الفصل الحادى والثلاثون

المعادلات التفاضلية الجزئية المتجانسة
من رتب عليا بمعاملات ثابتة

تسمى كل معادلة تفاضلية خطية فى المتغير غير المستقل z وفى مشتقاته الجزئية معادلة تفاضلية جزئية خطية مثل :

$$(x^2 + y^2)\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 2x\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 5xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + x^3\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} + yz = e^{x+y} \quad (١)$$

ورتبة المعادلة (١) تساوى ثلاثة وهى رتبة المشتقة الأعلى رتبة فى المعادلة .

وتسمى كل معادلة تفاضلية جزئية خطية ، جميع المشتقات الواردة فيها من الرتبة نفسها ، معادلة متجانسة مثل :

$$x^2\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + xy\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} + 2\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x^2 + y^3 \qquad (٢)$$

علماً بأنه لايوجد اتفاق كامل بين المؤلفين فى استخدام هذه التسمية .

المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة بمعاملات ثابتة :

لننظر فى المعادلات :

$$A\frac{\partial z}{\partial x} + B\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad (٣)$$

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \qquad (٤)$$

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x + 2y \qquad (٥)$$

حيث الأعداد A و B و C ثوابت حقيقية .

سنرى أن طرق حل المعادلات (٣) – (٥) موازية لتلك الطرق التى استخدمناها عند حل المعادلات التفاضلية العادية الخطية من الشكل :

$$f(D)y = Q(x) \quad \text{حيث} \quad D = \frac{d}{dx}$$

وسنستخدم هنا الرمزين $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$ و $D_y = \frac{\partial}{\partial y}$ وبذلك يمكن كتابة المعادلات (٣) – (٥) بالشكل :

$$f(D_x, D_y)z = (AD_x + BD_y)z = 0 \qquad (\acute{٣})$$

$$f(D_x, D_y)z = (AD_x^2 + BD_xD_y + CD_y^2)z = 0 \qquad (\acute{٤})$$

$$f(D_x, D_y)z = (AD_x^2 + BD_xD_y + CD_y^2)z = x + 2y \qquad (\acute{٥})$$

أن المعادلة (٣َ) من الرتبة الأولى وحلها العام (أنظر الفصل ٢٩) هو $z = \phi(y - \frac{B}{A}x)$ حيث ϕ اختيارى .

لنفرض الآن أن $z = \phi(y + mx) = \phi(u)$ حيث ϕ اختيارى ، هو حل لـ (٤َ) ولنعوض

$$D_x z = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d\phi}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = m\frac{d\phi}{du}, \qquad D_y z = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d\phi}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{d\phi}{du}$$

فى (٤َ) فنحصل على

$$\frac{d^2\phi}{du^2}(Am^2 + Bm + C) = 0$$

وبما أن ϕ اختيارى فإن $d^2\phi/du^2$ لايطابق الصفر ، وبالتالى فإن m أحد الجذرين m_1 و m_2 لـ $Am^2+Bm+C=o$.

فإذا كان $m_1 \neq m_2$ فإن $z = \phi_1(y+m_1x)$ و $z = \phi_2(y+m_2x)$ حلان مختلفان لـ (٤َ) وعندئذ يكون واضحاً أن :

$$z = \phi_1(y + m_1x) + \phi_2(y + m_2x)$$

حل كذلك لها . أن هذا الحل يحتوى على دالتين اختياريتين وهو الحل العـــام .

وبوجه عام إذا كان :

$$f(D_x, D_y)z = (D_x - m_1D_y)(D_x - m_2D_y)\cdots\cdots\cdot(D_x - m_nD_y)z = 0 \quad (٦)$$

وكان $m_1 \neq m_2 \neq \cdots\cdots\cdots \neq m_n$ فإن :

$$z = \phi_1(y + m_1x) + \phi_2(y + m_2x) + \cdots\cdots\cdot + \phi_n(y + m_nx) \quad (٧)$$

الحل العام لـ $f(D_x, D_y)z = 0$

مثال ١ :

حل المعادلة : $(D_x^2 - D_xD_y - 6D_y^2)z = (D_x + 2D_y)(D_x - 3D_y)z = 0$

لدينا هنا $m_1 = -2,\ m_2 = 3$ والحل العام هو : $y = \phi_1(y - 2x) + \phi_2(y + 3x)$

أنظر المسألتين ١ – ٢

أما إذا كان $m_1 = m_2 = \cdots\cdots = m_k \neq m_{k+1} \neq \cdots\cdots \neq m_n$ فإن (٦) تأخذ الشكل :

$$f(D_x, D_y)z = (D_x - m_1D_y)^k(D_x - m_{k+1}D_y)\cdots\cdots(D_x - m_nD_y)z = 0 \quad (٦َ)$$

ويكون ذلك الجزء من الحل العام الموافق للعوامل الـ k المتساوية هو :

$$\phi_1(y + m_1x) + x\phi_2(y + m_1x) + x^2\phi_3(y + m_1x) + \cdots\cdots + x^{k-1}\phi_k(y + m_1x)$$

ويكون الحل العام لـ (٦َ) هو :

$$z = \phi_1(y + m_1x) + x\phi_2(y + m_1x) + \cdots\cdots + x^{k-1}\phi_k(y + m_1x) + \phi_{k+1}(y + m_{k+1}x) + \cdots\cdots + \phi_n(y + m_nx),$$

حيث $\phi_1, \phi_2, \cdots\cdots\phi_n$ دوال اختيارية .

مثال ٢ :

حل المعادلة : $(D_x^3 - D_x^2 D_y - 8D_x D_y^2 + 12D_y^3)z = (D_x - 2D_y)^2 (D_x + 3D_y)z = 0$

لدينا هنا $m_1 = m_2 = 2, \; m_3 = -3$ والحل العام هو : $z = \phi_1(y+2x) + x\phi_2(y+2x) + \phi_3(y-3x)$

أنظر كذلك المسألتين ٣ – ٤

إذا كان أحد أعداد (٦) ، وليكن m_1 تخيلياً فإن هناك عدداً آخر ، وليكن m_2 ،مرافقاً لـ m_1 . لنفرض أن $m_1 = a+bi$ وأن $m_2 = a-bi$ عندئذ تأخذ (٦) الشكل :

$$f(D_x, D_y)z = [D_x - (a+bi)D_y][D_x - (a-bi)D_y](D_x - m_3D_y)\cdots\cdots(D_x - m_nD_y)z = 0 \quad (٦'')$$

ويكون جزء الحل العام الموافق للعاملين الأول والثانى هو :

$$\phi_1(y+ax+ibx) + \phi_1(y+ax-ibx) + i[\phi_2(y+ax+ibx) - \phi_2(y+ax-ibx)]$$

حيث ϕ_1 و ϕ_2 دالتان حقيقيتان اختياريتان ، ويكون الحل العام لـ (٦″) هو :

$$z = \phi_1(y+ax+ibx) + \phi_1(y+ax-ibx) + i[\phi_2(y+ax+ibx) - \phi_2(y+ax-ibx)] + \phi_3(y+m_3x) + \cdots\cdots\cdots + \phi_n(y+m_nx)$$

مثال ٣ :

حل المعادلة :

$$(D_x^4 - D_x^3D_y + 2D_x^2D_y^2 - 5D_xD_y^3 + 3D_y^4)z$$
$$= (D_x - D_y)^2 [D_x + \tfrac{1}{2}(1+i\sqrt{11})D_y][D_x + \tfrac{1}{2}(1-i\sqrt{11})D_y]z = 0$$

لدينا هنا $m_4 = -\tfrac{1}{2}(1-i\sqrt{11})$ ، $m_3 = -\tfrac{1}{2}(1+i\sqrt{11})$ ، $m_1 = m_2 = 1$ ، والحل العام هو :

$$z = \phi_1(y+x) + x\phi_2(y+x) + \phi_3[y - \tfrac{1}{2}(1+i\sqrt{11})x] + \phi_3[y - \tfrac{1}{2}(1-i\sqrt{11})x] + i[\phi_4\{y - \tfrac{1}{2}(1+i\sqrt{11})x\} - \phi_4\{y - \tfrac{1}{2}(1-i\sqrt{11})x\}].$$

أنظر كذلك المسألة ٥

يتكون الحل العام للمعادلة :

$$f(D_x, D_y)z = (AD_x^2 + BD_xD_y + CD_y^2)z = x + 2y \quad (٥')$$

من الحل العام للمعادلة المختصرة :

$$f(D_x, D_y)z = (AD_x^2 + BD_xD_y + CD_y^2)z = 0 \quad (٤')$$

مضافاً له حلا خاصاً لـ (٥′) . سنسمى الحل العام لـ (٤′) الدالة المتممة لـ (٥′) وقبل أن نبدأ بذكر طرق ايجاد الحل الخاص للمعادلة :

$$f(D_x, D_y)z = (D_x - m_1D_y)(D_x - m_2D_y)\cdots\cdots(D_x - m_nD_y)z = F(x,y) \quad (٨)$$

نعرف المؤثر $\dfrac{1}{f(D_x, D_y)}$ بالمتطابقة :

$$f(D_x, D_y)\frac{1}{f(D_x, D_y)}F(x,y) = F(x,y)$$

يمكن إيجاد التكامل الخاص والذى نرمز له بـ

$$z = \frac{1}{f(D_x, D_y)} F(x,y) = \frac{1}{(D_x - m_1 D_y)(D_x - m_2 D_y)\cdots\cdots(D_x - m_n D_y)} F(x,y)$$

كما فى الفصل ١٣ ، بحل n معادلة من الرتبة الأولى :

$$u_1 = \frac{1}{D_x - m_n D_y} F(x,y), \quad u_2 = \frac{1}{D_x - m_{n-1} D_y} u_1, \quad \ldots\ldots, \quad z = u_n = \frac{1}{D_x - m_1 D_y} u_{n-1} \qquad (٩)$$

يلاحظ أن كل معادلة من (٩) هى من الشكل :

$$p - mq = g(x,y) \qquad (١٠)$$

وإننا نحتاج من كل منها إلى حل واحد فقط ، وكلما كان هذا الحل أبسط كلما كان أفضل . سنرى فى المسألة ٦ القادمة ، القاعدة التالية للحصول على حل لـ (١٠) من الشكل المذكور .

نحسب أولا $z = \int g(x, a - mx)\,dx$ ثم نحذف ثابت التكامل ونستبدل a بـ $y + mx$

مثال ٤ :

حل المعادلة : $(D_x^2 - D_x D_y - 6D_y^2)z = (D_x + 2D_y)(D_x - 3D_y)z = x + y$

أن الدالة المتممة استناداً إلى المثال (١) هى : $z = \phi_1(y - 2x) + \phi_2(y + 3x)$

وللحصول على التكامل الخاص الذى نرمز له بـ : $z = \frac{1}{D_x + 2D_y}\left[\frac{1}{D_x - 3D_y}(x + y)\right]$

(أ) ضع $u = \frac{1}{D_x - 3D_y}(x + y)$ ثم أوجد التكامل الخاص لـ $(D_x - 3D_y)u = x + y$

وباتباع طريقة المسألة ٦ ينتج $u = \int (x + a - 3x)dx = ax - x^2$ وباستبدال a بـ $y + 3x$ نجد

$$u = xy + 2x^2$$

(ب) ضع $z = \frac{1}{D_x + 2D_y} u = \frac{1}{D_x + 2D_y}(xy + 2x^2)$ ثم أوجد التكامل الخاص لـ

$$(D_x + 2D_y)z = xy + 2x^2$$

عندئذ ينتج $z = \int [x(a + 2x) + 2x^2]dx = \frac{1}{2}ax^2 + \frac{4}{3}x^3$ وباستبدال a بـ $y - 2x$ نحصل على $z = \frac{1}{2}x^2 y + \frac{1}{3}x^3$

والحل العام إذن : $z = \phi_1(y - 2x) + \phi_2(y + 3x) + \frac{1}{2}x^2 y + \frac{1}{3}x^3$

أنظر كذلك المسألتين ٨ – ٩

يمكن كذلك استخدام طريقة العوامل غير المعينة إذا كان $F(x, y)$ محتوياً على $\sin(ax + by)$ أو $\cos(ax + by)$

مثال ٥ :

حل المعادلة : $(D_x^2 + 5D_x D_y + 5D_y^2)z = [D_x - \frac{1}{2}(-5 + \sqrt{5})D_y][D_x - \frac{1}{2}(-5 - \sqrt{5})D_y]z = x\sin(3x - 2y)$

إن الدالة المتممة هى : $z = \phi_1[y + \frac{1}{2}(-5 + \sqrt{5})x] + \phi_2[y + \frac{1}{2}(-5 - \sqrt{5})x]$

لنفرض التكامل الخاص بالشكل :

$$z = Ax\sin(3x-2y) + Bx\cos(3x-2y) + C\sin(3x-2y) + D\cos(3x-2y)$$

فيكون :

$$D_x^2 z = (6A-9D)\cos(3x-2y) - (6B+9C)\sin(3x-2y) - 9Ax\sin(3x-2y) - 9Bx\cos(3x-2y),$$

$$D_x D_y z = (-2A+6D)\cos(3x-2y) + (2B+6C)\sin(3x-2y) + 6Ax\sin(3x-2y) + 6Bx\cos(3x-2y),$$

$$D_y^2 z = -4D\cos(3x-2y) - 4C\sin(3x-2y) - 4Ax\sin(3x-2y) - 4Bx\cos(3x-2y)$$

ومنه :

$$(D_x^2 + 5D_xD_y + 5D_y^2)z = Ax\sin(3x-2y) + Bx\cos(3x-2y) + (C+4B)\sin(3x-2y) + (D-4A)\cos(3x-2y) = x\sin(3x-2y)$$

إذن $A = 1,\ B = C = 0,\ D = 4$ والتكامل الخاص هو :

$$z = x\sin(3x-2y) + 4\cos(3x-2y)$$

والحل العـــام هو :

$$z = \phi_1[y + \tfrac{1}{2}(-5+\sqrt{5})x] + \phi_2[y + \tfrac{1}{2}(-5-\sqrt{5})x] + x\sin(3x-2y) + 4\cos(3x-2y)$$

أنظر كذلك المسألة ١٠

يمكننا كذلك استخدام طرق مختصرة ، للوصول إلى تكاملات خاصة ، مماثلة لتلك التي استخدمناها فى الفصل ١٦

(أ) $$\frac{1}{f(D_x, D_y)} e^{ax+by} = \frac{1}{f(a,b)} e^{ax+by}$$ بشرط $f(a,b) \neq 0$

أما إذا كان $f(a,b) = 0$ فإننا نكتب $f(D_x, D_y) = (D_x - \frac{a}{b}D_y)^r g(D_x, D_y)$ حيث $g(a,b) \neq 0$ عندئذ يكون :

$$\frac{1}{(D_x - \frac{a}{b}D_y)^r} \frac{1}{g(D_x, D_y)} e^{ax+by} = \frac{1}{g(a,b)} \frac{1}{(D_x - \frac{a}{b}D_y)^r} e^{ax+by} = \frac{1}{g(a,b)} \frac{x^r}{r!} e^{ax+by}$$

(ب) $$\frac{1}{f(D_x^2, D_xD_y, D_y^2)} \sin(ax+by) = \frac{1}{f(-a^2, -ab, -b^2)} \sin(ax+by)$$

و $$\frac{1}{f(D_x^2, D_xD_y, D_y^2)} \cos(ax+by) = \frac{1}{f(-a^2, -ab, -b^2)} \cos(ax+by)$$

بشرط $$f(-a^2, -ab, -b^2) \neq 0$$

مثال ٦ :

حل المعادلة : $$(D_x^2 - 3D_xD_y + 2D_y^2)z = (D_x - D_y)(D_x - 2D_y)z = e^{2x+3y} + e^{x+y} + \sin(x-2y).$$

إن الدالة المتممة هى :

$$z = \phi_1(y+x) + \phi_2(y+2x)$$

وإن $$\frac{1}{D_x^2 - 3D_xD_y + 2D_y^2} e^{2x+3y} = \frac{1}{2^2 - 3\cdot2\cdot3 + 2\cdot3^2} e^{2x+3y} = \frac{1}{4} e^{2x+3y}$$

هو أحد حدود التكامل الخاص . وبما أن $\phi_1(y+x)$ يتضمن e^{x+y} فإننا نكتب

$$\frac{1}{D_x^2 - 3D_xD_y + 2D_y^2} e^{x+y} = \frac{1}{D_x - D_y}\left(\frac{1}{D_x - 2D_y} e^{x+y}\right) = \frac{1}{D_x - D_y}\left(\frac{1}{1-2\cdot1} e^{x+y}\right) = -\frac{1}{D_x - D_y} e^{x+y} = -xe^{x+y}$$

كذلك أن $\dfrac{1}{D_x^2-3D_xD_y+2D_y^2}\sin(x-2y) = \dfrac{1}{-1-3(2)+2(-1)(-2)^2}\sin(x-2y) = -\dfrac{1}{15}\sin(x-2y)$

والحل العام هو : $z = \phi_1(y+x)+\phi_2(y+2x)+\dfrac{1}{4}e^{2x+3y}-xe^{x+y}-\dfrac{1}{15}\sin(x-2y)$

(جـ) إذا كان $F(x,y)$ متعددة حدود ، أى من الشكل $F(x,y)=\sum p_{ij}x^iy^j$ حيث كل من i ، j عدد صحيح أو صفر وحيث P_{ij} ثوابت ، فإننا نتبع الطريقة المشروحة فيما يلى :

مثال ٧ :

حل المعادلة : $(D_x^2-D_xD_y-6D_y^2)z = x+y$ (المثال ٤).

نكتب للحصول على التكامل الخاص

$$\frac{1}{D_x^2-D_xD_y-6D_y^2}(x+y) = \frac{1}{D_x^2}\frac{1}{1-\dfrac{D_y}{D_x}-6\dfrac{D_y^2}{D_x^2}}(x+y) = \frac{1}{D_x^2}\{[1+\frac{D_y}{D_x}+\cdots](x+y)\} = \frac{1}{D_x^2}(x+y+\frac{1}{D_x})$$

$$= \frac{1}{D_x^2}(x+y+x) = \frac{1}{D_x^2}(2x+y) = \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2y$$

ونلاحظ أن $D_x(x+y)=1$ وأن $\dfrac{1}{D_x}=\int dx$

أنظر كذلك المسائل ١١ – ١٣

مسائل محلولة

١ – حل المعادلة : $(D_x^3+2D_x^2D_y-D_xD_y^2-2D_y^3)z = (D_x-D_y)(D_x+D_y)(D_x+2D_y)z = 0$

لدينا هنا $m_1=1,\ m_2=-1,\ m_3=-2$ والحل العام هو :

$$z = \phi_1(y+x)+\phi_2(y-x)+\phi_3(y-2x)$$

٢ – حل المعادلة : $(D_x^3-5D_x^2D_y+5D_xD_y^2+3D_y^3)z = (D_x-3D_y)[D_x-(1+\sqrt{2})D_y][D_x-(1-\sqrt{2})D_y]z = 0$

لدينا هنا $m_1=3,\ m_2=1+\sqrt{2},\ m_3=1-\sqrt{2}$ والحل العام هو :

$$z = \phi_1(y+3x)+\phi_2[y+(1+\sqrt{2})x]+\phi_3[y+(1-\sqrt{2})x]$$

٣ – حل المعادلة : $(D_x^3+3D_x^2D_y-4D_y^3)z = (D_x-D_y)(D_x+2D_y)^2z = 0$

بما أن : $m_1=1,\ m_2=m_3=-2$ فالحل العام هو :

$$z = \phi_1(y+x)+\phi_2(y-2x)+x\phi_3(y-2x)$$

ويمكن كتابة هذا الحل العام بشكل آخر

$$z = \phi_1(y+x)+\phi_2(y-2x)+y\phi_3(y-2x)$$

٤ – حل المعادلة $(D_x^4 - 2D_x^2D_y^2 + D_y^4)z = (D_x - D_y)^2(D_x + D_y)^2 z = 0$

لدينا هنا $m_1 = m_2 = 1,\ m_3 = m_4 = -1$ والحل العام هو

$$z = \phi_1(y+x) + x\phi_2(y+x) + \phi_3(y-x) + x\phi_4(y-x)$$

٥ – حل المعادلة $(D_x^2 - 2D_xD_y + 5D_y^2)z = [D_x - (1+2i)D_y][D_x - (1-2i)D_y]z = 0$

بما أن $m_1 = 1+2i,\ m_2 = 1-2i$ فالحل العام هو :

$$z = \phi_1(y+x+2ix) + \phi_1(y+x-2ix) + i[\phi_2(y+x+2ix) - \phi_2(y+x-2ix)]$$

حيث ϕ_1 و ϕ_2 دالتان حقيقيتان .

وإذا أخذنا $\phi_1(u) = \cos u$ و $\phi_2(u) = e^u$ ولاحظنا أن

$$e^{ibx} = \cos bx + i\sin bx, \qquad \sin bx = \frac{1}{2i}(e^{ibx} - e^{-ibx})$$
$$e^{-ibx} = \cos bx - i\sin bx, \qquad \cos bx = \frac{1}{2}(e^{ibx} + e^{-ibx})$$

فإن

$$\begin{aligned}\phi_1(y+x+2ix) &= \cos(y+x)\cos(2ix) - \sin(y+x)\sin(2ix)\\ &= \cos(y+x)\cosh 2x - i\sin(y+x)\sinh 2x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_1(y+x-2ix) &= \cos(y+x)\cos(2ix) + \sin(y+x)\sin(2ix)\\ &= \cos(y+x)\cosh 2x + i\sin(y+x)\sinh 2x,\end{aligned}$$

$$\phi_2(y+x+2ix) - \phi_2(y+x-2ix) = e^{y+x+2ix} - e^{y+x-2ix} = e^{y+x}(e^{2ix} - e^{-2ix}) = 2ie^{y+x}\sin 2x$$

وبالتالى فإننا نحصل على

$$\begin{aligned}z &= [\cos(y+x)\cosh 2x - i\sin(y+x)\sinh 2x] + [\cos(y+x)\cosh 2x + i\sin(y+x)\sinh 2x]\\ &\quad + i(2ie^{y+x}\sin 2x) = 2\cos(y+x)\cosh 2x - 2e^{y+x}\sin 2x\end{aligned}$$

كحل خاص ، على أن نلاحظ أن z دالة حقيقية فى x و y .

٦ – برهن أنه يمكن إيجاد تكامل خاص لـ $p - mq = g(x,y)$ بتكامل $dz = g(x,a-mx)dx$ ثم حذف ثابت التكامل الاختيارى واستبدال a بـ $y + mx$.

إن المجموعة المساعدة هى $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{-m} = \dfrac{dz}{g(x,y)}$. فإذا كاملنا المعادلة المشكلة من الحدين الأول والثانى نجد $y + mx = a$ وإذا استخدمنا هذه العلاقة فإن المعادلة $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dz}{g(x,y)}$ تأخذ الشكل :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dz}{g(x,a-mx)}$$

ومنه $z = \int g(x,a-mx)dx$. وكى نتخلص من الثابت الاختيارى علينا أن نستبدل a بـ $y + mx$ فى الحل الذى نحصل عليه .

٧ – أوجد باستخدام طريقة المسألة ٦ التكاملين الخاصين لـ :

(أ) $p + 3q = \cos(2x + y)$ (ب) $p - 2q = (y+1)e^{3x}$

(أ) لدينا هنا $m = -3$ $\quad g(x,y) = \cos(2x+y)$

وبالتالى فإن $z = \int g(x, a-mx)dx = \int \cos(2x+a+3x)dx = \frac{1}{5}\sin(5x+a)$ وباستبدال a بـ $y-3x$ نجد التكامل الخاص $z = \frac{1}{5}\sin(2x+y)$

(ب) $z = \int g(x,a-mx)dx = \int (a-2x+1)e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}(a+1)e^{3x} - \frac{2}{3}xe^{3x} + \frac{2}{9}e^{3x}$

وإذا وضعنا $y+2x$ محل a فنحصل على $z = \frac{1}{3}(y+2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3}xe^{3x} + \frac{2}{9}e^{3x} = \frac{1}{3}(y+\frac{5}{3})e^{3x}$

٨ – حل المعادلة : $(D_x^2 + 2D_xD_y - 8D_y^2)z = (D_x - 2D_y)(D_x + 4D_y)z = \sqrt{2x+3y}$

إن الدالة المتممة هى : $z = \phi_1(y+2x) + \phi_2(y-4x)$

للوصول إلى التكامل الخاص الذى نرمز له بـ $\frac{1}{(D_x-2D_y)(D_x+4D_y)}\sqrt{2x+3y}$ نحصل من $(D_x+4D_y)u = \sqrt{2x+3y}$ على الحل

$$u = \int [2x+3(a-mx)]^{1/2}\,dx = \int [2x+3(a+4x)]^{1/2}\,dx$$

$$= \int (14x+3a)^{1/2}\,dx = \frac{1}{21}(14x+3a)^{3/2} = \frac{1}{21}(2x+3y)^{3/2}$$

ومن $(D_x-2D_y)z = u = \frac{1}{21}(2x+3y)^{3/2}$ على الحل ؛

$$z = \frac{1}{21}\int [(2x+3(a-2x))]^{3/2}\,dx = -\frac{1}{210}(3a-4x)^{5/2} = -\frac{1}{210}(2x+3y)^{5/2}$$

والحل العام هو : $z = \phi_1(y+2x) + \phi_2(y-4x) - \frac{1}{210}(2x+3y)^{5/2}$

٩ – حل المعادلة : $(D_x - 2D_y)^2(D_x + 3D_y)z = e^{2x+y}$

أن الدالة المتممة هى : $z = \phi_1(y+2x) + x\phi_2(y+2x) + \phi_3(y-3x)$

للوصول إلى التكامل الخاص الذى نرمز له بـ $\frac{1}{(D_x-2D_y)(D_x-2D_y)(D_x+3D_y)}e^{2x+y}$ نحصل من

$(D_x+3D_y)u = e^{2x+y}$ على الحل $u = \int e^{2x+(a+3x)}dx = \int e^{5x+a}\,dx = \frac{1}{5}e^{5x+a} = \frac{1}{5}e^{2x+y}$

ومن $(D_x-2D_y)v = u = \frac{1}{5}e^{2x+y}$ على الحل $v = \frac{1}{5}\int e^{2x+(a-2x)}\,dx = \frac{1}{5}xe^{a} = \frac{1}{5}xe^{2x+y}$

ومن $(D_x-2D_y)z = v = \frac{1}{5}xe^{2x+y}$ على الحل $z = \frac{1}{5}\int xe^{a}\,dx = \frac{1}{10}x^2e^{a} = \frac{1}{10}x^2e^{2x+y}$

والحل العام هو $z = \phi_1(y+2x) + x\phi_2(y+2x) + \phi_3(y-3x) + \frac{1}{10}x^2e^{2x+y}$

١٠ – حل المعادلة : $(D_x^3 + D_x^2D_y - D_xD_y^2 - D_y^3)z = (D_x + D_y)^2(D_x - D_y)z = e^x\cos 2y.$

أن الدالة المتممة هى : $z = \phi_1(y-x) + x\phi_2(y-x) + \phi_3(y+x)$

لنأخذ التكامل الخاص بالشكل $z = Ae^x\cos 2y + Be^x\sin 2y$ فيكون :

$$D_x^3 z = Ae^x \cos 2y + Be^x \sin 2y, \qquad D_x D_y^2 z = -4Ae^x \cos 2y - 4Be^x \sin 2y,$$

$$D_x^2 D_y z = -2Ae^x \sin 2y + 2Be^x \cos 2y, \qquad D_y^3 z = 8Ae^x \sin 2y - 8Be^x \cos 2y.$$

وبالتعويض فى المعادلة التفاضلية المفروضة نجد :

$(5A + 10B)e^x \cos 2y + (5B - 10A)e^x \sin 2y = e^x \cos 2y$ ومنه نجد : $A = 1/25$ و $B = 2/25$

فالتكامل الخاص هو : $z = \frac{1}{25} e^x \cos 2y + \frac{2}{25} e^x \sin 2y$ ، والحل العام هو :

$$z = \phi_1(y-x) + x\phi_2(y-x) + \phi_3(y+x) + \frac{1}{25}e^x \cos 2y + \frac{2}{25}e^x \sin 2y$$

١١ – حل المعادلة : $(D_x^2 - 2D_xD_y)z = D_x(D_x - 2D_y)z = e^{2x} + x^3y$

أن الدالة المتممة هى : $z = \phi_1(y) + \phi_2(y+2x)$

ويعطى التكامل الخاص بـ $\frac{1}{D_x^2 - 2D_xD_y} e^{2x} + \frac{1}{D_x^2 - 2D_xD_y} x^3y$ ويعطينا الحد الأول $\frac{1}{(2)^2 - 2(2)(0)} e^{2x} = \frac{1}{4} e^{2x}$

وإذا كتبنا الحد الثانى بالشكل :

$$\frac{1}{D_x^2} \frac{1}{1 - 2\frac{D_y}{D_x}} x^3y = \frac{1}{D_x^2}\left(1 + 2\frac{D_y}{D_x} + \cdots\right)x^3y = \frac{1}{D_x^2}\left(x^3y + \frac{2}{D_x}x^3\right) = \frac{1}{D_x^2}\left(x^3y + \frac{1}{2}x^4\right)$$

فإننا نحصل على $\frac{x^5y}{20} + \frac{x^6}{60}$ والحل العام هو $z = \phi_1(y) + \phi_2(y+2x) + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{x^5y}{20} + \frac{x^6}{60}$

١٢ – حل المعادلة : $(D_x^3 - 7D_xD_y^2 - 6D_y^3)z = (D_x + D_y)(D_x + 2D_y)(D_x - 3D_y)z = \sin(x+2y) + e^{3x+y}$

أن الدالة المتممة هى : $z = \phi_1(y-x) + \phi_2(y-2x) + \phi_3(y+3x)$. أما التكامل الخاص فيعطى بـ

$$\frac{1}{(D_x + D_y)(D_x^2 - D_xD_y - 6D_y^2)} \sin(x+2y) + \frac{1}{(D_x - 3D_y)(D_x^2 + 3D_xD_y + 2D_y^2)} e^{3x+y}$$

ملاحظة : أن الفصل الذى أجريناه فى الحد الأول للسهولة فقط فلقد كان بإمكاننا أن نكتب الحد الأول بالشكل $\frac{1}{(D_x + 2D_y)(D_x^2 - 2D_xD_y - 3D_y^2)} \sin(x+2y)$. أما الفصل فى الحد الثانى فهو إجبارى لأن e^{3x+y} جزء من الحد ($\phi_3(y+3x)$ فى الدالة المتممة) .

ويعطينا الحد الأول : $\frac{1}{(D_x + D_y)(D_x^2 - D_xD_y - 6D_y^2)} \sin(x+2y) = \frac{1}{D_x + D_y} \frac{1}{-1 + 2 + 24} \sin(x+2y)$

$$= \frac{1}{25} \frac{D_x - D_y}{D_x^2 - D_y^2} \sin(x+2y) = \frac{1}{25(3)}(D_x - D_y) \sin(x+2y) = -\frac{1}{75} \cos(x+2y)$$

ونجد من الحد الثانى : $\frac{1}{(D_x - 3D_y)(D_x^2 + 3D_xD_y + 2D_y^2)} e^{3x+y} = \frac{1}{D_x - 3D_y} \frac{e^{3x+y}}{9+9+2}$

$$= \frac{1}{20} \frac{1}{D_x - 3D_y} e^{3x+y} = \frac{1}{20} x e^{3x+y}$$

والحل العام هو :
$$z = \phi_1(y-x) + \phi_2(y-2x) + \phi_3(y+3x) - \frac{1}{75}\cos(x+2y) + \frac{1}{20}x e^{3x+y}$$

١٣ — حل المعادلة :
$$(D_x^3 - 7D_xD_y^2 - 6D_y^3)z = \cos(x-y) + x^2 + xy^2 + y^3$$

أن المعادلة المختصرة هى معادلة المسألة ١٢ ، وأن التكامل الخاص للمعادلة هو :

$$\frac{1}{(D_x+D_y)(D_x^2 - D_xD_y - 6D_y^2)}\cos(x-y) + \frac{1}{D_x^3 - 7D_xD_y^2 - 6D_y^3}(x^2+xy^2+y^3)$$

(يلاحظ أن $\cos(x-y)$ جزء من الدالة المتممة ولذلك فإنه ينبغى معالجة العامل المرافق $(D_x + D_y)$ بشكل منفصل)

ونجد من الحد الأول أن :
$$\frac{1}{(D_x+D_y)(D_x^2 - D_xD_y - 6D_y^2)}\cos(x-y) = \frac{1}{4}\frac{1}{D_x+D_y}\cos(x-y)$$
: وبحل المعادلة $(D_x+D_y)u = \frac{1}{4}\cos(x-y)$ نحصل على
$$u = \frac{1}{4}\int \cos[x-(a+x)]\,dx = \frac{1}{4}\int \cos(-a)\,dx$$
$$= \frac{1}{4}x\cos(-a) = \frac{1}{4}x\cos(x-y)$$

ويعطينا الحد الثانى :

$$\frac{1}{D_x^3 - 7D_xD_y^2 - 6D_y^3}(x^2+xy^2+y^3) = \frac{1}{D_x^3\left(1 - 7\frac{D_y^2}{D_x^2} - 6\frac{D_y^3}{D_x^3}\right)}(x^2+xy^2+y^3)$$

$$= \frac{1}{D_x^3}\left(1 + 7\frac{D_y^2}{D_x^2} + 6\frac{D_y^3}{D_x^3}\right)(x^2+xy^2+y^3) = \frac{1}{D_x^3}\left[x^2+xy^2+y^3 + \frac{7}{D_x^2}(2x+6y) + \frac{6}{D_x^3}(6)\right]$$

$$= \frac{1}{D_x^3}(x^2+xy^2+y^3) + \frac{7}{D_x^5}(2x+6y) + \frac{36}{D_x^6} = \frac{5}{72}x^6 + \frac{1}{60}x^5(1+21y) + \frac{1}{24}x^4y^2 + \frac{1}{6}x^3y^3$$

والحل العام هو :

$$z = \phi_1(y-x) + \phi_2(y-2x) + \phi_3(y+3x) + \frac{1}{4}x\cos(x-y) + \frac{5}{72}x^6 + \frac{1}{60}x^5(1+21y)$$
$$+ \frac{1}{24}x^4y^2 + \frac{1}{6}x^3y^3$$

مسائل اضافية

أوجد حل كل من المعادلات التالية :

١٤ - $(D_x^2 - 8D_xD_y + 15D_y^2)z = 0.$ ج : $z = \phi_1(y+3x) + \phi_2(y+5x)$

١٥ - $(D_x^2 - 2D_xD_y - D_y^2)z = 0.$ ج : $z = \phi_1[y+x(1+\sqrt{2})] + \phi_2[y+x(1-\sqrt{2})]$

١٦ - $(D_x^2 - 4D_xD_y + 4D_y^2)z = 0.$ ج : $z = \phi_1(y+2x) + x\phi_2(y+2x)$

١٧ - $(D_x^3 + 2D_x^2D_y - D_xD_y^2 - 2D_y^3)z = 0.$ ج : $z = \phi_1(y+x) + \phi_2(y-x) + \phi_3(y-2x)$

١٨ - $(D_x^3D_y^2 + D_x^2D_y^3)z = 0.$ ج : $z = \phi_1(y) + x\phi_2(y) + \phi_3(x) + y\phi_4(x) + \phi_5(y-x)$

١٩ - $(D_x^2 + 5D_xD_y + 6D_y^2)z = e^{x-y}.$ ج : $z = \phi_1(y-2x) + \phi_2(y-3x) + \frac{1}{2}e^{x-y}$

٢٠ - $(D_x^2 + D_y^2)z = x^2y^2.$

ج : $z = \phi_1(y+ix) + \phi_1(y-ix) + i[\phi_2(y+ix) - \phi_2(y-ix)] + \frac{1}{180}(15x^4y - x^6)$

٢١ - $(D_x^3 - 3D_x^2D_y + 4D_y^3)z = e^{y+2x}.$ ج : $z = \phi_1(y-x) + \phi_2(y+2x) + x\phi_3(y+2x) + \frac{1}{6}x^2e^{y+2x}$

٢٢ - $(D_x^3 + 2D_x^2D_y - D_xD_y^2 - 2D_y^3)z = (y+2)e^x.$ ج : $z = \phi_1(y+x) + \phi_2(y-x) + \phi_3(y-2x) + ye^x$

٢٣ - $(D_x^3 - 3D_x^2D_y - 4D_xD_y^2 + 12D_y^3)z = \sin(y+2x).$

ج : $z = \phi_1(y-2x) + \phi_2(y+2x) + \phi_3(y+3x) + \frac{1}{4}x\sin(y+2x)$

٢٤ - $(D_x^3 - 3D_xD_y^2 + 2D_y^3)z = \sqrt{x+2y}.$ ج : $z = \phi_1(y+x) + x\phi_2(y+x) + \phi_3(y-2x) + \frac{8}{525}(x+2y)^{7/2}$

٢٥ - $(D_x^3 + D_x^2D_y - 6D_xD_y^2)z = x^2 + y^2.$

ج : $z = \phi_1(y) + \phi_2(y+2x) + \phi_3(y-3x) + \frac{2}{15}x^5 - \frac{1}{12}x^4y + \frac{1}{6}x^3y^2$

٢٦ - $(D_x^3 - 4D_x^2D_y + 5D_xD_y^2 - 2D_y^3)z = e^{y+x} + e^{y-2x} + e^{y+2x}.$

ج : $z = \phi_1(y+x) + x\phi_2(y+x) + \phi_3(y+2x) - \frac{1}{2}x^2e^{y+x} - \frac{1}{36}e^{y-2x} + xe^{y+2x}$

٢٧ - $(D_x^3 - 2D_x^2D_y)z = 2e^{2x} + 3x^2y.$

ج $z = \phi_1(y) + x\phi_2(y) + \phi_3(y+2x) + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{20}x^5y + \frac{1}{60}x^6$

٢٨ - $(D_x^3 - 3D_xD_y^2 - 2D_y^3)z = \cos(x+2y) - e^y(3+2x).$

ج $z = \phi_1(y-x) + x\phi_2(y-x) + \phi_3(y+2x) + \frac{1}{27}\sin(x+2y) + xe^y.$

الفصل الثانى والثلاثون

المعادلات الخطية غير المتجانسة بمعاملات ثابتة

نقول عن معادلة تفاضلية جزئية خطية غير متجانسة بمعاملات ثابتة أنها قابلة للإختزال إذا أمكن تحليل الطرف الأيسر لهـا إلى عوامل كل منها من الدرجة الأولى فى D_y, D_x مثل .

$$f(D_x, D_y)z = (D_x^2 - D_y^2 + 3D_x + D_y + 2)z = (D_x + D_y + 1)(D_x - D_y + 2)z = x^2 + xy$$

أما المعادلات :

$$f(D_x, D_y)z = (D_x D_y + 2D_y^3)z = D_y(D_x + 2D_y^2)z = \cos(x - 2y)$$

التى لايمكن تحليلها فيقال عنها إنها غير قابلة للإختزال .

المعادلات غير المتجانسة القابلة للاختزال :

لننظر فى المعادلة غير المتجانسة القابلة للإختزال

$$f(D_x, D_y)z = (a_1 D_x + b_1 D_y + c_1)(a_2 D_x + b_2 D_y + c_2) \cdots\cdots (a_n D_x + b_n D_y + c_n)z = 0 \quad (١)$$

حيث a_i, b_i, c_i ثوابت . أن أى حل لـ

$$(a_i D_x + b_i D_y + c_i)z = 0 \quad (٢)$$

هو حل لـ (١) والحل العام لـ (٢) ، استناداً إلى المسألة ٥ من الفصل ٢٩ ، هو :

$$z = e^{-c_i x/a_i}\,\phi(a_i y - b_i x), \quad a_i \neq 0 \quad (٣)$$

أو

$$z = e^{-c_i y/b_i}\,\psi(a_i y - b_i x), \quad b_i \neq 0 \quad (٣')$$

حيث ϕ و ψ دالتان اختياريتان فى متغيرها . وهكذا نجد أنه إذا لم يكن أى من عاملى (١) مرتبطين خطيا (أى إذا لم يكن عامل منهما مضاعفاً للعامل الآخر) فإن الحل العام لـ (١) يتكون من مجموع n دالة اختيارية من النمط (٣) والنمط (٣') .

مثال ١ :

حل المعادلة : $(2D_x + D_y + 1)(D_x - 3D_y + 2)z = 0$

إن الحل العام هو : $z = e^{-y}\phi_1(2y - x) + e^{-2x}\phi_2(y + 3x)$ علماً بأنه يمكن استبدال $e^{-x/2}\psi_1(2y - x)$ بالحد الأول من الطرف الأيمن و $e^{2y/3}\psi_2(y + 3x)$ بالحد الثانى .

مثال ٢ :

حل المعادلة : $(2D_x + 3D_y - 5)(D_x + 2D_y)(D_x - 2)(D_y + 2)z = 0$

إن الحل العام هو : $z = e^{5x/2}\phi_1(2y - 3x) + \phi_2(y - 2x) + e^{2x}\phi_3(y) + e^{-2y}\phi_4(x)$

أنظر كذلك المسألتين ١ – ٢

وإذا كان

$$f(D_x, D_y)z = (a_1 D_x + b_1 D_y + c_1)^k (a_{k+1} D_x + b_{k+1} D_y + c_{k+1}) \cdots (a_n D_x + b_n D_y + c_n) z = 0. \quad (٤)$$

حيث لايوجد عاملا ن من العوامل الـ n مرتبطين خطياً باستثناء ما أشير إليه ، فإن جزء الحل العام الموافق للعامل المكرر k :

$$e^{-c_1 x/a_1}[\phi_1(a_1 y - b_1 x) + x\phi_2(a_1 y - b_1 x) + \cdots + x^{k-1}\phi_k(a_1 y - b_1 x)]$$

ثال ٣ :

حل المعادلة : $(2D_x + D_y + 5)(D_x - 2D_y + 1)^2 z = 0.$

أن الحل العام هو : $z = e^{-5y}\phi_1(2y - x) + e^{-x}[\phi_2(y + 2x) + x\phi_3(y + 2x)]$

أنظر كذلك المسألة ٣

حل العام لـ :

$$f(D_x, D_y)z = (a_1 D_x + b_1 D_y + c_1)(a_2 D_x + b_2 D_y + c_2) \cdots (a_n D_x + b_n D_y + c_n) z = F(x, y) \quad (٥)$$

هو حاصل جمع الحل العام لـ (١) وسندعوه فيما يلى الدالة المتممة لـ (٥) مع حل خاص لـ (٥) .

$$z = \frac{1}{f(D_x, D_y)} F(x, y) \quad (٦)$$

والطريقة العامة لحساب (٦) بالإضافة إلى الطرق المختصرة المناسبة لأشكال خاصة لـ $F(x, y)$ لاتختلف عن تلك الطرق ى مرت معنا فى الفصل السابق .

ثال ٤ :

حل المعادلة :

$$\begin{aligned} f(D_x, D_y)z &= (D_x^2 - D_x D_y - 2D_y^2 + 2D_x - 4D_y)z \\ &= (D_x - 2D_y)(D_x + D_y + 2)z = ye^x + 3xe^{-y} \end{aligned}$$

إن الدالة المتممة هى : $z = \phi_1(y + 2x) + e^{-2x}\phi_2(y - x)$

ولحساب $\frac{1}{f(D_x, D_y)} ye^x = \frac{1}{(D_x - 2D_y)(D_x + D_y + 2)} ye^x$ نبدأ بحل $(D_x + D_y + 2)u = ye^x$ التى مجموعتها المساعدة $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{ye^x - 2u}$ ومنها نجد مباشرة $y = x + a$.

ونجد المعادلة $\frac{dx}{1} = \frac{du}{ye^x - 2u}$ التى تكتب بالشكل $\frac{du}{dx} + 2u = ye^x = (x + a)e^x$. لهذه المعادلة الخطية عامل تكاملى (e^{2x}) لذلك

$$ue^{2x} = \int (x + a)e^{3x} dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + \frac{1}{3}ae^{3x} = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + \frac{1}{3}(y - x)e^{3x}$$

وبالتالى : $u = \frac{1}{3}ye^x - \frac{1}{9}e^x$

نحل بعد ذلك المعادلة $(D_x - 2D_y)z = u = \frac{1}{3}ye^x - \frac{1}{9}e^x$ فنحصل على التكامل الخاص المطلوب (أنظر المسألة ٦ الفصل ٣١) .

$$\begin{aligned} z &= \int \left[\frac{1}{3}(a - 2x)e^x - \frac{1}{9}e^x\right] dx = \frac{1}{3}ae^x - \frac{2}{3}xe^x + \frac{2}{3}e^x - \frac{1}{9}e^x \\ &= \frac{1}{3}(y + 2x)e^x - \frac{2}{3}xe^x + \frac{5}{9}e^x = \frac{1}{3}(y + \frac{5}{3})e^x \end{aligned}$$

ننتقل بعد ذلك لحساب $\frac{1}{(D_x-2D_y)(D_x+D_y+2)}(3xe^{-y})$. فنبدأ بحل المعادلة $(D_x+D_y+2)u = 3xe^{-y}$ التى

مجموعتها المساعدة هى : $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{3xe^{-y}-2u}$

إذن : $y = x + a$ ومن $\frac{dy}{1} = \frac{du}{3xe^{-y}-2u}$ أو

$$\frac{du}{dy} + 2u = 3xe^{-y} = 3(y-a)e^{-y}, \quad ue^{2y} = 3\int(y-a)e^{y}\,dy = 3(y-1-a)e^{y} = 3(x-1)e^{y}$$

و $u = 3(x-1)e^{-y}$ بعد ذلك نحل المعادلة $(D_x-2D_y)z = u = 3(x-1)e^{-y}$ فنحصل على التكامل الخاص

المطلوب : $z = 3\int(x-1)e^{-a+2x}\,dx = \frac{3}{2}(xe^{-a+2x} - \frac{3}{2}e^{-a+2x}) = \frac{3}{2}(x-\frac{3}{2})e^{-y}$

والحل العام هو :

$$z = \phi_1(y+2x) + e^{-2x}\phi_2(y-x) + \frac{1}{3}(y+\frac{5}{3})e^{x} + \frac{3}{2}(x-\frac{3}{2})e^{-y}$$

مثال ٥ :

حل المعادلة :

$$f(D_x,D_y)z = (D_x^2 - D_xD_y - 2D_y^2 + 6D_x - 9D_y + 5)z$$
$$= (D_x+D_y+5)(D_x-2D_y+1)z = e^{2x+y} + e^{x+y}$$

إن الدالة المتممة : $z = e^{-5x}\phi_1(y-x) + e^{-x}\phi_2(y+2x)$

وللحصول على التكامل الخاص الموافق للحد الأول من $F(x,y)$ نستخدم

$$\frac{1}{f(D_x,D_y)}e^{ax+by} = \frac{1}{f(a,b)}e^{ax+by}, \quad f(a,b) \neq 0$$

فنحصل على : $\frac{1}{D_x^2 - D_xD_y - 2D_y^2 + 6D_x - 9D_y + 5}e^{2x+y} = \frac{1}{4-2-2+12-9+5}e^{2x+y} = \frac{1}{8}e^{2x+y}$

لحساب $\frac{1}{f(D_x,D_y)}e^{x+y}$ نلاحظ أن $f(1,1)=0$ وهذا يعنى أن e^{x+y} جزء من الدالة المتممة (خذ لتوضيح ذلك $\phi_2(y+2x) = e^{y+2x} + \psi_2(y+2x)$) فيكون $(e^{-x}\phi_2(y+2x) = e^{-x}[e^{y+2x} + \psi_2(y+2x)] = e^{y+x} + e^{-x}\psi_2(y+2x)$ ولنكتب :

$$\frac{1}{f(D_x,D_y)}e^{x+y} = \frac{1}{D_x-2D_y+1}\,\frac{1}{D_x+D_y+5}e^{x+y} = \frac{1}{7}\,\frac{1}{D_x-2D_y+1}e^{x+y} = \frac{1}{7}xe^{x+y}$$

والحل العام هو : $z = e^{-5x}\phi_1(y-x) + e^{-x}\phi_2(y+2x) + \frac{1}{8}e^{2x+y} + \frac{1}{7}xe^{x+y}$

أنظر كذلك المسألتين ٤ — ٥

سنوضح بعد قليل كيفية استخدام الصيغة

$$\frac{1}{f(D_x,D_y)}Ve^{ax+by} = e^{ax+by}\frac{1}{f(D_x+a,D_y+b)}V, \quad V = V(x,y) \qquad (٧)$$

مثال ٦ :

حل المعادلة : $(D_x^3 + 3D_x^2D_y - 2D_x^2)z = D_x^2(D_x+3D_y-2)z = (x^2+2y)e^{2x+y}$

إن الدالة المتممة هى $z = \phi_1(y) + x\phi_2(y) + e^{2x}\phi_3(y-3x)$ والتكامل الخاص هو :

$$z = \frac{1}{D_x^2(D_x + 3D_y - 2)}(x^2 + 2y)e^{2x+y} = e^{2x+y}\frac{1}{(D_x + 2)^2(D_x + 3D_y + 3)}(x^2 + 2y)$$

لنضع $(D_x + 3D_y + 3)u = x^2 + 2y$، والمجموعة المساعدة هى : $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{3} = \dfrac{du}{x^2 + 2y - 3u}$

ومنها نجد : $y = 3x + a$ ومن $\dfrac{du}{x^2 + 2y - 3u} = \dfrac{dx}{1}$ أو $\dfrac{du}{dx} + 3u = x^2 + 2y$ نجد :

$$ue^{3x} = \int(x^2 + 6x + 2a)e^{3x}\,dx = e^{3x}\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{16}{9}x - \frac{16}{27} + \frac{2}{3}a\right)$$ ومنه $$u = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{16}{27} + \frac{2}{3}y$$

لنضع بعد ذلك $(D_x + 2)v = u$ ولنستفد من عامل التكامل e^{2x} معتبرين y ثابتاً فنجد :

$$ve^{2x} = \int e^{2x}\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{16}{27} + \frac{2}{3}y\right)dx = \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{18}x - \frac{17}{108} + \frac{1}{3}y\right)e^{2x}$$ ومنه $$v = \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{18}x - \frac{17}{108} + \frac{1}{3}y$$

لنضع أخيراً $(D_x + 2)w = v$ فنحصل على :

$$we^{2x} = \int e^{2x}\left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{18}x - \frac{17}{108} + \frac{1}{3}y\right)dx = \left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{7}{216} + \frac{1}{6}y\right)e^{2x}$$

ومنه :

$$w = \frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{7}{216} + \frac{1}{6}y$$

وهكذا يكون $z = we^{2x+y}$ والحل العام هو :

$$z = \phi_1(y) + x\phi_2(y) + e^{2x}\phi_3(3y - x) + \left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{7}{216} + \frac{1}{6}y\right)e^{2x+y}$$

أنظر كذلك المسألتين ٦ — ٧

المعادلات غير القابلة للاختزال بمعاملات ثابتة :

لننظر فى المعادلة الخطية ذات المعاملات الثابتة .

$$f(D_x, D_y)z = 0 \tag{٨}$$

بما أن $D_x^r D_y^s(ce^{ax+by}) = ca^r b^s e^{ax+by}$ حيث a, b, c ثوابت فإن نتيجة التعويض هى :

$$z = ce^{ax+by} \tag{٩}$$

فى (٨) نحصل على $c\,f(a, b)e^{ax+by} = 0$ وعلى هذا فإن (٩) حل لـ (٨) بشرط أن يكون :

$$f(a, b) = 0 \tag{١٠}$$

حيث c ثابت . ولكننا نحصل لأية قيمة نختارها لـ a (أو لـ b) على قيمة أو أكثر لـ b (أو لـ a) ، وذلك اعتماداً على (١٠) ، وعلى ذلك يوجد عدد غير محدد من أزواج الأعداد (a_i, b_i) المحققة لـ (١٠) بالإضافة لذلك فإن :

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_i x + b_i y} \quad \text{حيث} \quad f(a_i, b_i) = 0 \tag{١١}$$

حل لـ (٨)

وإذا كان :

$$f(D_x, D_y)z = (D_x + hD_y + k)\,g(D_x, D_y)z$$

فعندئذ أى زوج من (a,b) يحقق العلاقة $a + hb + k = o$ هو حل لـ (١٠). لننظر الآن فى جميع هذه الأزواج $(a_i,b_i) = (-hb_i - k, b_i)$. ومن (١١) يكون :

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{-(hb_i+k)x + b_i y} = e^{-kx} \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{b_i(y-hx)}$$

حلا لـ (٨) موافقاً للعامل الخطى $(D_x + hD_y + k)$ من $f(D_x, D_y)$

إن هذا الحل هو بالطبع ، $e^{-kx}\phi(y-hx)$ حيث ϕ اختيارى، الذى استخدمناه من قبل. وهكذا إذا لم يكن لـ$f(D_x, D_y)$ عامل خطى فإننا سنسمى (١١) حل (٨) ، غير إنه إذا كان لـ (D_x, D_y) عاملا خطياً m $(m < n)$ فإننا سنكتب الحل مكوناً من قسمين يحوى أحدهما الدالة الاختيارية (وهى الموافقة للعوامل الخطية) ويحوى الآخر الثوابت الاختيارية .

مثال ٧ :

حل المعادلة : $f(D_x,D_y)z = (D_x^2 + D_x + D_y)z = 0$

إن هذه المعادلة غير قابلة للإختزال وحيث أن $f(a,b) = a^2 + a + b = 0$. فإنه يوافق كل $a = a_i$ عدداً $b_i = -a_i(a_i+1)$ وهكذا فإن الحل هو : $z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_i x + b_i y} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_i x - a_i(a_i+1)y}$ حيث a_i, c_i ثوابت اختيارية .

مثال ٨ :

حل المعادلة $(D_x + 2D_y)(D_x - 2D_y + 1)(D_x - D_y^2)z = 0$

لدينا بالنسبة للعاملين الخطيين $\phi_1(y-2x)$ و $\phi_2(y+2x)$ e^{-x} على الترتيب .

أما بالنسبة للعامل غير القابل للإختزال $D_x - D^2{}_y$ فلدينا $a-b^2=o$ ومنه $a=b^2$ والحل المطلوب هو إذن :

$$z = \phi_1(y-2x) + e^{-x}\phi_2(y+2x) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{b_i^2 x + b_i y}$$

حيث b_i, c_i ثوابت اختيارية .

أما لحصول على التكامل الخاص للمعادلة $f(D_x, D_y)z = F(x,y)$ فإن كل الطرق التى سبقت صالحة هنا أيضاً .

مثال ٩ :

حل المعادلة $f(D_x,D_y)z = (D_x - D_y^2)z = e^{2x+3y}$

أن الدالة المتممة هنا ، استنادا إلى المسألة ٨ ، هى

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{b_i^2 x + b_i y}$$

وأما التكامل الخاص فهو

$$\frac{1}{D_x - D_y^2} e^{2x+3y} = \frac{1}{2-(3)^2} e^{2x+3y} = -\frac{1}{7} e^{2x+3y}$$

والحل المطلوب هو

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{b_i^2 x + b_i y} - \frac{1}{7} e^{2x+3y}$$

أنظر كذلك المسائل ٨ — ١١

تتحول معادلة كوشى التفاضلية (العادية) :

$f(xD)y = F(x)$ إلى معادلة خطية بمعاملات ثابتة بإجراء التحويل $x = e^z$ (أنظر الفصل ١٧) والمعادلة التفاضلية الجزئية المماثلة لها هى معادلة من الشكل

$$f(xD_x, yD_y)z = \sum_{r,s} c_{rs} x^r y^s D_x^r D_y^s z = F(x,y)$$

و الحل العام هو إذن. $z = \phi_1(x) + e^{3y}\phi_2(2y-x) + \frac{3}{50}[4\cos(3x-2y) + 3\sin(3x-2y)]$

٥ – حل المعادلة $D_x(D_x+D_y-1)(D_x+3D_y-2)z = x^2-4xy+2y^2$

أن الدالة المتممة هى $z = \phi_1(y) + e^x\phi_2(y-x) + e^{2x}\phi_3(y-3x)$

و أن $z = \frac{1}{D_x(D_x+D_y-1)(D_x+3D_y-2)}(x^2-4xy+2y^2)$ تكامل خاص لها .

لحساب هذا التكامل ننظر أولا فى

$$\frac{1}{D_x+3D_y-2}(x^2-4xy+2y^2) = \frac{1}{2}\frac{1}{-1+\frac{1}{2}(D_x+3D_y)}(x^2-4xy+2y^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}[-1-\tfrac{1}{2}(D_x+3D_y)-\tfrac{1}{4}(D_x+3D_y)^2-\cdots](x^2-4xy+2y^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}[-(x^2-4xy+2y^2)-(-5x+4y)-7/2] = -\tfrac{1}{2}(x^2-4xy+2y^2-5x+4y+7/2)$$

ثم ننظر فى

$$\frac{-\frac{1}{2}}{D_x+D_y-1}(x^2-4xy+2y^2-5x+4y+7/2) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(D_x+D_y)}(x^2-4xy+2y^2-5x+4y+7/2)$$

$$= \tfrac{1}{2}[1+(D_x+D_y)+(D_x+D_y)^2+\cdots](x^2-4xy+2y^2-5x+4y+7/2) = \tfrac{1}{2}(x^2-4xy+2y^2-7x+4y+\tfrac{1}{2})$$

و أخيرا يكون

$$z = \frac{\frac{1}{2}}{D_x}(x^2-4xy+2y^2-7x+4y+\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}(x^3/3-2x^2y+2xy^2-7x^2/2+4xy+x/2).$$

و الحل العام هو

$$z = \phi_1(y) + e^x\phi_2(y-x) + e^{2x}\phi_3(y-3x) + \frac{1}{12}(2x^3-12x^2y+12xy^2-21x^2+24xy+3x)$$

النمط : $\frac{1}{f(D_x,D_y)}e^{ax+by}V(x,y)$

٦ – حل المعادلة $(D_x+D_y-1)(D_x+D_y-3)(D_x+D_y)z = e^{x+y+2}\cos(2x-y)$

أن الدالة المتممة هى $z = e^x\phi_1(y-x) + e^{3x}\phi_2(y-x) + \phi_3(y-x)$

و لدينا للتكامل الخاص

$$\frac{1}{(D_x+D_y-1)(D_x+D_y-3)(D_x+D_y)}e^{x+y+2}\cos(2x-y)$$

$$= e^{x+y}\frac{1}{(D_x+D_y+1)(D_x+D_y-1)(D_x+D_y+2)}e^2\cos(2x-y)$$

$$= e^{x+y+2}\frac{1}{(D_x^2+2D_xD_y+D_y^2-1)(D_x+D_y+2)}\cos(2x-y) = -\tfrac{1}{2}e^{x+y+2}\frac{1}{D_x+D_y+2}\cos(2x-y)$$

$$= -\frac{1}{2}e^{x+y+2}\frac{D_x+D_y-2}{D_x^2+2D_xD_y+D_y^2-4}\cos(2x-y) = \frac{1}{10}e^{x+y+2}(D_x+D_y-2)\cos(2x-y)$$

$$= -\frac{1}{10}e^{x+y+2}[\sin(2x-y)+2\cos(2x-y)].$$

و الحل العام هو

$$z = e^x\phi_1(y-x) + e^{3x}\phi_2(y-x) + \phi_3(y-x) - \frac{1}{10}e^{x+y+2}[\sin(2x-y)+2\cos(2x-y)].$$

حيث C_{rs} ثوابت . وتنتقل هذه المعادلة إلى معادلة تفاضلية جزئية خطية بمعاملات ثابتة بإجراء التحويل .

$$x = e^u, \quad y = e^v$$

مثال ١٠ :

حل المعادلة $(x^2D_x^2 + 2xyD_xD_y - xD_x)z = x^3/y^2$

أن التحويل $x = e^u,\ y = e^v,\ xD_x z = D_u z,\ yD_y z = D_v z,\ x^2D_x^2 z = D_u(D_u - 1)z$ ينقل المعادلة المفروضة إلى المعادلة $xyD_xD_y = D_uD_v z,\ y^2D_y^2 z = D_v(D_v - 1)z$

$$[D_u(D_u - 1) + 2D_uD_v - D_u]z = D_u(D_u + 2D_v - 2)z = e^{3u-2v}$$

التى حلها هــو $z = \phi_1(v) + e^{2u}\phi_2(v - 2u) - \frac{1}{9}e^{3u-2v}$

وهكذا فإن الحل العام (بدلالة المتغيرات الأصلية) هــو

$$z = \phi_1(\ln y) + x^2\phi_2(\ln \frac{y}{x^2}) - \frac{1}{9}\frac{x^3}{y^2}$$ أو $$z = \psi_1(y) + x^2\psi_2(\frac{y}{x^2}) - \frac{1}{9}\frac{x^3}{y^2}$$

أنظر كذلك المسألتين ١٢ – ١٣

مسائل محلولة

المعادلات القابلة للاختزال :

١ – حل المعادلة $(D_x^2 - D_y^2 + 3D_x - 3D_y)z = (D_x - D_y)(D_x + D_y + 3)z = 0$

أن الحل العام هو $z = \phi_1(y+x) + e^{-3x}\phi_2(y-x)$

٢ – حل المعادلة $D_x(2D_x - D_y + 1)(D_x + 2D_y - 1)z = 0$

أن الحل العام هو $z = \phi_1(y) + e^y\phi_2(2y+x) + e^x\phi_3(y-2x)$

٣ – حل المعادلة $(2D_x + 3D_y - 1)^2(D_x - 3D_y + 3)^3 z = 0$ أن الحل العام هو

$$z = e^{\frac{1}{2}x}[\phi_1(2y-3x) + x\phi_2(2y-3x)] + e^y[\phi_3(y+3x) + y\phi_4(y+3x) + y^2\phi_5(y+3x)]$$

٤ – حل المعادلة $(2D_xD_y + D_y^2 - 3D_y)z = D_y(2D_x + D_y - 3)z = 3\cos(3x-2y)$ أن الدالة المتممة هى $z = \phi_1(x) + e^{3y}\phi_2(2y-x)$ ، وأن

$$\frac{1}{2D_xD_y + D_y^2 - 3D_y}3\cos(3x-2y) = \frac{3}{2(6) - 4 - 3D_y}\cos(3x-2y) = \frac{3}{8 - 3D_y}\cos(3x-2y)$$

$$= \frac{3(8+3D_y)}{64 - 9D_y^2}\cos(3x-2y) = \frac{3}{100}(8+3D_y)\cos(3x-2y) = \frac{3}{50}[4\cos(3x-2y) + 3\sin(3x-2y)]$$

تكامل خاص لها

والتكامل الخاص هو
$$\frac{1}{2D_x^2 - D_y^2 + D_x}(x^2 - y) = -\frac{1}{D_y^2}\,\frac{1}{1 - \dfrac{D_x + 2D_x^2}{D_y^2}}(x^2 - y)$$

$$= -\frac{1}{D_y^2}\left[1 + \frac{D_x + 2D_x^2}{D_y^2} + \frac{(D_x + 2D_x^2)^2}{D_y^4} + \cdots\right](x^2 - y) = -\frac{1}{D_y^2}\left[x^2 - y + \frac{2x + 4}{D_y^2} + \frac{2}{D_y^4}\right]$$

$$= -\frac{1}{D_y^2}(x^2 - y + xy^2 + 2y^2 + y^4/12) = -\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{12}xy^4 - \frac{1}{6}y^4 - \frac{1}{360}y^6$$

والحل المطلوب هو
$$z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_i x \pm \sqrt{2a_i^2 + a_i}\, y} - \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{12}xy^4 - \frac{1}{6}y^4 - \frac{1}{360}y^6$$

١٠ – أوجد تكاملا خاصا لـ $(D_x^2 + D_y)(D_x - D_y - D_y^2)z = \sin(2x + y)$

يمكن الوصول إلى تكامل خاص بـ

$$\frac{1}{(D_x^2 + D_y)(D_x - D_y - D_y^2)}\sin(2x + y) = \frac{1}{(-4 + D_y)(D_x - D_y + 1)}\sin(2x + y)$$

$$= \frac{1}{D_xD_y - D_y^2 - 4D_x + 5D_y - 4}\sin(2x + y) = \frac{1}{5D_y - 4D_x - 5}\sin(2x + y)$$

$$= \frac{5D_y - 4D_x + 5}{25D_y^2 - 40D_xD_y + 16D_x^2 - 25}\sin(2x + y) = -\frac{1}{34}[5\sin(2x + y) - 3\cos(2x + y)]$$

كذلك يمكن الاستفادة من طريقة المعاملات غير المعينة حيث نضع $z = A\sin(2x + y) + B\cos(2x + y)$

١١ – أوجد تكاملا خاصا لـ $(D_x - 2D_y + 5)(D_x^2 + D_y + 3)z = e^{3x+4y}\sin(x - 2y)$

يمكن الوصول إلى تكامل خاص بـ

$$\frac{1}{(D_x - 2D_y + 5)(D_x^2 + D_y + 3)}e^{3x+4y}\sin(x - 2y)$$

$$= e^{3x+4y}\frac{1}{(D_x - 2D_y)(D_x^2 + 6D_x + D_y + 16)}\sin(x - 2y) = e^{3x+4y}\frac{1}{(D_x - 2D_y)(6D_x + D_y + 15)}\sin(x - 2y)$$

$$= e^{3x+4y}\frac{1}{6D_x^2 - 11D_xD_y - 2D_y^2 + 15D_x - 30D_y}\sin(x - 2y) = \frac{1}{5}e^{3x+4y}\frac{1}{3D_x - 6D_y - 4}\sin(x - 2y)$$

$$= \frac{1}{5}e^{3x+4y}\frac{3D_x - 6D_y + 4}{9D_x^2 - 36D_xD_y + 36D_y^2 - 16}\sin(x - 2y) = -\frac{1}{1205}e^{3x+4y}(3D_x - 6D_y + 4)\sin(x - 2y)$$

$$= -\frac{1}{1205}e^{3x+4y}[15\cos(x - 2y) + 4\sin(x - 2y)]$$

النمط : $f(xD_x, yD_y)z = 0$:

١٢ – حل المعادلة $(xD_x^3D_y^2 - yD_x^2D_y^3)z = 0$ أو المعادلة $(x^3y^2D_x^3D_y^2 - x^2y^3D_x^2D_y^3)z = 0$

بالتعويض $x^3y^2D_x^3D_y^2 z = D_u(D_u - 1)(D_u - 2)D_v(D_v - 1)z$ ، $x = e^u, \quad y = e^v$

تنتقل المعادلة المفروضة إلى $x^2y^3D_x^2D_y^3 z = D_u(D_u - 1)D_v(D_v - 1)(D_v - 2)z$

٧ – حل المعادلة $D_x(D_x-2D_y)(D_x+D_y)z = e^{x+2y}(x^2+4y^2)$

أن الدالة المتممة هي $z = \phi_1(y) + \phi_2(y+2x) + \phi_3(y-x)$

و لدينا للتكامل الخاص

$$\frac{1}{D_x(D_x-2D_y)(D_x+D_y)}e^{x+2y}(x^2+4y^2) = e^{x+2y}\frac{1}{(D_x+1)(D_x-2D_y-3)(D_x+D_y+3)}(x^2+4y^2)$$

نوجد أولا

$$u = \frac{1}{D_x+D_y+3}(x^2+4y^2) = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{1}{3}(D_x+D_y)}(x^2+4y^2)$$

$$= \frac{1}{3}[1-\frac{1}{3}(D_x+D_y)+\frac{1}{9}(D_x+D_y)^2+\cdots\cdots](x^2+4y^2)$$

$$= \frac{1}{3}[x^2+4y^2-\frac{2}{3}(x+4y)+\frac{10}{9}] = \frac{1}{27}(9x^2+36y^2-6x-24y+10)$$

ثم نوجد

$$v = \frac{1}{D_x-2D_y-3}u = -\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{1}{3}(2D_y-D_x)}u = -\frac{1}{3}[1-\frac{1}{3}(2D_y-D_x)+\frac{1}{9}(2D_y-D_x)^2-\cdots]u$$

$$= -\frac{1}{81}(9x^2+36y^2-72y+58)$$

و أخيرا يكون

$$z = \frac{1}{D_x+1}v = (1-D_x+D_x^2+\cdots)v = -\frac{1}{81}(9x^2+36y^2-18x-72y+76)$$

و الحل العام هو

$$z = \phi_1(y)+\phi_2(y+2x)+\phi_3(y-x)-\frac{1}{81}(9x^2+36y^2-18x-72y+76)e^{x+2y}$$

نمط المعادلات غير القابلة للاختزال :

٨ – حل المعادلة $f(D_x,D_y)z = (D_x-D_y^2)z = e^{x+y}$

أن الدالة المتممة هي $z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{b_i^2 x + b_i y}$ كما اتضح فى المثال (٩) .

و حيث أن $f(a,b)=f(1,1)=o$ فإنه لا يمكن استخدام الطريقة المختصرة لحساب قيمة التكامل الخاص $\frac{1}{f(D_x,D_y)}e^{x+y}$ وسنستخدم طريقة المعاملات غير المعينة فنفرض الحل الخاص من الشكل $z = Axe^{x+y}+Bye^{x+y}$.

وعلى هذا فإن $D_y^2 z = (Ax+2B+By)e^{x+y}$ و $D_x z = (A+Ax+By)e^{x+y}$ و $(D_x-D_y^2)z = (A-2B)e^{x+y} = e^{x+y}$

و بالتالى فإن $A-2B=1$ لنأخذ $A=1, B=o$

فنحصل على تكامل خاص $z = xe^{x+y}$ أما إذا أخذنا $B=-\frac{1}{2}$ ، $A=0$ فإننا نجد $z = -\frac{1}{2}ye^{x+y}$ ، وهكذا . . .

فإذا اخترنا التكامل الخاص الأول نجد الحل المطلوب :

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{b_i^2 x + b_i y} + xe^{x+y}$$

٩ – حل المعادلة $(2D_x^2-D_y^2+D_x)z = x^2-y$

أن الدالة المتممة هي $z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_i x + b_i y}$ ، $2a_i^2-b_i^2+a_i = 0$

١٩ - $(D_x + D_y)(D_x + D_y - 2)z = \sin(x + 2y)$.

ج : $z = \phi_1(y - x) + e^{2x}\phi_2(y - x) + \frac{1}{117}[6\cos(x + 2y) - 9\sin(x + 2y)]$

٢٠ - $(D_x + D_y - 1)(D_x + 2D_y + 2)z = e^{3x+4y} + y(1 - 2x)$

ج : $z = e^{x}\phi_1(y - x) + e^{-y}\phi_2(y - 2x) + xy + \frac{3}{2} + \frac{1}{78}e^{3x+4y}$

٢١ - $(D_x^2 + D_xD_y + D_y - 1)z = e^{x} + e^{-x}$

ج : $z = e^{-x}\phi_1(y) + e^{x}\phi_2(y - x) + \frac{1}{2}xe^{x} - \frac{1}{2}xe^{-x}$

٢٢ - $(D_x^3 - D_xD_y^2 - D_x^2 + D_xD_y)z = (x + 2)/x^3$

ج : $z = \phi_1(y) + \phi_2(y + x) + e^{x}\phi_3(y - x) + \ln x$

٢٣ - $(3D_xD_y - 2D_y^2 - D_y)z = \cos(3y + 2x)$

$z = \phi_1(x) + e^{\frac{1}{2}y}\phi_2(3y + 2x) - \frac{1}{3}\sin(3y + 2x)$

٢٤ - $(D_x^2 + D_xD_y - D_y^2 + D_x - D_y)z = e^{2x-3y}$

$z = \sum c_i e^{a_ix + b_iy} - \frac{1}{6}e^{2x-3y}, \quad a_i^2 + a_ib_i - b_i^2 + a_i - b_i = 0$

٢٥ - $(3D_x^2 - 2D_y^2 + D_x - 1)z = 3e^{x+y}\sin(x + y)$

ج : $z = \sum c_i e^{a_ix + b_iy} - e^{x+y}\cos(x + y), \quad 3a_i^2 - 2b_i^2 + a_i - 1 = 0$

٢٦ - $(D_x^2 + 2D_xD_y^2 - 2D_y + 3)z = e^{x+y}\cos(x + 2y)$

ج : $z = \sum c_i e^{a_ix + b_iy} - \frac{1}{13}e^{x+y}\cos(x + 2y), \quad a_i^2 + 2a_ib_i - 2b_i + 3 = 0$

٢٧ - $(D_x^2 + D_xD_y + D_x + D_y + 1)z = e^{-2x}(x^2 + 2y^2)$

ج : $z = \sum c_i e^{a_ix + b_iy} + \frac{1}{27}e^{-2x}(9x^2 + 18y^2 + 18x + 12y + 16), \quad a_i^2 + a_ib_i + a_i + b_i + 1 = 0$

٢٨ - $(D_x^2D_y + D_y^2 - 2)z = e^{2y}\cos 3x + e^{x}\sin 2y$

ج : $z = \sum c_i e^{a_ix + b_iy} - \frac{1}{16}e^{2y}\cos 3x - \frac{1}{20}e^{x}(\cos 2y + 3\sin 2y), \quad a_i^2b_i + b_i^2 - 2 = 0$

٢٩ - $(xyD_xD_y - y^2D_y^2 - 3xD_x + 2yD_y)z = 0$

ج : $z = \phi_1(\ln xy) + y^3\phi_2(\ln x) = \psi_1(xy) + y^3\psi_2(x)$

٣٠ - $(x^2D_x^2 - 2xyD_xD_y - 3y^2D_y^2 + xD_x - 3yD_y) = x^2y\sin(\ln x^2)$

ج : $z = \phi_1(x^3y) + \phi_2(y/x) - \frac{1}{65}x^2y[4\cos(\ln x^2) + 7\sin(\ln x^2)]$

٣١ - $(x^2D_x^2 + xyD_xD_y - 2y^2D_y^2 - xD_x - 6yD_y)z = 0$

ج : $z = \phi_1(y/x^2) + x^2\phi_2(xy)$

٣٢ - $(x^2D_x^2 - xyD_xD_y - 2y^2D_y^2 + xD_x - 2yD_y)z = \ln(y/x) - 1/2$

ج : $z = \phi_1(x^2y) + \phi_2(y/x) + \frac{1}{2}(\ln x)^2\ln y + \frac{1}{2}\ln x\ln y$

٣٣ - $(x^2yD_x^2D_y - xy^2D_xD_y^2 - x^2D_x^2 + y^2D_y^2)z = \dfrac{x^3 + y^3}{xy}$

ج : $z = x\phi_1(y) + y\phi_2(x) + \phi_3(xy) - \frac{1}{6}\left(\dfrac{x^3 - y^3}{xy}\right)$

$D_uD_v(D_u-1)(D_v-1)(D_u-D_v)z = 0$ ويكون الحل المطلوب هو

$z = \phi_1(v) + \phi_2(u) + e^u\phi_3(v) + e^v\phi_4(u) + \phi_5(v+u)$ وبالعودة إلى المتغيرات الأصلية يأخذ هذا الحل الشكل :

$$z = \phi_1(\ln y) + \phi_2(\ln x) + x\phi_3(\ln y) + y\phi_4(\ln x) + \phi_5(\ln xy)$$
$$= \psi_1(y) + \psi_2(x) + x\psi_3(y) + y\psi_4(x) + \psi_5(xy)$$

١٣ – حل المعادلة $(x^2D_x^2 - 4y^2D_y^2 - 4yD_y - 1)z = x^2y^3 \ln y$

أن التعويض $x = e^u,\ y = e^v$ ينقل المعادلة المفروضة إلى

$$[D_u(D_u-1) - 4D_v(D_v-1) - 4D_v - 1]z = (D_u^2 - 4D_v^2 - D_u - 1)z = ve^{2u+3v}$$

ونحصل على تكامل حاصل لهذه المعادلة بـ $\dfrac{1}{D_u^2 - 4D_v^2 - D_u - 1} ve^{2u+3v}$

$$= e^{2u+3v}\frac{1}{(D_u+2)^2 - 4(D_v+3)^2 - (D_u+2) - 1}v = e^{2u+3v}\frac{1}{D_u^2 - 4D_v^2 + 3D_u - 24D_v - 35}v$$

ويمكننا أن نتحقق من أن $w = -\dfrac{1}{35}v + \dfrac{24}{(35)^2}$ حل لـ $(D_u^2 - 4D_v^2 + 3D_u - 24D_v - 35)w = v$

وهكذا فإن التكامل الخاص هو $z = -\dfrac{1}{(35)^2}e^{2u+3v}(35v-24)$

وبالعودة إلى المتغيرات الأصلية يأخذ هذا التكامل الشكل $(35v-24)$

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_iu+b_iv} - \frac{1}{1225}e^{2u+3v}(35v-24)$$

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^{a_i} y^{b_i} - \frac{1}{1225}x^2y^3(35\ln y - 24), \quad a_i^2 - 4b_i^2 - a_i - 1 = 0$$

مسائل اضافية

حل كلا من المعادلات التالية :

١٤ – $(D_x + D_y + 1)(D_x - 2D_y - 1)z = 0$ ج : $z = e^{-x}\phi_1(y-x) + e^x\phi_2(y+2x)$

١٥ – $(D_x + 2D_y - 3)(D_x + D_y - 1)z = 0$ $z = e^{3x}\phi_1(y-2x) + e^x\phi_2(y-x)$

١٦ – $(2D_x + D_y + 1)(D_x^2 + 3D_xD_y - 3D_x)z = 0$ $z = \phi_1(y) + e^{-y}\phi_2(2y-x) + e^y\phi_3(y-3x)$

١٧ – $(D_xD_y + D_y^2)(D_x - D_y - 2)z = 0$ $z = \phi_1(x) + \phi_2(y-x) + e^{2x}\phi_3(y+x)$

١٨ – $(D_x + 2D_y)(D_x + 2D_y + 1)(D_x + 2D_y + 2)^2 z = 0$

ج : $z = \phi_1(y-2x) + e^{-x}\phi_2(y-2x) + e^{-y}[\phi_3(y-2x) + y\phi_4(y-2x)]$

وليست هذه المعادلات من حيث جوهرها سوى معادلات تفاضلية عادية من الرتبة الأولى وفيها p (أو q) هو المتغير غير المستقل .

مثال ٢ :

حل المعادلة $xr + 2p = (9x+6)e^{3x+2y}$.

لنعتبر p المتغير غير المستقل و x المتغير المستقل و y ثابتا . ولنكتب المعادلة بالشكل .

$$x\frac{\partial p}{\partial x} + 2p = (9x+6)e^{3x+2y}$$

التي لها x عامل تكاملي ، وبتكامل $x^2\frac{\partial p}{\partial x} + 2xp = (9x^2+6x)e^{3x+2y}$ نحصل على

$$x^2 p = \frac{1}{D_x}(9x^2+6x)e^{3x+2y} = \frac{1}{3}e^{3x+2y}(1 - \frac{D_x}{3} + \frac{D_x^2}{9} - \dots)(9x^2+6x)$$

$$= 3x^2e^{3x+2y} + \phi_1(y)$$

ومنه

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = 3e^{3x+2y} + \frac{1}{x^2}\phi_1(y)$$

وبالتالي فإن $z = e^{3x+2y} - \frac{1}{x}\phi_1(y) + \phi_2(y)$ هو الحل المطلوب .

النمط III :

$$R\frac{\partial p}{\partial x} + S\frac{\partial p}{\partial y} = F - Pp \quad \text{أو} \quad Rr + Ss + Pp = F \qquad (\text{٤ أ})$$

$$S\frac{\partial q}{\partial x} + T\frac{\partial q}{\partial y} = F - Qq \quad \text{أو} \quad Ss + Tt + Qq = F \qquad (\text{٤ب})$$

وهاتان معادلتان تفاضليتان خطيتان من الرتبة الأولى فيهما p أو q هو المتغير غير المستقل و x و y المتغيران المستقلان .

مثال ٣ :

حل المعادلة $2xr - ys + 2p = 4xy^2$ أو $2x\frac{\partial p}{\partial x} - y\frac{\partial p}{\partial y} = 4xy^2 - 2p$

باستخدام طريقة لاجرانج (الفصل ٢٩) فإن المجموعة المساعدة هي $\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dp}{4xy^2 - 2p}$ ينتج من النسبتين الأولى والثانية مباشرة أن $x^2y = a$

ويمكننا أن نتحقق من أن $2y^4(2x) + 2py(-y) - y^2(4xy^2 - 2p) = 0$ إذن :

$$2y^4dx + 2py\,dy - y^2dp = 0 \quad \text{أو} \quad 2\,dx - \frac{y^2dp - 2py\,dy}{y^4} = 0 \quad \text{ومنه} \quad \frac{p}{y^2} - 2x = b$$

والحل العام هو $p/y^2 - 2x = \psi(xy^2)$ وبالتالي

$p = \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 + y^2\psi(xy^2)$ ومنه $z = x^2y^2 + \phi_1(xy^2) + \phi_2(y)$ حيث $\frac{\partial}{\partial x}\phi_1(xy^2) = y^2\psi(xy^2)$

النمط IV :

$$R\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P\frac{\partial z}{\partial x} + Zz = F \quad \text{أو} \quad Rr + Pp + Zz = F \qquad (\text{٥ أ})$$

الفصل الثالث والثلاثون

المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية بمعاملات متغيرة

أن الشكل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية بمتغيرين مستقلين هو :

$$Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = F \quad (١)$$

حيث R, S, T, P, Q, Z, F دوال فى x و y فقط وحيث R, S, T ليست جميعها مساوية للصفر .

لنعالج ، قبل النظر فى المعادلة العامة ، عددا من الأنماط الخاصة .

النمط I :

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = F/R = F_1(x, y) \quad (٢ أ)$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = F/S = F_2(x, y) \quad (٢ ب)$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F/T = F_3(x, y) \quad (٢ جـ)$$

أن هذه المعادلات قابلة للاختزال وذات معاملات ثابتة (الفصل ٣٢) ، ولكننا مع هذا سنستخدم الآن طريقة مباشرة لحل هذه المعادلات .

مثال ١ :

حل المعادلة $s = x - y$

نكامل $s = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x - y$ بالنسبة لـ y فنجد $p = \dfrac{\partial z}{\partial x} = xy - \frac{1}{2}y^2 + \psi(x)$ حيث ψ اختيارى

ثم نكامل العلاقة التى حصلنا عليها بالنسبة لـ x فنجد $z = \frac{1}{2}x^2 y - \frac{1}{2}xy^2 + \phi_1(x) + \phi_2(y)$

حيث $\dfrac{d}{dx}\phi_1(x) = \psi(x)$ و $\phi_2(y)$ دالتان اختياريتان .

النمط II :

$$Rr + Pp = R\frac{\partial p}{\partial x} + Pp = F \quad (٣ أ)$$

$$Ss + Pp = S\frac{\partial p}{\partial y} + Pp = F \quad (٣ ب)$$

$$Ss + Qq = S\frac{\partial q}{\partial x} + Qq = F \quad (٣ جـ)$$

$$Tt + Qq = T\frac{\partial q}{\partial y} + Qq = F \quad (٣ د)$$

$$T\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + Q\frac{\partial z}{\partial y} + Zz = F. \quad \text{أو} \quad Tt + Qq + Zz = F \qquad (٥\ ب)$$

وليست هاتان المعادلتان من حيث الجوهر سوى معادلتين تفاضليتين عاديتين من الرتبة الثانية وفى الأولى منهما x هو المتغير المستقل وفى الثانية y هو المتغير المستقل.

مثال ٤ :

حل المعادلة $t - 2xq + x^2 z = (x-2)e^{3x+2y}$

يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل

$$(D_y^2 - 2xD_y + x^2)z = (D_y - x)^2 z = (x-2)e^{3x+2y}$$

أن الدالة المتممة هى $z = e^{xy}\phi_1(x) + xe^{xy}\phi_2(x)$ والتكامل الخاص هو

$$\frac{1}{(D_y - x)^2}(x-2)e^{3x+2y} = \frac{x-2}{(2-x)^2}e^{3x+2y} = \frac{e^{3x+2y}}{x-2}$$

والحل العام هو

$$z = e^{xy}\phi_1(x) + xe^{xy}\phi_2(x) + \frac{e^{3x+2y}}{x-2}$$

أنظر كذلك المسائل ١ — ٨

تحويل لابلاس :

أن هذا التحويل على المعادلة :

$$Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = G(u,v) \qquad (١)$$

هو انتقال من المتغيرين المستقلين x, y إلى متغيرين جديدين u, v حيث

$$u = u(x,y), \quad v = v(x,y) \qquad (٦)$$

بحيث تكون المعادلة الناتجة أبسط من المعادلة (١) من المعادلة (٦) نكتب :

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = z_u u_x + z_v v_x, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y} = z_u u_y + z_v v_y$$

$$r = \frac{\partial p}{\partial x} = z_u u_{xx} + (z_{uu}u_x + z_{uv}v_x)u_x + z_v v_{xx} + (z_{uv}u_x + z_{vv}v_x)v_x$$

$$= z_{uu}(u_x)^2 + 2z_{uv}u_x v_x + z_{vv}(v_x)^2 + z_u u_{xx} + z_v v_{xx},$$

$$s = \frac{\partial p}{\partial y} = z_u u_{xy} + (z_{uu}u_y + z_{uv}v_y)u_x + z_v v_{xy} + (z_{uv}u_y + z_{vv}v_y)v_x$$

$$= z_{uu}u_x u_y + z_{uv}(u_x v_y + u_y v_x) + z_{vv}v_x v_y + z_u u_{xy} + z_v v_{xy},$$

$$t = \frac{\partial q}{\partial y} = z_{uu}(u_y)^2 + 2z_{uv}u_y v_y + z_{vv}(v_y)^2 + z_u u_{yy} + z_v v_{yy}.$$

ولنفرض أن المعادلة الناتجة بعد إجراء التعويضات فى (١) هى

$$R'z_{uu} + S'z_{uv} + T'z_{vv} + P'z_u + Q'z_v + Zz = F \qquad (١')$$

سوف نحتاج إلى المعاملات الآتية فقط :

$$T' = R(v_x)^2 + Sv_x v_y + T(v_y)^2, \quad R' = R(u_x)^2 + Su_x u_y + T(u_y)^2$$

حيث نلاحظ أن كلا منهما من الشكل

$$R(\xi_x)^2 + S\xi_x\xi_y + T(\xi_y)^2 = (a\xi_x + b\xi_y)(e\xi_x + f\xi_y) \quad (٧)$$

(i) لنفرض $b/a=f/e$ فإذا أخذنا لـ u حلا مثل $a\xi_x + b\xi_y = 0$ و لـ v حلا مثل $e\xi_x + f\xi_y = 0$ ، فإن (١) تنتقل إلى (١') حيث $R'=T'=0$.

مثال ٥ :

حل المعادلتين (أ) $x^2(y-1)r - x(y^2-1)s + y(y-1)t + xyp - q = 0$

(ب) $y(x+y)(r-s) - xp - yq - z = 0$

(أ) تأخذ المعادلة (٧) هنا الشكل $x^2(y-1)(\xi_x)^2 - x(y^2-1)\xi_x\xi_y + y(y-1)(\xi_y)^2 = 0$

أو $x^2(\xi_x)^2 - x(y+1)\xi_x\xi_y + y(\xi_y)^2 = (x\xi_x - y\xi_y)(x\xi_x - \xi_y) = 0$

ولكن $\xi = u = xy$ يحقق $x\xi_x - y\xi_y = 0$ و $\xi = v = xe^y$ يحقق $x\xi_x - \xi_y = 0$ وبالإضافة لذلك من السهل التحقق أن كلا من هذين الحلين يحقق المعادلة التفاضلية المفروضة .

وعلى هذا فإن الحل المطلوب هو $z = \phi_1(xy) + \phi_2(xe^y)$

(ب) تأخذ المعادلة (٧) الآن الشكل $y(x+y)[(\xi_x)^2 - \xi_x\xi_y] = 0$ أو $(\xi_x - \xi_y)\xi_x = 0$

ولكن $\xi=x+y$ يحقق $\xi_x - \xi_y = 0$ و $\xi=y$ يحقق $\xi_x = 0$ ، غير أنه لا يحقق أى من هذين الحلين المعادلة التفاضلية المفروضة .

نأخذ $u=x+y$ و $v=y$ فيكون $s = z_{uu} + z_{uv}$ ، $r = z_{uu}$ ، $q = z_u + z_v$ ، $p = z_u$ وتأخذ المعادلة التفاضلية المفروضة الشكل

$$-y(x+y)z_{uv} - xz_u - yz_u - yz_v - z = 0 \quad \text{أو} \quad uvz_{uv} + uz_u + vz_v + z = 0$$

وتكتب الأخيرة بالشكل

$$z_{uv} + \frac{1}{v}z_u + \frac{1}{u}z_v + \frac{1}{uv}z = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{v}z\right) + \frac{1}{u}\left(\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{v}z\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{v}z\right) = 0$$

لنضع $\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{v}z = w$ فيكون $\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{u}w = 0$ ومنه $wu = \psi(v)$ ، وعلى هذا

$zv = \frac{1}{u}\lambda(v) + \phi_2(u)$ ، $\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{v}z = w = \frac{1}{u}\psi(v)$ وبالتالي $z = \frac{1}{u}\phi_1(v) + \frac{1}{v}\phi_2(u)$ ،

حيث $\frac{d}{dv}\lambda(v) = v\cdot\psi(v)$ و $\phi_1(v) = \frac{1}{v}\lambda(v)$ والحل المطلوب هو $z = \frac{\phi_1(y)}{x+y} + \frac{\phi_2(x+y)}{y}$.

مثال ٦ :

حل المعادلة $x^2r - y^2t + px - qy = x^2$

تأخذ المعادلة (٧) الآن الشكل $x^2(\xi_x)^2 - y^2(\xi_y)^2 = (x\xi_x - y\xi_y)(x\xi_x + y\xi_y) = 0$

أن $\xi = xy$ يحقق $x\xi_x - y\xi_y = 0$ ، $\xi = x/y$ يحقق $x\xi_x + y\xi_y = 0$ ومن السهل أن نتحقق من أن هذين الحلين يحققان المعادلة المختزلة $x^2r - y^2t + px - qy = 0$ وعلى هذا فإن الدالة المتممة هي $z = \phi_1(x/y) + \phi_2(xy)$ ، إلا أننا

نلاحظ أنه يمكن الحصول على الدالة المتممة والتكامل الخاص معا وفق ما يلي . نأخذ $u = xy$ و $v = x/y$ فيكون :

$$p = yz_u + \frac{1}{y}z_v, \quad q = xz_u - \frac{x}{y^2}z_v, \quad r = y^2 z_{uu} + 2z_{uv} + \frac{1}{y^2}z_{vv}, \quad t = x^2 z_{uu} - 2\frac{x^2}{y^2}z_{uv} + \frac{x^2}{y^4}z_{vv} + \frac{2x}{y^3}z_v$$

وتصبح المعادلة المفروضة على الشكل $4x^2 z_{uv} = x^2$ أو $z_{uv} = 1/4$

فإذا كاملنا بالنسبة لـ u نجد $z_v = \psi(v) + \frac{1}{4}u$

ثم بالنسبة لـ v نجد $z = \phi_1(v) + \phi_2(u) + \frac{1}{4}uv = \phi_1(x/y) + \phi_2(xy) + \frac{1}{4}x^2$

حيث $\frac{d}{dv}\phi_1(v) = \psi(v)$ أنظر المسألتين ٩-١٠

(ii) لنفرض $b/a = f/e$ عندئذ يكون $R(\xi_x)^2 + S\xi_x\xi_y + T(\xi_y)^2 = m(a\xi_x + b\xi_y)^2$ وسنعالج هذه الحالة فى المسألة ١١ .

المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية من الرتبة الثانية :

إن إحدى الطرق الممكنة لحل معادلة تفاضلية جزئية غير خطية مفروضة من الرتبة الثانية .

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{٨}$$

هى الطريقة التى ترشحها التمارين العديدة فى المعادلات الخطية التى مرت معنا .

ولقد كانت الخطوة الأولى فى كل من التمارين ١ - ٣ تتكون من البحث عن علاقة من الشكل .

$$u = \psi(v) \tag{٩}$$

حيث ψ اختيارى ، وحيث $u = u(x, y, z, p, q)$ و $v = v(x, y, z, p, q)$ ، نستطيع منها أن نحصل على المعادلة التفاضلية المفروضة بحذف الدالة الاختيارية . نسمى كل علاقة من النمط (٩) تكاملا متوسطا لـ (٨) .

مثال ذلك أن $p - xy + \frac{1}{2}y^2 = \psi(x)$ تكامل متوسط لـ $s = x - y$ (المثال ١)

يمكن التحقق من أن الشكل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية التى فيها .

$$u = \psi(v)$$

حيث ψ اختيارى وحيث $u = u(x, y, z, p, q)$ و $v = v(x, y, z, p, q)$ تكاملا متوسطا هو

$$Rr + Ss + Tt + U(rt - s^2) = V \tag{١٠}$$

حيث R, S, T, U, V دول فى x, y, z, p, q . إلا أنه يتضح من تعاريف $R, S, ..., V$ أنه ليس لكل معادلة من الشكل (١٠) تكامل متوسط .

أن الدراسة التالية تتعلق بطريقة مونج فى تعيين التكامل المتوسط لـ (١٠) بفرض وجوده .

النمط : $Rr + Ss + Tt = V$

لننظر فى المعادلة

$$Rr + Ss + Tt = V \tag{١١}$$

التى تنتج عن (١٠) بجعل U مطابقة للصفر . بما أننا نبحث عن z كدالة فى x, y فإنه لدينا دائما :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = p\,dx + q\,dy \tag{١٢}$$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy = r\,dx + s\,dy \qquad (٢_{١٢})$$

$$dq = \frac{\partial q}{\partial x}dx + \frac{\partial q}{\partial y}dy = s\,dx + t\,dy \qquad (٣_{١٢})$$

بحل المعادلتين الأخيرتين نجد $t = \dfrac{dq - s\,dx}{dy}$ ، $r = \dfrac{dp - s\,dy}{dx}$ وبالتعويض فى (١١) نحصل على

$$R\,\frac{dp - s\,dy}{dx} + Ss + T\,\frac{dq - s\,dx}{dy} = V$$ ومنه نجد

$$s[R(dy)^2 - S\,dx\,dy + T(dx)^2] = R\,dy\,dp + T\,dx\,dq - V\,dx\,dy \qquad (١٣)$$

تسمى المعادلتان

$$R(dy)^2 - S\,dx\,dy + T(dx)^2 = 0 \qquad (١_{١٤})$$

$$R\,dy\,dp + T\,dx\,dq - V\,dx\,dy = 0 \qquad (٢_{١٤})$$

معادلتى مونج .

لنفرض أولا أن $R(dy)^2 - S\,dx\,dy + T(dx)^2 = (A\,dy + B\,dx)^2 = 0$

فإذا حقق $u = u(x, y, z, p, q) = a, \quad v = v(x, y, z, p, q) = b$ كل من

$$\left[\begin{array}{l} A\,dy + B\,dx = 0 \\ R\,dy\,dp + T\,dx\,dq - V\,dx\,dy = 0 \end{array}\right.$$

فإن $u = \psi(v)$ تكامل متوسط لـ (١١) لأن كلا من $u = a, v = b$ يحقق (١٣) وبالتالى فهو يحقق (١١)

لنفرض بعد ذلك أن $R(dy)^2 - S\,dx\,dy + T(dx)^2 = (A_1\,dy + B_1\,dx)(A_2\,dy + B_2\,dx) = 0$

حيث $A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0$. لدينا الآن المجموعتين .

$$\left[\begin{array}{l} A_1\,dy + B_1\,dx = 0 \\ R\,dy\,dp + T\,dx\,dq - V\,dx\,dy = 0 \end{array}\right. \quad و \quad \left[\begin{array}{l} A_2\,dy + B_2\,dx = 0 \\ R\,dy\,dp + T\,dx\,dq - V\,dx\,dy = 0 \end{array}\right.$$

فإذا كانت احدى المجموعتين قابلة للتكامل فإننا نحصل على تكامل متوسط لـ (١١) .

أما إذا كانت المجموعتين قابلتين للتكامل فيكون تحت تصرفنا تكاملان متوسطان .

سنناقش فى الأمثلة التالية والمسائل المحلولة طرق الحصول على حل المعادلة المفروضة إذا تمكنا من الحصول على تكامل متوسط لها .

مثال ٧ :

حل المعادلة $q(yq + z)r - p(2yq + z)s + yp^2 t + p^2 q = 0$

لدينا هنا $R = q(yq + z), \quad S = -p(2yq + z), \quad T = yp^2, \quad V = -p^2 q$ ومعادلتا مونج هما

$$R(dy)^2 - S\,dx\,dy + T(dx)^2 = q(yq+z)(dy)^2 + p(2yq+z)dx\,dy + yp^2(dx)^2$$
$$= (q\,dy + p\,dx)[(yq+z)dy + yp\,dx] = 0$$

و

$$R\,dy\,dp + T\,dx\,dq - V\,dx\,dy = q(yq+z)dy\,dp + yp^2dx\,dq + p^2q\,dx\,dy = 0$$

لنبحث عن حل المجموعة
$$\begin{cases} q\,dy + p\,dx = 0 \\ q(yq+z)dy\,dp + yp^2dx\,dq + p^2q\,dx\,dy = 0 \end{cases}$$

بمقارنة المعادلة الأولى مع (١٢،) نجد $dz = 0$ ومنه $z = a$

وبتعويض $dy = -p\,dx/q$ (من المعادلة الأولى) فى المعادلة الثانية نحصل على

$$(yq+z)dp - p(y\,dq + q\,dy) = 0$$

وإذا أضفنا $-p\,dz = o$ إلى الأخيرة نجد :

$$(yq+z)dp - p(y\,dq + q\,dy + dz) = 0 \quad \text{أو} \quad \frac{dp}{p} = \frac{y\,dq + q\,dy + dz}{yq+z}$$

ومنه نجد الحل $\frac{yq+z}{p} = b$. وعلى هذا فإن $yq + z = p\cdot f(z)$ تكامل متوسط . أن مجموعة لا جرانج لهذه المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى هى $\frac{dx}{f(z)} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z}$ من $\frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z}$ نجد $yz = a$

ومن $\frac{dx}{f(z)} = \frac{dz}{z}$ نجد $x = \int f(z)\frac{dz}{z} = \phi_1(z) + b$

والحل المطلوب هو

$$x = \phi_1(z) + \phi_2(yz)$$

لننظر بعد ذلك فى المجموعة الثانية
$$\begin{cases} (yq+z)dy + yp\,dx = 0 \\ q(yq+z)dy\,dp + yp^2dx\,dq + p^2q\,dx\,dy = 0 \end{cases}$$

لدينا من المعادلة الأولى ; $p\,dx + q\,dy = -z\,dy/y$ ومنه $dz = -z\,dy/y$ وبالتالى $y\,z = a$. بالتعويض من المعادلة الأولى فإن المعادلة الثانية تأخذ الشكل .

$$qy\,dp - py\,dq - pq\,dy = 0 \quad \text{أو} \quad \frac{dp}{p} - \frac{dq}{q} - \frac{dy}{y} = 0$$

التى تعطينا الحل $q\,y/p = b$. وعلى هذا فإن $qy = p\cdot g(yz)$ تكامل متوسط . أن مجموعة لا جرانج هى $dz = 0 ,\ \frac{dx}{g(yz)} = \frac{dy}{-y}$ ومنها نجد $z = a$. ونجد للمعادلة الأولى $\frac{dx}{g(ya)} = \frac{dy}{-y}$

الحل $x = -\int g(ya)\frac{dy}{y} = \phi_2(ya) + b$ وبذلك نحصل على $x = \phi_1(z) + \phi_2(yz)$ كما سبق .

يمكن الوصول إلى الحل باستخدام التكاملين المتوسطين فى آن واحد . فمن هذين التكاملين نجد

$$q = \frac{z\cdot g(yz)}{y[f(z) - g(yz)]}, \quad p = \frac{z}{f(z) - g(yz)}$$

وبالتعويض فى $p\,dx + q\,dy = dz$ نحصل على $yz\,dx + zg(yz)dy = yf(z)dz - yg(yz)dz$

وإذا كتبنا $f(z) = zf_1(z)$ و $g(yz) = -yzg_1(yz)$ فإن المعادلة الأخيرة تأخذ الشكل .

$$dx = f_1(z)dz + g_1(yz)[z\,dy + y\,dz]$$

ومنه نجد بالتكامل $x = \phi_1(z) + \phi_2(yz)$

أنظر كذلك المسائل ١٢ – ١٦

النمط : لننظر في المعادلة (١٠) $Rr + Ss + Tt + U(rt - s^2) = V$ حيث $U \neq 0$ ولنعوض

$r = \dfrac{dp - s\,dy}{dx}, \quad t = \dfrac{dq - s\,dx}{dy}$ كما فعلنا في النمط السابق فنحصل على

$$s[R(dy)^2 - S\,dx\,dy + T(dx)^2 + U(dx\,dp + dy\,dq)] = R\,dy\,dp + T\,dx\,dq + U\,dp\,dq - V\,dx\,dy$$

تسمى المعادلتان :

$$R(dy)^2 - S\,dx\,dy + T(dx)^2 + U(dx\,dp + dy\,dq) = 0 \quad (١٥_1)$$

$$R\,dy\,dp + T\,dx\,dq + U\,dp\,dq - V\,dx\,dy = 0 \quad (١٥_2)$$

معادلتي مونج . يلاحظ أن هاتين المعادلتين تصبحان (١٤$_1$) و (١٤$_2$) عندما $U = 0$ غير أنه ، على عكس (١٤$_1$) و (١٤$_2$) ، لا يمكن تحليل أي منهما .

سنحاول اختيار $\lambda = \lambda(x, y, z, p, q)$ بحيث نحصل على تركيب قابل للتحليل .

$$\lambda[R(dy)^2 - S\,dx\,dy + T(dx)^2 + U(dx\,dp + dy\,dq)] + R\,dy\,dp + T\,dx\,dq + U\,dp\,dq - V\,dx\,dy \quad (١٦)$$

$$= (a\,dy + b\,dx + c\,dp)(\alpha\,dy + \beta\,dx + \gamma\,dq)$$

$$= a\alpha(dy)^2 + (a\beta + b\alpha)dx\,dy + b\beta(dx)^2 + c\beta\,dx\,dp + a\gamma\,dy\,dq + c\alpha\,dy\,dp$$

$$+ b\gamma\,dx\,dq + c\gamma\,dp\,dq = 0$$

نجد بمقارنة المعاملات أن

$$a\alpha = R\lambda, \quad a\beta + b\alpha = -S\lambda - V, \quad b\beta = T\lambda, \quad c\beta = U\lambda = a\gamma, \quad c\alpha = R, \quad b\gamma = T, \quad c\gamma = U$$

وتتحقق العلاقة الأولى إذا أخذنا $a = \lambda$ و $\alpha = R$ ويعين هذا الاختيار $b = T/U, \ \beta = \lambda U, \ c = 1, \ \gamma = U.$

أما العلاقة المتبقية $a\beta + b\alpha = -S\lambda - V$ فتأخذ الشكل .

$$U\lambda^2 + \frac{TR}{U} = -S\lambda - V$$

أو

$$U^2\lambda^2 + SU\lambda + TR + UV = 0 \quad (١٧)$$

ويكون لـ(١٧) بوجه عام جذران مختلفان $\lambda = \lambda_1, \ \lambda = \lambda_2$ ، عندئذ يمكن تحليل (١٦) إلى

$$(\lambda_1 U dy + T dx + U dp)(R dy + \lambda_2 U dx + U dq) = 0 \quad (١٨_1)$$

و

$$(\lambda_2 U dy + T dx + U dp)(R dy + \lambda_1 U dx + U dq) = 0. \quad (١٨_2)$$

يوجد إذن أربع مجموعات ينبغي اعتبارها . أن المجموعة $\lambda_1 U dy + T dx + U dp = 0, \ \lambda_2 U dy + T dx + U dp = 0$

تؤدي إلى

$$(\lambda_1 - \lambda_2) U dy = 0$$

وبالتالي فإن $U dy \equiv 0$ ما لم يكن $\lambda_1 = \lambda_2$. وبشكل مماثل تؤدي المجموعة

$$R dy + \lambda_1 U dx + U dq = 0, \quad R dy + \lambda_2 U dx + U dq = 0$$

إلى $U dx \equiv 0$ وعلى هذا فإننا سنستخدم المجموعتين التاليتين فقط .

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_2 U dy + T dx + U dp = 0 \\ R dy + \lambda_1 U dx + U dq = 0. \end{array}\right. \quad \text{أو} \quad \left[\begin{array}{l} \lambda_1 U dy + T dx + U dp = 0 \\ R dy + \lambda_2 U dx + U dq = 0 \end{array}\right. \quad (١٩)$$

وتعطينا كل منهما ، إذا كانت قابلة للتكامل ، تكاملا متوسطا لـ(١٠)

مثال ٨ :

حل المعادلة $3s - 2(rt - s^2) = 2$

لدينا هنا $R = 0, \ S = 3, \ T = 0, \ U = -2, \ V = 2$ ومنه $U^2\lambda^2 + SU\lambda + TR + UV = 4\lambda^2 - 6\lambda - 4 = 0$

إذن $\lambda_1 = -1/2$ و $\lambda_2 = 2$. لنبحث عن حلول المجموعتين

$$\left[\begin{array}{l}\lambda_2 U dy + T dx + U dp = -4dy - 2dp = 0\\ R dy + \lambda_1 U dx + U dq = dx - 2dq = 0.\end{array}\right. \quad , \quad \left[\begin{array}{l}\lambda_1 U dy + T dx + U dp = dy - 2dp = 0\\ R dy + \lambda_2 U dx + U dq = -4dx - 2dq = 0\end{array}\right.$$

نجد من المجموعة الأولى $y - 2p = a$ و $2x + q = b$ ومنه (i) $y - 2p = f(2x + q)$ تكامل متوسط .

ونجد من المجموعة الثانية $2y + p = a$ و $x - 2q = b$ ومنه (ii) $2y + p = g(x - 2q)$ تكامل متوسط .

وبما أن q تظهر فى متغيرات g و f فإنه لم يعد ممكنا الحصول على حل للمعادلة المفروضة يحوى دالتين اختياريتين قابلة وذلك عن طريق حساب p و q والتعويض فى $dz = p\,dx + q\,dy$.

سنحاول الوصول إلى حل يحوى ثوابت اختيارية بدءاً من التكامل المتوسط $y - 2p = f(2x + q)$. لحصول على معادلة التكامل نأخذ $f(2x + q) = \alpha(2x + q) + \beta$ حيث α و β ثابتان اختياريان .

ومجموعة لا جرانج للمعادلة $y - 2p = \alpha(2x + q) + \beta$ أو المعادلة $2p + \alpha q = y - 2\alpha x - \beta$

هى

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{\alpha} = \frac{dz}{y - 2\alpha x - \beta}$$

نجد من النسبتين الأولى والثانية أن $\alpha x = 2y + \xi$. بالتعويض فى النسبة الثالثة نجد

$$\frac{dy}{\alpha} = \frac{dz}{-3y - 2\xi - \beta}$$

أو $\alpha\,dz = (-3y - 2\xi - \beta)dy$ ، $\alpha z = -\frac{3}{2}y^2 - 2\xi y - \beta y + \eta$

وعلى هذا فإن $\alpha z = \frac{5}{2}y^2 - (2\alpha x + \beta)y + \phi_1(\alpha x - 2y)$ حل للمعادلة المفروضة يحوى دالة اختيارية وثابتين اختياريين .

لنعالج التكامل المتوسط بطريقة مماثلة ونأخذ $2y + p = \gamma(x - 2q) + \delta$ أو $p + 2\gamma q = \gamma x - 2y + \delta$ حيث γ و δ ثابتان اختياريتان . أن مجموعة لا جرانج الموافقة هى $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2\gamma} = \frac{dz}{\gamma x - 2y + \delta}$ ونحصل من النسبتين الأولى والثانية على $y = 2\gamma x + \xi$

وبذلك تأخذ النسبتين الأولى والثانية الشكل $\frac{dx}{1} = \frac{dz}{-3\gamma x - 2\xi + \delta}$ ومنه $z = -\frac{3}{2}\gamma x^2 - 2\xi x + \delta x + \eta$

وبالتالى فإن $z = \frac{5}{2}\gamma x^2 - (2y - \delta)x + \phi_2(y - 2\gamma x)$ حل يحوى دالة اختيارية وثابتين اختياريتين .

سنجد فيما يلى حلا يحوى دالتين اختياريتين للوسيطين λ و μ لنضع $2x + q = \lambda$ و $x - 2q = \mu$

فيكون $x = (2\lambda + \mu)/5$. عندئذ تأخذ (i) و (ii) الشكلين $y - 2p = f(\lambda)$ و $2y + p = g(\mu)$ ومنه $y = [f(\lambda) + 2g(\mu)]/5$. ويكون الآن .

$$p = \tfrac{1}{2}[y - f(\lambda)] = -2y + g(\mu) \quad \text{(iii)}$$

و

$$q = \lambda - 2x = \tfrac{1}{2}(x - \mu) \quad \text{(iv)}$$

وبتعويض قيمة p الثانية وقيمة q الأولى فى $dz = p\,dx + q\,dy$

نجـد

$$\begin{aligned} dz &= [-2y + g(\mu)]dx + (\lambda - 2x)dy \\ &= -2(y\,dx + x\,dy) + \frac{1}{5}g(\mu)[2\,d\lambda + d\mu] + \frac{1}{5}\lambda[f'(\lambda)d\lambda + 2g'(\mu)d\mu] \\ &= -2(y\,dx + x\,dy) + \frac{2}{5}[\lambda g'(\mu)d\mu + g(\mu)d\lambda] + \frac{1}{5}[\lambda f'(\lambda) + f(\lambda)]d\lambda - \frac{1}{5}f(\lambda)d\lambda + \frac{1}{5}g(\mu)d\mu \end{aligned}$$

ومنه $z = -2xy + \frac{2}{5}\lambda g(\mu) + \frac{1}{5}\lambda f(\lambda) - \phi_1(\lambda) + \phi_2(\mu)$

$= -2xy + \lambda y - \phi_1(\lambda) + \phi_2(\mu)$

وكذلك يمكن الوصول إلى هذا الحل باستخدام القيمة الأولى لـ p من (iii) والقيمة الثانية لـ q من (iv)
أنظر كذلك المسألتين ١٧ – ١٨

مسائل محلولة

١ – حل المعادلة $r = x^2e^{-y}$ أو $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2e^{-y}$

تكامل المعادلة بالنسبة لـ x فنجد $p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^3}{3}e^{-y} + \phi_1(y)$ ثم نكاملها مرة ثانية فنجد

$$z = \frac{x^4}{12}e^{-y} + x\phi_1(y) + \phi_2(y)$$

٢ – حل المعادلة $xy^2s = 1 - 4x^2y$

تكامل: $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = x^{-1}y^{-2} - 4xy^{-1}$ بالنسبة لـ y فنجد $\frac{\partial z}{\partial x} = -x^{-1}y^{-1} - 4x\ln y + \psi(x)$

ثم نكامل بالنسبة لـ x فنجد $z = -\frac{1}{y}\ln x - 2x^2\ln y + \phi_1(x) + \phi_2(y)$ حيث $\frac{d}{dx}\phi_1(x) = \psi(x)$

٣ – حل المعادلة : $xys - px = y^2$

نكامل $\frac{1}{x} = \dfrac{y\frac{\partial p}{\partial y} - p}{y^2}$ بالنسبة لـ y فنجد $\frac{p}{y} = \frac{y}{x} + \psi(x)$ ومنه $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{x} + y\psi(x)$

ثم نكامل بالنسبة لـ x فنجد $z = y^2\ln x + y\phi_1(x) + \phi_2(y)$ حيث $\frac{d}{dx}\phi_1(x) = \psi(x)$

٤ – حل المعادلة : $t - xq = -\sin y - x\cos y$

نكامل $\frac{\partial q}{\partial y} - xq = -(\sin y + x\cos y)$ مستخدمين العامل التكاملي e^{-xy} فنحصل على

$e^{-xy}q = -\int e^{-xy}(\sin y + x\cos y)dy = e^{-xy}\cos y + \psi(x)$ أو $q = \frac{\partial z}{\partial y} = \cos y + e^{xy}\psi(x)$

ثم نكامل بالنسبة لـ y فنجد $z = \sin y + e^{xy}\phi_1(x) + \phi_2(x)$ حيث $\phi_1(x) = \psi(x)/x$

٥ – حل المعادلة : $sy - 2xr - 2p = 6xy$

إن المجموعة المساعدة للمعادلة $2x\frac{\partial p}{\partial x} - y\frac{\partial p}{\partial y} = -6xy - 2p$ هي $\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dp}{-6xy - 2p}$

ونجد من النسبتين الأولى والثانية أن $a = xy^2$ ويمكن التحقق بسهولة أن :

$$2y^3(2x) - (2yp + 2xy^2)(-y) + y^2(-6xy - 2p) = 0$$

ومنه $2y^3 dx - (2yp + 2xy^2)dy + y^2 dp = 0$

أو $\dfrac{y^2(dp + 2x\,dy + 2y\,dx) - 2y(p + 2xy)dy}{y^4} = 0$ وبالتالى $\dfrac{p + 2xy}{y^2} = b$

وهكذا نكون قد حصلنا على الحل $p + 2xy = y^2\,\psi(xy^2)$ ومن هذا الحل نجد $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -2xy + y^2\,\psi(xy^2)$

وبالتالى $z = -x^2 y + \phi_1(xy^2) + \phi_2(y)$ حيث $\dfrac{\partial}{\partial x}\phi_1(xy^2) = y^2\,\psi(xy^2)$

٦ — حل المعادلة :

$$xs + yt + q = 10x^3 y$$

إن المجموعة المساعدة للمعادلة $x\dfrac{\partial q}{\partial x} + y\dfrac{\partial q}{\partial y} = 10x^3 y - q$ هى $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dq}{10x^3 y - q}$

ونجد من النسبتين الأولى والثانية أن $x/y = a$ ويمكن التحقق أن :

$$(q - 8x^3 y)x - 2x^4(y) + x(10x^3 y - q) = 0$$

ومنه $(q - 8x^3 y)dx - 2x^4 dy + x\,dq = 0$ أو $x\,dq + q\,dx = 8x^3 y\,dx + 2x^4 dy$ وبالتالى

$$qx = 2x^4 y + b$$

والحل العام هو $qx = 2x^4 y + \psi(y/x)$ ونجد من هذا الحل أن :

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y + \dfrac{1}{x}\psi(\dfrac{y}{x})$ ومنه $z = x^3 y^2 + \phi_1(\dfrac{y}{x}) + \phi_2(x)$، حيث $\dfrac{\partial}{\partial y}\phi_1(\dfrac{y}{x}) = \dfrac{1}{x}\psi(\dfrac{y}{x})$

٧ — حل المعادلة : $t - q - \dfrac{1}{x}(\dfrac{1}{x} - 1)z = xy^2 - x^2 y^2 + 2x^3 y - 2x^3$

يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل $[D_y^2 - D_y - \dfrac{1}{x}(\dfrac{1}{x} - 1)]z = xy^2 - x^2 y^2 + 2x^3 y - 2x^3$

أن الدالة المتممة هى : $z = e^{y/x}\phi_1(x) + e^{y - y/x}\phi_2(x)$

والتكامل الخاص نكتب $z = Ay^2 + By + C$ حيث C, B, A دوال فى x أو ثوابت .

إذن : $[D_y^2 - D_y - \dfrac{1}{x}(\dfrac{1}{x} - 1)]z = 2A - 2Ay - B - (\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x})(Ay^2 + By + C) = xy^2 - x^2 y^2 + 2x^3 y - 2x^3$

وبمقارنة معاملات القوى المختلفة لـ y نجد :

$$-(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})A = x(1 - x), \quad -2A - (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})B = 2x^3, \quad 2A - B - (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})C = -2x^3$$

ومنه نجد : $A = -x^3,\ B = C = 0$ والحل المطلوب $z = e^{y/x}\phi_1(x) + e^{y - y/x}\phi_2(x) - x^3 y^2$

٨ — حل المعادلة : $ys + p - yq - z = (1 - x)(1 + \ln y)$

يمكن حل المعادلة مباشرة إذا لاحظنا أنه يمكن كتابتها بالشكل :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{y}z) - (\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{y}z) = \frac{1-x}{y}(1 + \ln y)$$

وإذا وضعنا $w = \dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{1}{y}z$ تأخذ المعادلة الشكل $\dfrac{\partial w}{\partial x} - w = \dfrac{1-x}{y}(1 + \ln y)$ التى لها e^{-x} عامل تكامل .

إذن : $\frac{1+\ln y}{y}(xe^{-x}) + \psi(y) = \frac{1+\ln y}{y}\int^x (e^{-x} - xe^{-x})dx = e^{-x}w$ ومنه $w = x\frac{1+\ln y}{y} + e^x\psi(y)$

وإذا كاملنا الآن $\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{y}z = x\frac{1+\ln y}{y} + e^x\psi(y)$ مستخدمين y كعامل تكامل فإننا نحصل على :

$$yz = x\int^y(1+\ln y)dy + e^x\int^y y\psi(y)\,dy = xy\ln y + e^x\phi_1(y) + \phi_2(x)$$

تحويل لابلاس :

٩ – حل المعادلة : $t - s + p - q(1 + 1/x) + z/x = 0$

لنضع $(\xi_y)^2 - \xi_x\xi_y = 0$ فنجد بالحل $\xi = y$ و $\xi = x + y$

فإذا اخترنا $u = x$ و $v = x + y$ نجد $s = z_{uv} + z_{vv}$ ، $p = z_u + z_v, q = z_v$ و $t = z_{vv}$ وبالتعويض

في المعادلة المفروضة نحصل على $0 = \frac{1}{x}(\frac{\partial z}{\partial v} - z) + \frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial z}{\partial v} - z) = z_{uv} - z_u + \frac{1}{x}(z_v - z)$

لنضع الآن $\frac{\partial z}{\partial v} - z = w$ فيكون $\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{w}{u} = 0$ ومنه $uw = u(\frac{\partial z}{\partial v} - z) = \psi(v)$

نكامل، $\frac{1}{u}\psi(v) = \frac{\partial z}{\partial v} - z$ فينتج $e^{-v}z = \frac{1}{u}\phi_1(v) + \phi(u)$ ومنه $z = \frac{e^v}{u}\phi_1(v) + e^v\phi(u)$.

بالعودة إلى المتغيرات الأصلية نجد $\frac{1}{x}f(x+y) + e^y g(x) = \frac{e^{x+y}}{x}\phi_1(x+y) + e^{x+y}\phi(x) = z$ حيث

$f(x+y) = e^{x+y}\phi_1(x+y)$ و $g(x) = e^x\phi(x)$

١٠ – حل المعادلة : $xys - x^2r - px - qy + z = -2x^2y$

نجد من $xy\xi_x\xi_y - x^2(\xi_x)^2 = x\xi_x(y\xi_y - x\xi_x) = 0$ أن $\xi = y$ و $\xi = xy$

باستخدام $u = xy, v = y$ يكون $s = z_u + xyz_{uu} + yz_{uv}$ ، $r = y^2z_{uu}$ ، $q = xz_u + z_v$ ، $p = yz_u$

وبذلك تأخذ المعادلة المفروضة الشكل :

$z_{uv} - \frac{1}{v}z_u - \frac{1}{u}z_v + \frac{1}{uv}z = -\frac{2u}{v^2}$ أو $\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{1}{v}z) - \frac{1}{u}(\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{1}{v}z) = -\frac{2u}{v^2}$.

لنضع $\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{1}{v}z = w$ فيكون $\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{w}{u} = -\frac{2u}{v^2}$ ومنه $\frac{w}{u} = -\frac{2u}{v^2} + \psi(v)$ أو $w = -\frac{2u^2}{v^2} + u\psi(v)$

نكامل $w = \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{1}{v}z = -\frac{2u^2}{v^2} + u\psi(v)$ فنجد $\frac{z}{v} = \frac{u^2}{v^2} + u\psi_1(v) + \phi_2(u)$ ومنه

$$z = \frac{u^2}{v} + uv\,\psi_1(v) + v\,\phi_2(u) = \frac{u^2}{v} + u\,\lambda_1(v) + v\,\phi_2(u)$$

وبالعودة إلى المتغيرات الأصلية فنجد $x\phi_1(y) + y\phi_2(xy) + x^2y = z = xy\,\lambda_1(y) + y\,\phi_2(xy) + x^2y$

١١ – حل المعادلة : $x^2r - 2xys + y^2t - xp + 3yq = 8y/x$

لدينا هنا $0 = (x\xi_x - y\xi_y)^2 = x^2(\xi_x)^2 - 2xy\xi_x\xi_y + y^2(\xi_y)^2$ وبما أن العاملين غير مختلفين فإننا نحصل

فقط على $\xi = xy$. لنضع الآن $u = xy$ ونأخذ $v = y$ فيكون

$$p = yz_u, \quad q = xz_u + z_v, \quad r = y^2z_{uu}, \quad s = z_u + xyz_{uu} + yz_{uv}\quad t = x^2z_{uu} + 2xz_{uv} + z_{vv}$$

وتأخذ المعادلة التفاضلية المفروضة :

الشكل : $y^2 z_{vv} + 3yz_v = 8y/x$ أو $v^2 z_{vv} + 3vz_v = 8v^2/u$

وهى معادلة من نمط كوشى . غير أننا نلاحظ أن v عامل تكاملى وبالتالى فإن :

$v^3 z_{vv} + 3v^2 z_v = 8v^3/u$ ومنه $v^3 z_v = 2v^4/u + \phi(u)$

ومن الأخيرة نجد $z_v = \dfrac{2v}{u} + \dfrac{1}{v^3}\phi(u)$ وبالتكامل ينتج $z = \dfrac{v^2}{u} - \dfrac{1}{2v^2}\phi(u) + \phi_1(u)$

$$= \frac{v^2}{u} + \frac{1}{v^2}\psi(u) + \phi_1(u)$$

$$= \phi_1(xy) + \frac{1}{y^2}\psi(xy) + \frac{y}{x}$$

أى : $z = \phi_1(xy) + x^2\phi_2(xy) + \dfrac{y}{x}$ حيث $\psi(xy) = x^2y^2\phi_2(xy)$

طريقة مونج :

١٢ – حل المعادلة : $qs - pt = q^3$

أن معادلتى مونج هما $q\,dx\,dy + p(dx)^2 = 0$ و $p\,dx\,dq + q^3\,dx\,dy = 0$

ونجد من المعادلة الأولى $q\,dy + p\,dx = 0$ ومنه $dz = p\,dx + q\,dy = 0$ وبالتالى $z = a$

وإذا عوضنا $q\,dy = -p\,dx$ فى المعادلة الثانية نجد $dq - q^2dx = 0$ ، ومنه $1/q + x = b$ وبالتالى $1/q + x = f(z)$ أى أن $[x - f(z)]q = -1$ تكامل متوسط .

ونحصل على الحل المطلوب بحل هذه المعادلة من الرتبة الأولى فنجد :

$xz - \int f(z)dz = -y + \phi_2(x)$ أو $y + xz = \phi_1(z) + \phi_2(x)$ حيث $\phi_1'(z) = f(z)$

١٣ – حل المعادلة : $q^2r - 2pqs + p^2t = pq^2$

إن معادلتى مونج هما $(q\,dy + p\,dx)^2 = 0$ و $q^2\,dy\,dp + p^2\,dx\,dq - pq^2\,dx\,dy = 0$

ونجد من المعادلة الأولى $q\,dy + p\,dx = 0$ ومنه $dz = p\,dx + q\,dy = 0$ وبالتالى $z = a$

وإذا عوضنا $q\,dy = -p\,dx$ فى المعادلة الثانية نجد $-q\,dp + p\,dq + pq\,dx = 0$ ومنه $-\dfrac{dp}{p} + \dfrac{dq}{q} + dx = 0$ وبالتالى $e^xq/p = b$ أى أن $e^xq - p\,f(z) = 0$ تكامل متوسط . ومجموعة لاجرانج لهذه المعادلة هى $dz = 0$ ، $\dfrac{dx}{f(z)} = \dfrac{dy}{-e^x}$ ينتج من المعادلة الثانية أن $z = c$ وبذلك تأخذ الأولى الشكل $\dfrac{dx}{f(c)} = \dfrac{dy}{-e^x}$ وبحل المعادلة الأخيرة نجد $e^x/f(c) + y = d$ ونجد الحل المطلوب :

$y = -e^x/f(z) + \phi_2(z) = e^x\phi_1(z) + \phi_2(z)$ حيث $\phi_1(z) = -1/f(z)$

١٤ – حل المعادلة : $x(r + 2xs + x^2t) = p + 2x^3$

إن معادلتى مونج هما : $(dy)^2 - 2x\,dx\,dy + x^2(dx)^2 = (dy - x\,dx)^2 = 0$

$$x\,dy\,dp + x^3\,dx\,dq - (p + 2x^3)dx\,dy = 0.$$

لنبحث عن حل المجموعة $x\,dy\,dp + x^3\,dx\,dq - (p + 2x^3)dx\,dy = 0$ ، $dy - x\,dx = 0$

نجد من المعادلة الأولى $x^2 - 2y = a$ وإذا عوضنا $dy = xdx$ فى الثانية نجد :

$$x\,dp + x^2 dq - (p + 2x^3)dx = 0$$

وباستخدام العامل التكاملي $1/x^2$ نحصل على التكامل المتوسط $p + xq = x^3 + x f(x^2 - 2y)$

إن مجموعة لاجرانج هى $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{x^3 + x f(x^2 - 2y)}$ ونحصل من النسبتين الأولى والثانية على $x^2 - 2y = c$

وعندئذ تأخذ النسبتان الأولى والثالثة الشكل $\frac{dx}{1} = \frac{dz}{x^3 + x f(c)}$. وبالحل نجد :

$$z = \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^2 f(c) + \phi(c) \quad \text{أو} \quad z = \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^2 f(x^2 - 2y) + \phi(x^2 - 2y)$$

١٥ــ حل المعادلة : $q(1+q)r - (1+2q)(1+p)s + (1+p)^2 t = 0$

إن معادلتى مونج هما :

$$q(1+q)(dy)^2 + (1+2q)(1+p)dx\,dy + (1+p)^2 (dx)^2 = [q\,dy + (1+p)dx][(1+q)dy + (1+p)dx] = 0$$

و $q(1+q)dy\,dp + (1+p)^2 dx\,dq = 0$

لننظر أولا فى المجموعة

$$q\,dy + (1+p)dx = 0$$
$$q(1+q)dy\,dp + (1+p)^2 dx\,dq = 0$$

نجد من المعادلة الأولى $p\,dx + q\,dy = -dx$ وعلى هذا فإن $dz = -dx$ ومنه $x + z = a$ وبتعويض $q\,dy = -(1+p)dx$ فى الثانية ينتج المعادلة :

$$-(1+q)dp + (1+p)dq = 0$$

التى تعطى $\frac{1+p}{1+q} = b$. وهكذا فإن $\frac{1+p}{1+q} = f(x+z)$ تكامل متوسط .

لننتقل بعد ذلك إلى المجموعة : $(1+q)dy + (1+p)dx = 0$

$$q(1+q)dy\,dp + (1+p)^2 dx\,dq = 0$$

ونكتب المعادلة الأولى بالشكل $p\,dx + q\,dy = -(dx + dy)$ ومنه $dz = -(dx + dy)$ وبالتالى $x + y + z = a$

وبتعويض $(1+q)dy = -(1+p)dx$ فى الثانية تنتج المعادلة $-q\,dp + (1+p)dq = 0$ التى تعطى $\frac{1+p}{q} = b$ ، وبالتالى فإن $\frac{1+p}{q} = g(x+y+z)$ تكامل متوسط .

لنحسب p و q من التكاملين المتوسطين فنجد $q = \frac{f}{g-f}$ ، $p = \frac{fg + f - g}{g - f}$ وبالتعويض فى العلاقة $p\,dx + q\,dy = dz$ نجد :

$$(fg + f - g)dx + f\,dy = (g-f)dz, \quad fg\,dx = -f(dx + dy + dz) + g(dx + dz)$$

ومنه $dx = -\frac{dx + dy + dz}{g(x+y+z)} + \frac{dx + dz}{f(x+z)}$ ، وبالتالى $x = \phi_1(x+y+z) + \phi_2(x+z)$

١٦ــ حل المعادلة : $(x - z)[xq^2 r - q(x + z + 2px)s + (z + px + pz + p^2 x)t] = (1+p)q^2 (x+z)$

أن معادلتى مونج هما :

$$xq^2(dy)^2 + q(x+z+2px)dx\,dy + (1+p)(z+px)(dx)^2 = [q\,dy + (1+p)dx][xq\,dy + (z+px)dx] = 0$$

و

$$(x-z)[xq^2dy\,dp + (1+p)(z+px)dx\,dq] - (1+p)q^2(x+z)dx\,dy = 0.$$

لننظر أولا فى المجموعة

$$q\,dy + (1+p)dx = 0$$

$$(x-z)xq^2dy\,dp + (1+p)(z+px)(x-z)dx\,dq - (1+p)q^2(x+z)dx\,dy = 0$$

نكتب المعادلة الأولى بالشكل $p\,dx + q\,dy = -dx$ ومنه $dz = -dx$ و $x + z = a$ وإذا عوضنا $q\,dy = -(1+p)dx$ و $z = a - x$ فى الثانية ينتج :

$$-(2x-a)xq\,dp + (2x-a)(a-x+px)dq + (1+p)qa\,dx = 0 \quad (i)$$

لحل هذه المعادلة نعتبر x ثابتاً فيكون $dx = o$ وتأخذ (i) الشكل :

$$-(2x-a)xq\,dp + (2x-a)(a-x+px)dq = 0$$ أو $$x(q\,dp - p\,dq) - (a-x)dq = 0$$

ومنه نجد : $\dfrac{xp+a-x}{q} = \psi(x)$. لتعيين $\psi(x)$ نأخذ تفاضل هذه العلاقة :

$$q(x\,dp + p\,dx - dx) - (xp+a-x)dq = q^2d\psi$$

فنحصل على :

$$xq\,dp - xp\,dq = q^2d\psi - pq\,dx + q\,dx + a\,dq - x\,dq$$

ومن (i) نجد :

$$xq\,dp - xp\,dq = \frac{(2x-a)(a-x)dq + (1+p)qa\,dx}{2x-a} = (a-x)dq + \frac{(1+p)qa\,dx}{2x-a}$$

ومنه

$$q^2d\psi - pq\,dx + q\,dx + a\,dq - x\,dq = (a-x)dq + \frac{(1+p)qa\,dx}{2x-a}$$

وبالتالى

$$d\psi = \frac{2(px+a-x)}{q(2x-a)}dx = \frac{2\psi}{2x-a}dx \quad \text{و} \quad \frac{\psi}{2x-a} = b = f(x+z)$$

وعلى هذا فإن $f(x+z) = \dfrac{xp+z}{q(x-z)} = \dfrac{xp+a-x}{q(2x-a)}$ تكامل متوسط .

لننظر بعد ذلك فى المجموعة

$$xq\,dy + (z+px)dx = 0$$

$$(x-z)xq^2dy\,dp + (1+p)(z+px)(x-z)dx\,dq - (1+p)q^2(x+z)dx\,dy = 0$$

نكتب المعادلة الأولى بالشكل $p\,dx + q\,dy = -z\,dx/x$ ومنه $dz = -z\,dx/x$ و $xz = a$ وإذا عوضنا $xq\,dy = -(z+px)dx,\ z = a/x$ فى الثانية ينتج :

$$-xq(x^2-a)dp + x(1+p)(x^2-a)dq + (1+p)q(x^2+a)dx = 0 \quad (ii)$$

لنعتبر x ثابتاً فتأخذ العلاقة الأخيرة الشكل $q\,dp - (1+p)dq = 0$ وبالتالى $\dfrac{1+p}{q} = \psi(x)$ ونجد من هذه العلاقة $q\,dp - (1+p)dq = q^2d\psi$ بينما نجد من (ii)

$$q\,dp - (1+p)dq = \frac{(1+p)q(x^2+a)}{x(x^2-a)}dx$$

إذن :

$$d\psi = \frac{(1+p)q(x^2+a)}{q^2x(x^2-a)}dx = \frac{\psi(x^2+a)}{x(x^2-a)}dx = \left(-\frac{dx}{x} + \frac{2x\,dx}{x^2-a}\right)\psi, \quad \ln\psi = -\ln x + \ln(x^2-a) + \ln b$$

ومنه $\psi = \frac{b(x^2-a)}{x} = \frac{1+p}{q}$. وهكذا فإن $\frac{1+p}{q(x-z)} = g(xz)$ تكامل متوسط .

وبحساب p و q من التكاملين المتوسطين نجد : $p = \frac{f-zg}{xg-f}$ و $q = \frac{1}{xg-f}$ وبالتالى

$$dz = p\,dx + q\,dy = \frac{f-zg}{xg-f}dx + \frac{1}{xg-f}dy$$ أو $$f(x+z)(dx+dz) + dy = zg(xz)dz + xg(xz)dz$$

وهكذا فإن الحل المطلوب هو :

$$y + \phi_1(x+z) = \phi_2(xz)$$

١٧–حل المعادلة : $3r + s + t + (rt - s^2) = -9$

لدينا الآن : $R = 3,\quad S = T = U = 1,\quad V = -9$ ومنه $U^2\lambda^2 + SU\lambda + TR + UV = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

وبالتالى فإن : $\lambda_1 = 2,\quad \lambda_2 = -3$

لنبحث عن حلول المجموعة (أنظر المعادلات ١٩)

$$R\,dy + \lambda_2 U\,dx + U\,dq = 3\,dy - 3\,dx + dq = 0, \quad \lambda_1 U\,dy + T\,dx + U\,dp = 2\,dy + dx + dp = 0$$

و

$$R\,dy + \lambda_1 U\,dx + U\,dq = 3\,dy + 2\,dx + dq = 0, \quad \lambda_2 U\,dy + T\,dx + U\,dp = -3\,dy + dx + dp = 0$$

فنجد من المجموعة الأولى $3y - 3x + q = b$ ، $2y + x + p = a$ وبالتالى فإن $p + 2y + x = f(q + 3y - 3x)$ تكامل متوسط ونجد من المجموعة الثانية $3y + 2x + q = d$ ، $-3y + x + p = c$ وبالتالى فإن $p - 3y + x = g(q + 3y + 2x)$ تكامل متوسط . وبما أن q تظهر فى متغيرات f و g فإنه ليس من الممكن أن نحسب p و q من التكاملين المتوسطين كما سبق ، وبالتالى فإنه ليس من الممكن الحصول على حل يحوى دالتين اختياريتين . سنعطى حلين يحويان ثوابت اختيارية نستبدل الدالة الاختيارية f للتكامل المتوسط الأول بـ $\alpha(q + 3y - 3x) + \beta$ فنحصل على

$$p + 2y + x = \alpha(q + 3y - 3x) + \beta$$ أو على $$p - \alpha q = (3\alpha - 2)y - (3\alpha + 1)x + \beta$$

ومجموعة لاجرانج لهذه المعادلة هى $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-\alpha} = \frac{dz}{(3\alpha-2)y - (3\alpha+1)x + \beta}$ ونجد من $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-\alpha}$ ، أن $y + \alpha x = \xi$ ومنه :

وبالتالى :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dz}{(3\alpha-2)y - (3\alpha+1)x + \beta} = \frac{dz}{-(3\alpha^2 + \alpha + 1)x + 3\alpha\xi - 2\xi + \beta}$$

$$z = -\tfrac{1}{2}(3\alpha^2 + \alpha + 1)x^2 + (3\alpha\xi - 2\xi + \beta)x + \eta = -\tfrac{1}{2}(3\alpha^2 + \alpha + 1)x^2 + (3\alpha y + 3\alpha^2 x - 2y - 2\alpha x + \beta)x + \eta$$

وهكذا فإن $z = \tfrac{1}{2}(3\alpha^2 - 5\alpha - 1)x^2 + (3\alpha - 2)xy + \beta x + \phi_1(y + \alpha x)$ حل يحوى دالة اختيارية وثابتين اختياريين .

نستبدل بعد ذلك $g(q + 3y + 2x)$ الدالة الاختيارية للتكامل المتوسط الثانى بـ $\gamma(q + 3y + 2x) + \delta$ فنحصل على

$$p - 3y + x = \gamma(q + 3y + 2x) + \delta$$ أو على $$p - \gamma q = 3(\gamma + 1)y + (2\gamma - 1)x + \delta$$

ومجموعة لاجرانج لهذه المعادلة هى $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-\gamma} = \frac{dz}{3(\gamma+1)y + (2\gamma-1)x + \delta}$ ونجد من $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-\gamma}$ أن $y + \gamma x = \xi$

ومنه

$$\frac{dx}{1} = \frac{dz}{3(\gamma+1)y + (2\gamma-1)x + \delta} = \frac{dz}{-(3\gamma^2 + \gamma + 1)x + 3\gamma\xi + 3\xi + \delta}$$

وبالتالى $z = -\tfrac{1}{2}(3\gamma^2 + \gamma + 1)x^2 + (3\gamma\xi + 3\xi + \delta)x + \eta$

وهكذا فإن $z = \tfrac{1}{2}(3\gamma^2 + 5\gamma - 1)x^2 + 3(\gamma + 1)xy + \delta x + \phi_2(y + \gamma x)$ هو حل أيضاً .

١٨–حل المعادلة $xqr + (p+q)s + ypt + (xy-1)(rt-s^2) + pq = 0$

لدينا الآن $R = xq, \quad S = p+q, \quad T = yp, \quad U = xy-1, \quad V = -pq$ ومنه

$U^2\lambda^2 + SU\lambda + TR + UV = (xy-1)^2\lambda^2 + (p+q)(xy-1)\lambda + pq = 0$ وبالتالي فإن $\lambda_1 = \dfrac{-p}{xy-1}, \quad \lambda_2 = \dfrac{-q}{xy-1}$

لننظر أولا في المجموعة
$$\begin{cases} -p\,dy + yp\,dx + (xy-1)dp = 0 \\ xq\,dy - q\,dx + (xy-1)dq = 0 \end{cases}$$
فنرى أنها ليست قابلة التكامل لأن كلا من المعادلتين غير قابلة للتكامل .

لننظر بعد ذلك في المجموعة $-q\,dy + yp\,dx + (xy-1)dp = 0, \quad xq\,dy - p\,dx + (xy-1)dq = 0$

نضرب المعادلة الثانية بـ y ونجمع الناتج مع الأولى ثم نقسم على $xy-1$ فنحصل على $q\,dy + dp + y\,dq = 0$
ومنه $p + yq = a$ نضرب بعد ذلك المعادلة الأولى بـ x ونجمع الناتج مع الثانية ثم نقسم على $xy-1$ فنحصل على :
$p\,dx + x\,dp + dq = 0$ ومنه $xp + q = b$. ومع هذا فإن شكل التكامل المتوسط الناتج $xp + q = f(yq+p)$
أو $yq + p = g(xp+q)$ لايسمح بالحصول على حل يحوى دوال اختيارية .

للحصول على حل يحوى دالة اختيارية واحدة وثابتين اختياريين نستبدل بـ $f(yq+p)$ الدالة الخطية $\alpha(yq+p) + \beta$ في الشكل الأولى للتكامل المتوسط أعلاه فنجد :

$$(x-\alpha)p + (1-\alpha y)q = \beta$$

ومجموعة لاجرانج الموافقة هي $\dfrac{dx}{x-\alpha} = \dfrac{dy}{1-\alpha y} = \dfrac{dz}{\beta}$ ونحصل من النسبتين الأولى والثانية على
$\alpha\ln(x-\alpha) + \ln(1-\alpha y) = \ln\xi$ أو $(x-\alpha)^\alpha(1-\alpha y) = \xi$ ومن النسبتين الأولى والثالثة على $z = \beta\ln(x-\alpha) + \eta$
وهكذا فإن الحل هو :

$$z = \beta\ln(x-\alpha) + \phi[(x-\alpha)^\alpha(1-\alpha y)]$$

مسائل اضافية

حل المعادلات التالية :

١٩ – $r = xy$ ج : $z = x\phi_1(y) + \phi_2(y) + \frac{1}{6}x^3y$

٢٠ – $s = x^2 + y^2$ $z = \phi_1(x) + \phi_2(y) + \frac{1}{3}(x^3y + xy^3)$

٢١ – $t = -x^2\sin(xy)$ $z = y\phi_1(x) + \phi_2(x) + \sin(xy)$

٢٢ – $xr - p = 0$ $z = x^2\phi_1(y) + \phi_2(y)$

٢٣ – $xr + p = 1/x^2$ $z = \phi_1(y)\ln x + \phi_2(y) + 1/x$

٢٤ – $yt - q = 2x^2y$ $z = y^2\phi_1(x) + \phi_2(x) + x^2y^2\ln y$

٢٥ – $ys - p = xy^2\sin(xy)$ $z = y\phi_1(x) + \phi_2(y) - \sin(xy)$

٢٦ – $t + q = xe^{-y}$ $z = e^{-y}\phi_1(x) + \phi_2(x) - xye^{-y}$

٢٧ - $r + s = 3y^2$ $z = \phi_1(x-y) + \phi_2(y) + xy^3$

٢٨ - $xyr + x^2 s - yp = x^3 e^y$ $z = \phi_1(x^2 - y^2) + \phi_2(y) + \frac{1}{2}x^2 e^y$

٢٩ - $2yt - xs + 2q = x^2 y$ $z = \phi_1(x^2 y) + \phi_2(x) + \frac{1}{4}x^2 y^2$

٣٠ - $xr + ys + p = 8xy^2 + 9x^2$ $z = \phi_1(x/y) + \phi_2(y) + x^2 y^2 + x^3$

تحويل لابلاس :

٣١ - $6r - s - t = 18y - 4x$ ج : $z = \phi_1(x-3y) + \phi_2(x+2y) + y(2x^2 + y^2)$

٣٢ - $x(xy-1)r - (x^2y^2-1)s + y(xy-1)t + (x-1)p + (y-1)q = 0$ ج : $z = \phi_1(xe^y) + \phi_2(ye^x)$

٣٣ - $x(y-x)r - (y^2-x^2)s + y(y-x)t + (y+x)(p-q) = 2(x+y+1)$

إرشاد : ضع $x+y=u,\ xy=v.$ ج : $z = \phi_1(x+y) + \phi_2(xy) + x - y + \ln x$

٣٤ - $(y-1)r - (y^2-1)s + y(y-1)t + p - q = 2ye^{2x}(1-y)^3$

ج : $z = \phi_1(x+y) + \phi_2(ye^x) + (x+y)y^2 e^{2x}$

٣٥ - $xyr - (x^2-y^2)s - xyt + py - qx = 2(x^2-y^2)$ ج : $z = \phi_1(x^2+y^2) + \phi_2(y/x) - xy$

٣٦ - $r - 2s + t + p - q = e^x(2y-3) - e^y$ ج : $z = \phi_1(x+y) + e^y \phi_2(x+y) + xe^y + ye^x$

إرشاد : ضع $x+y=u,\ y=v$

٣٧ - $y^2(r-2s+t) - y(p-q) - z = y^2$

ج : $z = y\,\phi_1(x+y) + \frac{1}{y}\phi_2(x+y) + \frac{1}{3}y^2$

طريقة مونج :

٣٨ - $(e^x-1)(qr-ps) = pqe^x$ التكامل المتوسط $p = \psi(z)$ الحل العام $x = \phi_1(z) + \phi_2(y) + e^x$

٣٩ - $r - 3s - 10t = -3$ التكامل المتوسط $p + 2q = \psi_1(y+5x),\quad p - 5q = \psi_2(y-2x)$

الحل العام $z = \phi_1(y+5x) + \phi_2(y-2x) + xy$

٤٠ - $q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0$ التكامل المتوسط $p = q\,\psi(z)$

الحل العام $x\phi_1(z) + y = \phi_2(z)$

٤١ - $qr - (1+p+q)s + (1+p)t = 0$ التكامل المتوسط $p - q = \psi_1(x+z),\quad p+1 = q\,\psi_2(x+y)$

الحل العام $z = f(x+z) + g(x+y)$

٤٢ - $(1-q)^2 r - 2(2-p-2q+pq)s + (2-p)^2 t = 0$ التكامل المتوسط $\frac{1-q}{2-p} = \psi(y+2x-z)$

الحل العام $x + y\,\phi_1(y+2x-z) = \phi_2(y+2x-z)$

٤٣ - $5r - 10s + 4t - (rt - s^2) = -1$ التكامل المتوسط $3y + 4x - p = f(5y+7x-q),\quad 7y + 4x - p = g(5y+3x-q)$

$z = 2x^2 + 3xy + \frac{5}{2}y^2 - 2\alpha x^2 - \beta x + \phi_1(y+\alpha x)$

أو $z = 2x^2 + 7xy + \frac{5}{2}y^2 + 2\gamma x^2 - \delta x + \phi_2(y+\gamma x)$

٤٤ - $2r - 6s + 2t + (rt - s^2) = 4$ التكامل المتوسط $2y + 2x + p = f(2y+4x+q),\quad 4y + 2x + p = g(2y+2x+q)$

الحل $z = \alpha x^2 + \beta x - (x+y)^2 + \phi_1(y+\alpha x)$ أو $z = -\gamma x^2 + \delta x - x^2 - 4xy - y^2 + \phi_2(y+\gamma x)$

٤٥ - $3r - 6s + 4t - (rt - s^2) = 3$

التكامل المتوسط $3y + 4x - p = f(3y + 3x - q)$. الحل $z = 2x^2 + 3xy + \frac{3}{2}y^2 + \beta x + \phi(y + \alpha x)$.

٤٦ - $yr - ps + t + y(rt - s^2) = -1$

التكامل المتوسط $yp + x = f(q + y)$ الحل $6\alpha^2 z = 2y^3 - 3\alpha^2 y^2 + 6\alpha xy + 6\beta y + \phi(\alpha x + \frac{1}{2}y^2)$

٤٧ - $xqr - (x+y)s + ypt + xy(rt - s^2) = 1 - pq$

التكامل المتوسط $xp + y = f(yq + x)$ الحل $z = \alpha x + y/\alpha + \beta \ln x + \phi(x^{\alpha} y)$