التحليل العددي1

المحاضرة 1

Finite Differences

الفروقات المنتهية

م.د. محمد يوسف تركي

• الفروقات المنتهية Finite Differences

1) الفروقات الامامية التقدمية Forward Differences

لتكن الدالة المستخدمة هي y=f(x) وهي دالة حقيقية قيمها معلومه في n+1 من النقاط ، وهي معرفة في نقاط متساوية الابعاد وعلى النحو الآتي

$$
\begin{aligned}
&x_0 && , y_0 = f(x_0) = f_0 \\
&x_1 = x_0 + h && , y_1 = f(x_1) = f_1 \\
&x_2 = x_1 + h && , y_2 = f(x_2) = f_2 \\
&\quad\vdots \\
&x_n = x_{n-1} + h && , y_n = f(x_n) = f_n
\end{aligned}
$$

h بعد ثابت بين قيم x

يرمز لعامل (مؤثر) الفروق الامامية بالرمز Δ (operator) ويعرف بالمعادلة

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\left.\begin{aligned}
\Delta y_0 &= y_1 - y_0 \\
\Delta y_1 &= y_2 - y_1 \\
\Delta y_2 &= y_3 - y_2
\end{aligned}\right\}$$ يعرف بالفرق الامامي الاول

من خلال الفروق الامامي الاول ، فيمكن كتابة الفرق الاول بصورة عامة

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \,, \qquad i = 0,1,\ldots,n-1$$

وايضا يمكن الحصول على الفروق الامامية الثانية بأخذ الفرق للفروق الاولى

$$\Delta^2 y_0 = \Delta(\Delta y_0) = \Delta(y_1 - y_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0$$
$$= y_2 - y_1 - y_1 + y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta(\Delta y_1) = \Delta(y_2 - y_1) = \Delta y_2 - \Delta y_1$$
$$= y_3 - y_2 - y_2 + y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1$$

من خلال الفروقات اعلاه، يمكن كتابة الفرق الامامي الثاني بصورة عامة

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$$
$$= y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i, \quad i = 0,1,2,\ldots,n-2$$

وبتكرار الطريقة نفسها فيمكن الحصول على الفروقات الامامية

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i\,, \;\; i = 0,1,2,\ldots,n-3$$
$$\Delta^4 y_i = \Delta^3 y_{i+1} - \Delta^3 y_i\,, \;\; i = 0,1,2,\ldots,n-4$$

وبصورة عامة تعرف الفروقات الامامية من الرتبة k كالاتي

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1}(\Delta y_i) = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i\,, \;\; i = 0,1,2,\ldots,n-k$$

يمكن الحصول على كل هذه الفروق من جدول بسيط كما ادناه

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				

ملاحظة : عندما تكون الدالة f متعدده حدود من الدرجة n فأن عمود الفروقات (n+1) والاعمده التي تليه تحتوي جميعها على اصفار والعكس صحيح.

Example : Write the forward differences table of the function $f(x) = x^3$,

use x= 0,1,2,3,4.

Solution:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0				
		1			
1	1		6		
		7		6	
2	8		12		0
		19		6	
3	27		18		
		37			
4	64				

2) الفروقات التراجعية (الخلفيه) Backward Differences

يرمز لمؤثر الفروق التراجعية بالرمز ∇ . ويعرف الفرق التراجعي للداله f(x) كالآتي

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

فيمكن تعريف الفروقات التراجعة كالآتي

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1} \qquad , \quad i = n, \dots, 1$$

$$\nabla^2 y_i = \nabla(\nabla y_i) = \nabla(y_i - y_{i-1}) \qquad , i = n, \dots, 1$$

$$= \nabla y_i - \nabla y_{i-1} = y_i - y_{i-1} - y_{i-1} + y_{i-2}$$

$$= y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}$$

$$\nabla^3 y_i = \nabla^2(\nabla y_i) = \nabla^2 y_i - \nabla^2 y_{i-1} \quad , i = n, \dots, 3$$

$$\nabla^4 y_i = \nabla^3(\nabla y_i) = \nabla^3 y_i - \nabla^3 y_{i-1} \quad , i = n, \dots, 4$$

وبصورة عامه تعرف الفروقات التراجعة من الرتبة k كالآتي

$$\nabla^k y_i = \nabla^{k-1}(\nabla y_i) = \nabla^{k-1} y_i - \nabla^{k-1} y_{i-1} \quad , i = n, \dots, k$$

- ويمكن الحصول على كل الفروقات التراجعية من جدول بسيط يكون كما ادناه وقد اخذت قيم i لتلائم صيغ القوانين

x_i	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$
x_0	y_0				
		∇y_1			
x_1	y_1		$\nabla^2 y_2$		
		∇y_2		$\nabla^3 y_3$	
x_2	y_2		$\nabla^2 y_3$		$\nabla^4 y_4$
		∇y_3		$\nabla^3 y_4$	
x_3	y_3		$\nabla^2 y_4$		
		∇y_4			
x_4	y_4				

التحليل العددي1

المحاضرة 2

central Differences

الفروقات المركزية (الوسطى)

م.د. محمد يوسف تركي

3) الفروقات المركزية (الوسطى) Central differences

يرمز لمؤثر الفروقات المركزية بالرمز δ ، وتعرف الفروقات المركزية كالآتي

الفرق الاول $\delta y_{i+\frac{1}{2}} = y_{i+1} - y_i \qquad , \quad i = 0,1,\dots,n-1$

$$if\ i = 0 \quad \rightarrow \quad \delta y_{\frac{1}{2}} = y_1 - y_0$$

$$if\ i = 1 \quad \rightarrow \quad \delta y_{\frac{3}{2}} = y_2 - y_1$$

$$if\ i = 2 \quad \rightarrow \quad \delta y_{\frac{5}{2}} = y_3 - y_2$$

الفرق الثاني $\delta^2 y_i = \delta y_{i+\frac{1}{2}} - \delta y_{i-\frac{1}{2}}, \quad i = 0,1,\dots,n-1$

$$= y_{i+1} - y_i - (y_i - y_{i-1})$$

$$= y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$$

$$if\ i = 0\,,\ \delta^2 y_0 = \delta y_{\frac{1}{2}} - \delta y_{-\frac{1}{2}} = y_1 - y_0 - (y_0 - y_{-1}) = y_1 - 2y_0 + y_{-1}$$

$$if\ i = 1\,,\ \delta^2 y_1 = \delta y_{\frac{3}{2}} - \delta y_{\frac{1}{2}} = y_2 - y_1 - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$if\ i = 2\,,\ \delta^2 y_2 = \delta y_{\frac{5}{2}} - \delta y_{\frac{3}{2}} = y_3 - y_2 - (y_2 - y_1) = y_3 - 2y_2 + y_1$$

$$\delta^3 y_{i+\frac{1}{2}} = \delta^2 y_{i+1} - \delta^2 y_i$$

$$if\ i = 0\ ,\ \ \delta^3 y_{\frac{1}{2}} = \delta^2 y_1 - \delta^2 y_0$$

$$if\ i = 1\ ,\ \ \delta^3 y_{\frac{3}{2}} = \delta^2 y_2 - \delta^2 y_1$$

$$if\ i = 2\ ,\ \ \delta^3 y_{\frac{5}{2}} = \delta^2 y_3 - \delta^2 y_2$$

$$\delta^4 y_i = \delta^3 y_{i+\frac{1}{2}} - \delta^3 y_{i-\frac{1}{2}}$$

$$if\ i = 0\,, \delta^4 y_0 = \delta^3 y_{\frac{1}{2}} - \delta^3 y_{-\frac{1}{2}}$$

$$if\ i = 1\,, \delta^4 y_1 = \delta^3 y_{\frac{3}{2}} - \delta^3 y_{\frac{1}{2}}$$

$$if\ i = 2\,, \delta^4 y_2 = \delta^3 y_{\frac{5}{2}} - \delta^3 y_{\frac{3}{2}}$$

ويمكن تعميم الفروقات المركزية من الرتبة k كالآتي

$$\boldsymbol{\delta^{2k+1} y_{i+\frac{1}{2}} = \delta^{2k} y_{i+1} - \delta^{2k} y_i,}\qquad \mathbf{k = 0, 1, 2, \ldots}$$ فردي

$$\boldsymbol{\delta^{2k} y_i = \delta^{2k-1} y_{i+\frac{1}{2}} - \delta^{2k-1} y_{i-\frac{1}{2}},}\qquad \mathbf{k = 1, 2, \ldots}$$ زوجي

يمكن الحصول على جميع هذه الفروقات من جدول بسيط كما ادناه

x	y	$\delta y_{i+\frac{1}{2}}$	$\delta^2 y_i$	$\delta^3 y_{i+\frac{1}{2}}$	$\delta^4 y_i$
x_{-1}	y_{-1}		$\delta^2 y_{-1}$		$\delta^4 y_{-1}$
		$\delta y_{-\frac{1}{2}}$		$\delta^3 y_{-\frac{1}{2}}$	
x_0	y_0		$\delta^2 y_0$		$\delta^4 y_0$
		$\delta y_{\frac{1}{2}}$		$\delta^3 y_{\frac{1}{2}}$	
x_1	y_1		$\delta^2 y_1$		$\delta^4 y_1$
		$\delta y_{\frac{3}{2}}$		$\delta^3 y_{\frac{3}{2}}$	
x_2	y_2		$\delta^2 y_2$		$\delta^4 y_2$
		$\delta y_{\frac{5}{2}}$		$\delta^3 y_{\frac{5}{2}}$	
x_3	y_3		$\delta^2 y_3$		$\delta^4 y_3$
		$\delta y_{\frac{7}{2}}$		$\delta^3 y_{\frac{7}{2}}$	
x_4	y_4		$\delta^4 y_4$		$\delta^4 y_4$

x_{-2} $\quad y_{-2}$

$$(\Delta y_{-2},\ \nabla y_{-1},\ \delta y_{-\frac{3}{2}})$$

x_{-1} $\quad y_{-1}$ $\qquad (\Delta^2 y_{-2},\ \nabla^2 y_0,\ \delta^2\, y_{-1})$

$$(\Delta y_{-1},\ \nabla y_0,\ \delta y_{-\frac{1}{2}}) \qquad (\Delta^3 y_{-2},\ \nabla^3 y_1, \delta^3\, y_{\frac{-1}{2}})$$

x_0 $\quad y_0$ $\qquad (\Delta^2 y_{-1},\ \nabla^2 y_1, \delta^2\, y_0)$

$$(\Delta y_0,\ \nabla y_1,\ \delta y_{\frac{1}{2}}) \qquad (\Delta^3 y_{-1},\ \nabla^3 y_2, \delta^3\, y_{\frac{1}{2}})$$

x_1 $\quad y_1$ $\qquad (\Delta^2 y_0,\ \nabla^2 y_2,\ \delta^2\, y_1)$

$$(\Delta y_1,\ \nabla y_2,\ \delta y_{\frac{3}{2}})$$

x_2 $\quad y_2$

من ملاحظة الجدول اعلاه، يمكن ايجاد العلاقة بين المؤثرات الثلاثة وكما يلي

الفرق الاول $$\Delta y_i = \nabla y_{i+1} = \delta y_{i+\frac{1}{2}}$$

الفرق الثاني $$\Delta^2 y_i = \nabla^2 y_{i+2} = \delta^2 y_{i+1}$$

الفرق الثالث $$\Delta^3 y_i = \nabla^3 y_{i+3} = \delta^3 y_{i+\frac{3}{2}}$$

والصيغة العامة هي

$$\Delta^k y_i = \nabla^k y_{i+k} = \delta^k y_{i+\frac{k}{2}}, \quad k = 1,2,3,4,\ldots$$

Example : Write the differences table of the function $f(x) = e^x + 2$, use x= 0,2,4,6,8, and find Δy_2 , $\Delta^4 y_0, \nabla y_1, \nabla^2 y_2, \delta^2 y_1, \delta^4 y_2$.

Solution:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	3 y_0				
		$6.389 = \nabla y_1$			
2	9.389 y_1		$40.802 = \nabla^2 y_2 = \delta^2 y_1$		
		47.209		260.802	
4	56.598 y_2		301.622		$1666.274 = \Delta^4 y_0 = \delta^4 y_2$
		$348.831 = \Delta y_2$		1927.076	
6	405.429 y_3		2228.698		
		2577.529			
8	2982.958 y_4				

$\Delta y_2 = 348.831, \Delta^4 y_0 = \delta^4 y_2 = 1666.274,$

$\nabla y_1 = 6.389, \nabla^2 y_2 = \delta^2 y_1 = 40.802$

التحليل العددي1

المحاضرة 3

Newton’s interpolating polynomials formula

م.د. محمد يوسف تركي

Newton's interpolating polynomials formula

تستخدم صيغ نيوتن للاندراج اذا كانت المسافة بين قيم x متساوية ، اي ان

$$h = x_{i+1} - x_i = constant \quad \forall\, i$$

لايجاد قيمه تقديريه للداله عند النقطة x^* عندما تكون قيمة h ثابتة فأن هناك عدة صيغ لايجادها وهي

1) Newton's Forward interpolating polynomials formula

$$f(x^*) = y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \cdots$$

النقطة المراد قيمة الدالة لها

اقرب نقطة الى x^*

Such that $m = \frac{x_m - x_0}{h} = \frac{x^* - x_0}{h}$

مقدار الزيادة في قيم X

2) Newton's Backward interpolating polynomials formula

$$f(x^*) = y_0 + m\nabla y_0 + \frac{m(m+1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\nabla^3 y_0 + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4!}\nabla^4 y_0 + \cdots$$

Such that $m = \frac{x^* - x_0}{h}$

3) Central interpolating formula

هناك نوعان من الصيغ المركزية لايجاد قيم x^* .

a) Bessel's formula

$$f(x^*) = \frac{y_0 + y_1}{2} + \left(m - \frac{1}{2}\right)\delta y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1}{2} + \frac{m(m-1)(m-\frac{1}{2})}{3!}\delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m-1)(m+1)(m-2)}{4!}\frac{\delta^4 y_0 + \delta^4 y_1}{2} + \cdots$$

b) striling's formula

$$f(x^*) = y_0 + m\frac{\delta y_{-\frac{1}{2}} + \delta y_{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{m^2}{2!}\delta^2 y_0 + \frac{m(m^2-1)}{3!}\frac{\delta^3 y_{-\frac{1}{2}} + \delta^3 y_{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{m^2(m^2-1)}{4!}\delta^4 y_0 + \frac{m(m^2-1)(m^2-4)}{5!}\frac{\delta^5 y_{-\frac{1}{2}} + \delta^5 y_{\frac{1}{2}}}{2} + \cdots$$

x	y	$\delta y_{i+\frac{1}{2}}$	$\delta^2 y_i$	$\delta^3 y_{i+\frac{1}{2}}$	$\delta^4 y_i$
		$\delta y_{-\frac{1}{2}}$		$\delta^3 y_{-\frac{1}{2}}$	
x_0	y_0		$\delta^2 y_0$		$\delta^4 y_0$
		$\delta y_{\frac{1}{2}}$		$\delta^3 y_{\frac{1}{2}}$	
x_1	y_1		$\delta^2 y_1$		$\delta^4 y_1$

مسار صيغة سترلنك

مسار صيغة بسل

ملاحظة :

1) تستخدم صيغة نيوتن التقدمية للاندراج عندما تكون x^* في بداية الجدول.

2) تستخدم صيغة نيوتن التراجعية للاندراج عندما تكون x^* في نهاية الجدول.

3) تستخدم الصيغة المركزية للاندراج عندما تكون x^* في وسط الجدول.

Example : If x= 2, 4, 6, 8, 10 and y= 2, 1, 3, 8, 20 write the differences table and find f(2.3) , f(6.1) , f(10.5)

Solution:

x	y		Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
2	2	y_0				
2.3			-1			
4	1	y_1		3		
			2		0	
6	3	y_2		3		4
6.1			5		4	
8	8	y_3		7		
			12			
10	20	y_4				
10.5						

$$x^* = 2.3 \rightarrow x_0 = 2 \quad , \quad m = \frac{2.3-2}{2} = \frac{0.3}{2} = 0.15$$

$$f(2.3) = 2 + (0.15)(-1) + \frac{(0.15)(0.15-1)}{2}(3) + \frac{(0.15)(0.15-1)(0.15-2)}{6}(0) + \frac{(0.15)(0.15-1)(0.15-2)(0.15-3)}{24}(4)$$

= 2 - (0.15) - (0.191) + 0 - 0.1120 = 1.547

$$x^* = 6.1 \rightarrow x_0 = 6 \quad , \quad m = \frac{6.1-6}{2} = \frac{0.1}{2} = 0.05$$

$$f(6.1) = 3 + (0.05)\frac{2+5}{2} + \frac{(0.05)^2}{2}(3) + \frac{(0.05)\left((0.05)^2-1\right)}{6}\,\frac{0+4}{2} + \frac{(0.05)^2\left((0.05)^2-1\right)}{24}(4)$$

= 3+ 0.175+0.004-0.017-0.0004=3.162

$$x^* = 10.5 \rightarrow x_0 = 10 \quad , \quad m = \frac{10.5-10}{2} = \frac{0.5}{2} = 0.25$$

$$f(10.5) = 20 + (0.25)(12) + \frac{(0.25)(0.25+1)}{2}(7) + \frac{(0.25)(0.25+1)(0.25+2)}{6}(4) + \frac{(0.25)(0.25+1)(0.25+2)(0.25+3)}{24}(4)$$

= 20+3+5.25+1.094 +0.469+0.381=30.194

Exercises : If $x= 0, 1, 2, 3, 4, 5$ and $y= 0, -1, 8, 135, 704, 2375$ write the differences table and find $f(0.5)$, $f(2.4)$, $f(4.8)$.

التحليل العددي1

المحاضرة 4

Divided Differences

م.د. محمد يوسف تركي

- درسنا في المواضيع السابقة بعضاً من صيغ الاندراج لاستخراج قيمة دالة عند نقطة معينة بالاعتماد على الفروقات الاعتيادية والتي تعتمد على قيم الدالة في نقاط معلومه ومتساوية الابعاد (x_i) . اما اذا كانت الابعاد بين النقاط المعلومة غير متساوية فأن علينا ايجاد نوع أخر من الفروقات الذي يأخذ بنظر الاعتبار التغير غير المنتظم في قيم النقاط (x_i) . ويسمى هذا التغير بالفروقات النسبية .

Let $x_0, x_1, \ldots, x_n$ be distinct numbers

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1})$$

$$P_n(x_0) = a_0 = f(x_0) = f[x_0] \quad \rightarrow \quad a_0 = f[x_0]$$

$$P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f[x_1]$$

$$\rightarrow f[x_0] + a_1(x_1 - x_0) = f[x_1]$$

$$a_1 = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$

$$a_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$a_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

$$a_k = f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

$$\boxed{f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}}$$

For each k=0 , 1 , … , n , so $P_n(x)$ can be rewritten in a from called Newton's Divided Difference

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k](x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})$$

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n](x - x_0) \ldots (x - x_{n-1})$$

x	$f(x)$	first divided	second divided	third divided
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1,x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2,x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
		$f[x_3,x_4] = \frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		$f[x_2,x_3,x_4,x_5] = \frac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5] = \frac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$	
		$f[x_4,x_5] = \frac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

Example 1: Let $f(x) = \frac{1}{x}$ constract the divided difference table based on $x_0 = 2$, $x_1 = 2.75$, $x_2 = 4$ and find newton's polynomial $P_2(x)$ then approximate $P_2(3)$.

x	$f(x)$	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
2	0.5			
		$\frac{0.36 - 0.5}{2.75 - 2} = -0.18666$		
2.75	0.36			$\frac{-0.088+0.18666}{4-2} = 0.0493$
		$\frac{0.25-0.36}{4-2.75} = -0.088$		
4	0.25			

$$P_2(x) = 0.5 - 0.186666(x - 2) + 0.0493(x - 2)(x - 2.75)$$

$$P_2(3) = 0.5 - 0.186666(3 - 2) + 0.0493(3 - 2)(3 - 2.75) = 0.325656$$

Example 2: Complete the divided difference table and construct the interpolating polynomial that uses all data.

x	$f(x)$	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
1.0	0.7651977				
		-0.4837057			
1.3	0.6200860		-0.1087339		
		-0.5489460		0.0658784	
1.6	0.4554022		-0.0494433		0.0018251
		-0.5786120		0.0680685	
1.9	0.2818186		0.0118183		
		-0.5715210			
2.2	0.1103623				

$$P_4(x) = 0.7651977 - 0.4837057(x - 1.0) - 0.1087339(x - 1.0)(x - 1.3) + $$
$$+0.0658784(x - 1.0)(x - 1.3)(x - 1.6) + 0.0018251(x - 1.0)(x - 1.3)(x - 1.6)(x - 1.9)$$

Exercises : Let $f(x) = x^3 - 4x$ constract the divided difference table based on $x_0 = 1, x_1 = 2 , x_2 = 3 , x_3 = 4, x_4 = 5 , x_5 = 6$ and find newton's polynomial $P_3(x)$ then approximate $P_3(1)$.