac{\partial Z}{\partial y} = (\frac{\partial Z}{\partial x})^2$ وهو من النمط I

انظر كذلك المسائل ١٠ – ١٤

الحل التام : طريقة شاربيت :

لتكن المعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \tag{١}$$

بما أن z دالة فى x و y فإنه ينتج :

$$dz = p\,dx + q\,dy \tag{٨}$$

لنفرض $p = u(x, y, z, a)$ حيث a ثابت اختيارى ، ولنعوض فى (١) ثم نحل لنحصل على $q = v(x, y, z, a)$

وتأخذ (٨) بهاتين القيمتين لـ q, p الشكل :

$$dz = u\,dx + v\,dy \tag{٨$_1$}$$

فإذا كانت (٨$_1$) قابلة للتكامل فإنها تعطينا

$$g(x, y, z, a, b) = 0 \tag{٩}$$

وهو حل تام لـ (١)

مثال ٧ :

حل المعادلة $pq + qx = y$

لنأخذ $p = a - x$ ولنعوض فى $pq + qx = y$ ونحل المعادلة الناتجة فنجد $q = y/a$

لنعوض فى $dz = p\,dx + q\,dy$ فنجد $dz = (a-x)dx + (y/a)dy$ وهذه معادلة قابلة للتكامل وحلها هو

$$z = ax - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2/a + k \quad \text{أو} \quad 2az = 2a^2x - ax^2 + y^2 + b$$

بما أن نجاح الطريقة السابقة يعتمد على نجاحنا فى اختيار ملائم لـ p فإنه لا يمكن اعتبارها طريقة عامة . لننتقل الآن إلى البحث عن طريقة عامة لحل (١) .

إن هذه الطريقة تتلخص فى إيجاد معادلة من الشكل :

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{١٠}$$

بحيث يمكن حل (١) و (١٠) لنحصل على $p = P(x, y, z)$ و $q = Q(x, y, z)$، أى بحيث يكون

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial p} & \frac{\partial f}{\partial q} \\ \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial q} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{١١}$$

(وذلك على شكل مطابقة) وبحيث تكون المعادلة ذات التفاضلات الكلية :

$$dz = p\,dx + q\,dy = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy \qquad (٨)$$

لهاتين القيمتين لـ p و q ، قابلة للتكامل ، أى أن يكون $0 = P\frac{\partial Q}{\partial z} - Q\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}$

لنشتق (١) و (١٠) جزئيا بالنسبة لـ x و y فنجد :

تمارين

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \qquad (١٢)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0 \qquad (١٣)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0 \qquad (١٤)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \qquad (١٥)$$

وبضرب (١٢) فى $\frac{\partial F}{\partial p}$ و (١٣) فى $\frac{\partial F}{\partial q}$ و (١٤) فى $\frac{\partial f}{\partial p}$ — و (١٥) فى $\frac{\partial f}{\partial q}$ — ثم الجمع،

فإننا نحصل على (مع ملاحظة أن $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$) .

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial p} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial y} - \left(p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية جزئية خطية فى F على اعتبارها دالة للمتغيرات المستقلة $x,\ y,\ z,\ p,\ q$

إن المجموعة المساعدة هى

$$\frac{dp}{\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{dq}{\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{-\left(p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}\right)} = \frac{dF}{0} \qquad (١٦)$$

وبهذا يمكننا أن نأخذ للمعادلة (١٠) أى حل من هذه المجموعة يحوى p أو q أو كليهما ويحتوى كذلك على ثابت اختيارى شريطة أن يحقق (١١)

مثال ٨ :

حل المعادلة $q = -xp + p^2$

لدينا هنا $f = p^2 - xp - q$ وبالتالى فإن $\frac{\partial f}{\partial q} = -1$ ، $\frac{\partial f}{\partial p} = 2p - x$ ، $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ ، $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ، $\frac{\partial f}{\partial x} = -p$ ومنه :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} = -p, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \qquad -\left(p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}\right) = -2p^2 + xp + q$$

والمجموعة المساعدة (١٦) هى

$$\frac{dp}{-p} = \frac{dq}{0} = \frac{dx}{-2p+x} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{-2p^2 + xp + q}$$

ومن $\frac{dp}{-p} = \frac{dy}{1}$ نجد $\ln p = -y + \ln a$ أو $p = ae^{-y}$

وبالاستفادة من المعادلة التفاضلية المفروضة نجد $q = -xp + p^2 = -axe^{-y} + a^2e^{-2y}$

وبالتالى فإن $dz = p\,dx + q\,dy$ تصبح $dz = ae^{-y}dx + (-axe^{-y} + a^2e^{-2y})dy$ وبالتكامل نجد :

$$z = axe^{-y} - \tfrac{1}{2}a^2e^{-2y} + b$$

ولا يوجد حل وحيد

أنظر كذلك المسألة ١٥

مسائل محلولة

(سوف لا نعطى فى حلول المسائل التالية معادلات تقودنا إلى حل عام)

النمط I : $f(p,q) = 0$

١ — حل المعادلة $p^2 + q^2 = 9$

أن $z = ax + by + c$ حل تام لها شريطة أن يكون $a^2 + b^2 = (9)$

والمعادلات التى تعين الحل الوحيد هى

$0 = 1.$ $0 = x - \frac{a}{\sqrt{9-a^2}}\,y$, $z = ax + \sqrt{9-a^2}\,y + c$ وبالتالى لا يوجد حل وحيد

٢ — حل المعادلة $pq + p + q = 0.$

أن $z = ax + by + c$ حيث $ab + a + b = 0$ ، أى أن $z = ax - \frac{a}{a+1}y + c$ حل تام للمعادلة .

لا يوجد حلول وحيدة .

النمط II : $z = px + qy + f(p,q)$

٣ — حل المعادلة $z = px + qy + p^2 + pq + q^2$

أن $z = ax + by + a^2 + ab + b^2$ حل تام لها

وباشتقاق الحل التام بالنسبة لـ a و b نجد :

$$0 = x + 2a + b, \quad 0 = y + a + 2b$$

ونجد من هاتين المعادلتين أن $b = (x-2y)/3$, $a = (y-2x)/3$, وبالتعويض فى الحل التام نجد الحل الوحيد.

$$3z = xy - x^2 - y^2$$

٤ — حل المعادلة $z = px + qy + p^2q^2$

أن $z = ax + by + a^2b^2$ حل تام لها . وبالاشتقاق بالنسبة لـ a و b نحصل على المعادلتين $0 = x + 2ab^2$ ·

و $0 = y + 2a^2 b$، ومنه نجد $b = -\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{2y}}$، $a = -\sqrt[3]{\dfrac{y^2}{2x}}$ والحل الوحيد هو

$$z = -x\sqrt[3]{\frac{y^2}{2x}} - y\sqrt[3]{\frac{x^2}{2y}} + \sqrt[3]{\frac{x^2 y^2}{16}} = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{4}\, x^{2/3} y^{2/3}$$

النمط III : $f(z, p, q) = 0$

٥ – حل المعادلة $4(1+z^3) = 9z^4 pq$

لنفرض $z = F(x+ay) = F(u)$ فيكون $p = \dfrac{dz}{du}$، $q = a\dfrac{dz}{du}$ ، بذلك تأخذ المعادلة المفروضة الشكل :

$$4(1+z^3) = 9az^4 \left(\frac{dz}{du}\right)^2 \quad \text{أو} \quad \frac{3\sqrt{a}\, z^2}{\sqrt{1+z^3}}\, dz = 2du$$

وبالتكامل نجد $\sqrt{a(1+z^3)} = u + b$. ومنه يكون $a(1+z^3) = (x+ay+b)^2$ حلا تاما .

وبالاشتقاق بالنسبة لـ a و b نجد :

$$1 + z^3 = 2(x+ay+b)y \quad \text{و} \quad 0 = 2(x+ay+b)$$

وبالتالى فإن $z^3 + 1 = 0$ حل وحيد للمعادلة

٦ – حل المعادلة $p(1-q^2) = q(1-z)$

لنفرض $z = F(x+ay) = F(u)$ فيكون $p = \dfrac{dz}{du}$، $q = a\dfrac{dz}{du}$ وتأخذ المعادلة المفروضة الشكل :

$$\left(\frac{dz}{du}\right)\left[1 - a^2\left(\frac{dz}{du}\right)^2\right] = a\frac{dz}{du}(1-z) \quad \text{أو} \quad \left(\frac{dz}{du}\right)\left[1 - a + az - a^2\left(\frac{dz}{du}\right)^2\right] = 0$$

وعندئذ يكون $\dfrac{dz}{du} = 0$ ومنه $z = c$ أو يكون $1 - a + az - a^2\left(\dfrac{dz}{du}\right)^2 = 0$ ومنه $\dfrac{a\,dz}{\sqrt{1-a+az}} = du$ وبالتالى

$$2\sqrt{1-a+az} = u + b = x + ay + b \quad \text{أو} \quad 4(1-a+az) = (x+ay+b)^2$$

أن كلا من $z = c$ و $4(1-a+az) = (x+ay+b)^2$ حلا ، إلا أن الأخير حل تام . لنستخدم هذا الحل الأخير ولنكتب المعادلات التى تعطى الحل الوحيد .

$$g = 4(1-a+az) - (x+ay+b)^2 = 0 \quad \frac{\partial g}{\partial a} = 4(-1+z) - 2y(x+ay+b) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial b} = -2(x+ay+b) = 0$$

ومنها نرى أنه لا يوجد حل وحيد .

٧ – حل المعادلة $1 + p^2 = qz$

لنفرض $z = F(x+ay) = F(u)$ فيكون $p = \dfrac{dz}{du}$، $q = a\dfrac{dz}{du}$ ، وتأخذ المعادلة المفروضة الشكل :

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 - az\frac{dz}{du} + 1 = 0 \quad \text{أو} \quad \frac{dz}{az - \sqrt{a^2z^2 - 4}} = \tfrac{1}{2}\,du$$

وإذا تخلصنا من المقام فى الطرف الأيسر من المعادلة الأخيرة نجد $(az + \sqrt{a^2z^2 - 4})dz = 2\,du$

وبالتكامل نحصل على الحل $\tfrac{1}{2}az^2 + \frac{1}{a}\left[\frac{az}{2}\sqrt{a^2z^2 - 4} - 2\ln(az + \sqrt{a^2z^2 - 4})\right] = 2(u + b)$

وهكذا فإن $a^2z^2 + az\sqrt{a^2z^2 - 4} - 4\ln(az + \sqrt{a^2z^2 - 4}) = 4a(x + ay + b)$ حل تام .

يلاحظ كذلك أن $a^2z^2 - az\sqrt{a^2z^2 - 4} + 4\ln(az + \sqrt{a^2z^2 - 4}) = 4a(x + ay + b)$ ، التى تنتج عن

$\frac{dz}{az + \sqrt{a^2z^2 - 4}} = \tfrac{1}{2}\,du$ حل تام كذلك .

النمط IV : $f_1(x, p) = f_2(y, q)$

٨ – حل المعادلة $\sqrt{p} - \sqrt{q} + 3x = 0$ أو $\sqrt{p} + 3x = \sqrt{q}$

لنضع $\sqrt{p} + 3x = a$ فيكون $\sqrt{q} = a$ ومنه $p = (a - 3x)^2$ و $q = a^2$ ويكون :

$$z = \int p\,dx + \int q\,dy + b = \int (a - 3x)^2\,dx + a^2\int dy + b \quad \text{أو} \quad z = -\frac{1}{9}(a - 3x)^3 + a^2y + b$$

حلا تاما للمعادلة المفروضة . لا يوجد حلول وحيدة .

٩ – حل المعادلة $q = -px + p^2$

لنضع $p^2 - px = a$ فيكون $q = a$ ويكون $p = \tfrac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 4a})$ وبالتالى فإن :

$$z = \tfrac{1}{2}\int (x + \sqrt{x^2 + 4a})\,dx + a\int dy + b \quad \text{أو} \quad z = \tfrac{1}{4}(x^2 + x\sqrt{x^2 + 4a}) + a\ln(x + \sqrt{x^2 + 4a}) + ay + b$$

حل تام . ونحصل على حل تام آخر باستخدام طريقة شاربيت كما فى المثال ٨ . لا يوجد حلول وحيدة للمعادلة .

استخدام التحويلات :

١٠ – حل المعادلة $pq = x^m y^n z^{2l}$ أو $\frac{pz^{-l}}{x^m}\cdot\frac{qz^{-l}}{y^n} = 1$

أن التحويل

$$Z = \frac{z^{1-l}}{1-l}, \quad X = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad Y = \frac{y^{n+1}}{n+1}, \quad \frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{\partial Z}{\partial x}\frac{dx}{dX} = z^{-l}p\frac{1}{x^m}, \quad \frac{\partial Z}{\partial Y} = \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{dy}{dY} = z^{-l}q\frac{1}{y^n}$$

ينقل المعادلة المفروضة إلى $\frac{\partial Z}{\partial X}\cdot\frac{\partial Z}{\partial Y} = 1$

والمعادلة الأخيرة من النمط I وحلها هو $Z = aX + \frac{1}{a}Y + c$

إن $\frac{z^{1-l}}{1-l} = a\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{y^{n+1}}{a(n+1)} + c$ حل تام للمعادلة

لايوجد حلول وحيدة .

١١ — حل المعادلة $x^2p^2 + y^2q^2 = z$

(١) أن التحويل

$$X = \ln x, \quad Y = \ln y, \quad Z = 2z^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{\partial Z}{\partial x}\frac{dx}{dX} = pxz^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial Z}{\partial Y} = \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{dy}{dY} = qyz^{-\frac{1}{2}}$$

ينقل المعادلة المفروضة إلى الشكل $z(\frac{\partial Z}{\partial X})^2 + z(\frac{\partial Z}{\partial Y})^2 = z$ أو $(\frac{\partial Z}{\partial X})^2 + (\frac{\partial Z}{\partial Y})^2 = 1$ وهى من النمط I

أن $Z = aX + bY + c$ أو $4z = (a\ln x + b\ln y + c)^2$ ، حيث $a^2 + b^2 = 1$ ، حل تام وأن $z = 0$ حل وحيد .

(٢) أن التحويل $X = \ln x, \quad Y = \ln y, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial X}\frac{dX}{dx} = \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial X}, \quad q = \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial Y}$

ينقل المعادلة المفروضة إلى الشكل $(\frac{\partial z}{\partial X})^2 + (\frac{\partial z}{\partial Y})^2 = z$ وهى من النمط III .

لنضع $z = F(X + aY) = F(u)$ فيكون $\frac{\partial z}{\partial X} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial X} = \frac{dz}{du}, \quad \frac{dz}{dY} = a\frac{dz}{du}$ ومنه :

$$(\frac{dz}{du})^2 + a^2(\frac{dz}{du})^2 = z \quad \text{أو} \quad \sqrt{1+a^2}\,\frac{dz}{\sqrt{z}} = du$$

وبالتكامل نجد $2\sqrt{1+a^2}\,z^{\frac{1}{2}} = u + b = X + aY + b = \ln x + a\ln y + b$

وبالتالى فإن $4(1+a^2)z = (\ln x + a\ln y + b)^2$ حل تام . أن الحل الوحيد هو $z = 0$

١٢ — حل المعادلة $4xyz = pq + 2px^2y + 2qxy^2$

لنضع $x = X^{\frac{1}{2}}, \quad y = Y^{\frac{1}{2}}$ فيكون $p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial X}\frac{dX}{dx} = 2X^{\frac{1}{2}}\frac{\partial z}{\partial X}$ ومنه $q = \frac{\partial z}{\partial Y}\frac{dY}{dy} = 2Y^{\frac{1}{2}}\frac{\partial z}{\partial Y}$

وبالتعويض فى المعادلة المفروضة نجد $z = X\frac{\partial z}{\partial X} + Y\frac{\partial z}{\partial Y} + \frac{\partial z}{\partial X}\frac{\partial z}{\partial Y}$ وهذه من النمط II

أن $z = aX + bY + ab$ أو $z = ax^2 + by^2 + ab$ حل تام .

لحصول على الحل الوحيد نشتق الحل التام بالنسبة لـ a و b فنجد $0 = y^2 + a, \quad 0 = x^2 + b$. وبحذف a و b من هاتين المعادلتين ومعادلة الحل التام نحصل على الحل الوحيد $z + x^2y^2 = 0$

١٣ — حل المعادلة $p^2x^2 = z(z - qy)$

أن التحويل $q = \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial Y}, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial X}\frac{dX}{dx} = \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial X}, \quad X = \ln x, \quad Y = \ln y$ ينقل المعادلة المفروضة

إلى الشكل (أ) $(\frac{\partial z}{\partial X})^2 = z(z - \frac{\partial z}{\partial Y})$ وهى من النمط III .

لنضع $z = F(X + aY) = F(u)$ فيكون $\frac{\partial z}{\partial X} = \frac{dz}{du}, \frac{\partial z}{\partial Y} = a\frac{dz}{du}$ وتأخذ (أ) الشكل $(\frac{dz}{du})^2 = z^2 - az\frac{dz}{du}$

وعلى هذا $\frac{dz}{du} = \frac{1}{2}z(\sqrt{a^2+4} - a)$, $2\frac{dz}{z} = (\sqrt{a^2+4} - a)du$ وبالتكامل نجد $\ln z^2 = (\sqrt{a^2+4} - a)(u + b)$

وأخيرا فإن $\ln z^2 = (\sqrt{a^2+4} - a)(\ln x + a\ln y + b)$ حل تام

لا يوجد حلول وحيدة .

١٤ — حل المعادلة $p^2 + q^2 = z^2(x + y)$ أو $(\frac{p}{z})^2 + (\frac{q}{z})^2 = x + y$

أن التحويل $Z = \ln z,\quad p = z\frac{\partial Z}{\partial x},\quad q = z\frac{\partial Z}{\partial y}$ ينقل المعادلة المفروضة إلى الشكل :

$(\frac{\partial Z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial Z}{\partial y})^2 = x + y$ أو $(\frac{\partial Z}{\partial x})^2 - x = y - (\frac{\partial Z}{\partial y})^2$ وهذه من النمط IV .

لنضع $(\frac{\partial Z}{\partial x})^2 - x = a = y - (\frac{\partial Z}{\partial y})^2$. فيكون $\frac{\partial Z}{\partial x} = (a + x)^{\frac{1}{2}}$ و $\frac{\partial Z}{\partial y} = (y - a)^{\frac{1}{2}}$

وبالتالى فإن $Z = \int (a + x)^{\frac{1}{2}}dx + \int (y - a)^{\frac{1}{2}}dy + b$ أو $\ln z = \frac{2}{3}(a + x)^{3/2} + \frac{2}{3}(y - a)^{3/2} + b$ حل تام .

طريقة شاربيت :

١٥ — حل المعادلة $16p^2z^2 + 9q^2z^2 + 4z^2 - 4 = 0$

لنضع $f(x, y, z, p, q) = 16p^2z^2 + 9q^2z^2 + 4z^2 - 4$

فيكون $\frac{\partial f}{\partial q} = 18qz^2$, $\frac{\partial f}{\partial p} = 32pz^2$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 32p^2z + 18q^2z + 8z$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}$ الجموعة المساعدة .

$$\frac{dp}{\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{dq}{\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{-(p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q})}$$

تأخذ هنا الشكل

$$\frac{dp}{32p^3z + 18pq^2z + 8pz} = \frac{dq}{32p^2qz + 18q^3z + 8qz} = \frac{dx}{-32pz^2} = \frac{dy}{-18qz^2} = \frac{dz}{-32p^2z^2 - 18q^2z^2}$$

وباستعمال المضاريب $4z, 0, 1, 0, 4p$ نجد :

$$4z(32p^3z + 18pq^2z + 8pz) + 1(-32pz^2) + 4p(-32p^2z^2 - 18q^2z^2) = 0$$

وبالتالى فإن $dx + 4p\,dz + 4z\,dp = 0$

وهكذا يكون $x + 4pz = a$ ومنه $p = -\frac{x-a}{4z}$. وبالتعويض عن p فى المعادلة التفاضلية المفروضة نجـد

$$(x-a)^2 + 9q^2z^2 + 4z^2 - 4 = 0.$$

لنأخذ الجـذر $q = \frac{2}{3z}\sqrt{1 - z^2 - \frac{1}{4}(x-a)^2}$

فيكون $dz = p\,dx + q\,dy = -\frac{x-a}{4z}\,dx + \frac{2}{3z}\sqrt{1 - z^2 - \frac{1}{4}(x-a)^2}\,dy$ أو $dy = \frac{3[z\,dz + \frac{1}{4}(x-a)dx]}{2\sqrt{1 - z^2 - \frac{1}{4}(x-a)^2}}$

وعلى هذا فإن $y - b = -\frac{3}{2}\sqrt{1 - z^2 - \frac{1}{4}(x-a)^2}$ أو $\frac{(x-a)^2}{4} + \frac{(y-b)^2}{9/4} + z^2 = 1$ حل تام للمعادلة .

أن الحل التام المذكور يتكون من مجموعة من مجسمات القطوع الناقصة تقع مراكزها فى المستوى xoy .

أن أنصاف أقطار هذه المجسمات هى وحدتان فى اتجاه مواز للمحور x و $3/2$ وحدة فى اتجاه مواز للمحور y ووحدة واحدة فى اتجاه موازى للمحور z . والحل الوحيد للمعادلة يتكون من المستويين المتوازيين $z = \pm 1$.

يمكن الحصول على حل تام آخر بملاحظة أن المعادلة المفروضة من النمط III فإذا استخدمنا $F(x + ay) = F(u)$ ووضعنا $p = \frac{dz}{du}$ و $q = a\frac{dz}{du}$ فإن المعادلة تأخذ الشكل

$$16z^2\left(\frac{dz}{du}\right)^2 + 9a^2z^2\left(\frac{dz}{du}\right)^2 + 4z^2 - 4 = 0 \quad \text{أو} \quad \frac{z\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{2}{\sqrt{16+9a^2}}\,du$$

وبالتالى فإن

$$-\sqrt{1-z^2} = \frac{2}{\sqrt{16+9a^2}}(u+b) = \frac{2}{\sqrt{16+9a^2}}(x + ay + b)$$

يمثل هذا الحل التام $(16 + 9a^2)(1 - z^2) = 4(x + ay + b)^2$ مجموعة من الاسطوانات الناقصة المقطع بعناصر موازية للمستوى xOy . أن المحور الكبير لمقطع هذه الأسطوانات يقع فى المستوى xOy وأن المحور الصغير مواز للمحور z وطوله يساوى وحدتين .

مسائل اضافية

أوجد حلا تاما لكل من المعادلات التالية وأوجد الحل الوحيد (إن وجـد) :

١٦- $p = q^2$ $\qquad z = b^2x + by + c$

١٧- $p^2 + p = q^2$ $\qquad z = ax + by + c$ حيث $b^2 = a^2 + a$

١٨- $pq = p + q$ $\qquad (b-1)z = bx + b(b-1)y + c$

١٩- $z = px + qy + pq$ $\qquad z = ax + by + ab$ الحل الوحيد $z = -xy$

٢٠- $p^2 + q^2 = 4z$ $\qquad z(1 + a^2) = (x + ay + b)^2$ الحل الوحيد $z = 0$

٢١- $pz = 1 + q^2$ $\qquad z^2 - z\sqrt{z^2 - 4a^2} + 4a^2 \ln(z + \sqrt{z^2 - 4a^2}) = 4(x + ay + b)$

٢٢- $z^2(p^2 + q^2 + 1) = 1$ $\qquad (1 + a^2)(1 - z^2) = (x + ay + b)^2$ الحل الوحيد $z^2 - 1 = 0$

٢٣ - $p^2 + pq = 4z$ $\qquad$ $(1+a)z = (x + ay + b)^2$ الحل الوحيد $z=0$

٢٤ - $p^2 - x = q^2 - y$ $\qquad$ $3(z-b) = 2(x+a)^{3/2} + 2(y+a)^{3/2}$

٢٥ - $yp - x^2q^2 = x^2y$ $\qquad$ $4(a-1)y^3 = (3z - ax^3 - b)^2$

٢٦ - $(1-y^2)xq^2 + y^2p = 0$ $\qquad$ $(2z - ax^2 + b)^2 = 4a(y^2 - 1)$

٢٧ - $x^4p^2 - yzq - z^2 = 0$ $\qquad$ $x \ln z = a + (a^2 - 1)x \ln y + bx$

إرشاد : استخدم $X = 1/x,\ Y = \ln y,\ Z = \ln z.$

٢٨ - $x^4p^2 + y^2zq - 2z^2 = 0$ $\qquad$ $xy \ln z = ay + (a^2 - 2)x + bxy$

إرشاد : استخدم $X = 1/x,\ Y = 1/y,\ Z = \ln z.$

٢٩ - $x^4p^2 + y^2q = 0$ $\qquad$ $x^2(zy + a + by)^2 + ay^2 = 0$

٣٠ - $2py^2 - q^2z = 0$ $\qquad$ $z^2 = a^2x + ay^2 + b$

٣١ - $q = xp + p^2$ $\qquad$ $z = 2axe^y + 2a^2e^{2y} + b$

٣٢ - $zp^2 - y^2p + y^2q = 0$ $\qquad$ $yz^2 = 2(axy + ay^2 + a^2 + by)$

إرشاد : $pz = a$; $\dfrac{dp}{p^3} = \dfrac{dz}{-p^2z}$ و $q = \dfrac{a}{z}\left(1 - \dfrac{a}{y^2}\right)$

٣٣ - $pq + 2x(y+1)p + y(y+2)q - 2(y+1)z = 0$

ج : $z = ax + b(y^2 + 2y + a)$ $\qquad$ الحل الوحيد $z + x(y^2 + 2y) = 0$

الفصل الحادى والثلاثون

المعادلات التفاضلية الجزئية المتجانسة
من رتب عليا بمعاملات ثابتة

تسمى كل معادلة تفاضلية خطية فى المتغير غير المستقل z وفى مشتقاته الجزئية معادلة تفاضلية جزئية خطية مثل :

$$(x^2+y^2)\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 2x\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 5xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + x^3\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} + yz = e^{x+y} \quad (1)$$

ورتبة المعادلة (١) تساوى ثلاثة وهى رتبة المشتقة الأعلى رتبة فى المعادلة .

وتسمى كل معادلة تفاضلية جزئية خطية ،جميع المشتقات الواردة فيها من الرتبة نفسها ، معادلة متجانسة مثل :

$$x^2\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + xy\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} + 2\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x^2 + y^3 \quad (2)$$

علماً بأنه لايوجد اتفاق كامل بين المؤلفين فى استخدام هذه التسمية .

المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة بمعاملات ثابتة :

لننظر فى المعادلات :

$$A\frac{\partial z}{\partial x} + B\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x + 2y \quad (5)$$

حيث الأعداد A و B و C ثوابت حقيقية .

سنرى أن طرق حل المعادلات (٣) – (٥) موازية لتلك الطرق التى استخدمناها عند حل المعادلات التفاضلية العادية الخطية من الشكل :

$$f(D)y = Q(x) \text{ حيث } D = \frac{d}{dx}$$

وسنستخدم هنا الرمزين $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$ و $D_y = \frac{\partial}{\partial y}$ وبذلك يمكن كتابة المعادلات :

(٣) – (٥) بالشكل :

$$f(D_x, D_y)z = (AD_x + BD_y)z = 0 \quad (3')$$

$$f(D_x, D_y)z = (AD_x^2 + BD_xD_y + CD_y^2)z = 0 \quad (4')$$

$$f(D_x, D_y)z = (AD_x^2 + BD_xD_y + CD_y^2)z = x + 2y \quad (5')$$