التحليل العددي 2

المحاضرة 1

The least squares method

طريقة المربعات الصغرى

م.د. محمد يوسف تركي

- ليكن لدينا n من النقاط$\left((x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots\right)$ ونرغب في ايجاد المستقيم y=ax+b يوفق بنهما (بالمعنى مجموع الاخطاء أقل ما يمكن) ولتلافي اختلاف الاشارة في الاخطاء نأخذ مربع لكل منهما $\sum_{i=1}^{n} {e^2}_i$.

قانون من الدرجة الاولى

$$E = \sum_{i=1}^{n} {e^2}_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - Ax_i - B)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial A} = 0 \quad and \quad \frac{\partial E}{\partial B} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial A} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - Ax_i - B)\,(-x_i) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial B} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - Ax_i - B)\,(-1) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-y_i x_i) + \mathrm{A}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + B\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-y_i) + \mathrm{A}\sum_{i=1}^{n} x_i + B\sum_{i=1}^{n} 1 = 0$$

$$\mathrm{A}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + B\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\mathrm{A}\sum_{i=1}^{n} x_i + B\sum_{i=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{bmatrix}$$

كيفية الحل في طريقة المربعات الصغرى يعطى السؤال على شكل نقاط او جدول نحن نطبق القانون ونجد القيم A ,B

بعد ايجاد القيم نعوضهم في المستقيم .

في حالة كون المصفوفه 2x2 المستقيم يكون y=A x + B

اما في حالة كون المصفوفه 3x3 المستقيم يكون $y = A\,x^2 + B\,x + c$

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - A{x_i}^2 - Bx_i - C\right)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial A} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - A{x_i}^2 - Bx_i - C)\,(-{x_i}^2) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial B} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - A{x_i}^2 - Bx_i - C)\,(\quad) - x_i = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial C} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - A{x_i}^2 - Bx_i - C)\,(-1) = 0$$

$$\mathrm{A}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^4 + B\sum_{i=1}^{n} x_i{}^3 + \mathrm{C}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 y_i$$

$$\mathrm{A}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^3 + B\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 + \mathrm{C}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\mathrm{A}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 + B\sum_{i=1}^{n} x_i + \mathrm{C}\sum_{i=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i{}^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i{}^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i{}^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{bmatrix}$$

• ملاحظة : اذا لم نحدد الطريقة واعطى جدول او نقاط يكون الحل 2x2 او 3x3 .

Example 1:

x_i	y_i	${x_i}^2$	$x_i y_i$
-1	10	1	-10
0	9	0	0
1	7	1	7
2	5	4	10
3	4	9	12
4	3	16	12
5	0	25	0
6	-1	36	-6
$\sum_{i=1}^{n} x_i = 20$	$\sum_{i=1}^{n} y_i = 37$	$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 92$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 25$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 92 & 20 \\ 20 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 37 \end{bmatrix}$$

92 A +20 B=25 $\div -20$

20 A + 8 B = 37 ÷ 8

$$\frac{-92}{20} A - B = \frac{-25}{20}$$

$$\frac{20}{8} A + B = \frac{37}{8}$$

$$A = \frac{-45}{28} = -1.607142857$$

$$B = \frac{121}{14} = 8.642857143$$

Y= A x +B

Y= - 1.607142857 x + 8.642857143

Example2 :

x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
-3 0 2 4	3 1 1 3	9 0 4 16	-27 0 8 64	81 0 16 256	-9 0 2 12	27 0 4 48
$\sum_{i=1}^{n} x_i = 3$	$\sum_{i=1}^{n} y_i = 8$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 29$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 45$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^4 = 353$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 5$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i = 79$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 353 & 45 & 29 \\ 45 & 29 & 3 \\ 29 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 79 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{585}{3278}, \qquad B = \frac{-631}{3278} \; and \; C = \frac{1394}{1639}$$

$$y = Ax^2 + B\,x + C$$

$$y = \left(\frac{585}{3278}\right) x^2 - \left(\frac{631}{3278}\right) x + \left(\frac{1394}{1639}\right)$$

التحليل العددي 2

المحاضرة 2

The Curve Fitting

المنحني المناسب

م.د. محمد يوسف تركي

- هناك انواع اخرى من الدوال الاوفقية التي لاتشكل علاقة خطية بالنسبة للثوابت وايجاد مثل هذه الدوال يتطلب حل منظومة غير خطية لأجل ايجاد قيم الثوابت وهذا بطبيعة الحال يحتاج الى جهد أكبر وحسابات أكثر ، ولكن مع ذلك توجد بعض الحالات التي يمكن فيها تحويل قيمة أحد المتغيرين أو كليهما بصيغة معينة تؤدي الى الحصول على علاقه خطية، وفيما يأتي بعضاً من هذه الحالات :

الطريقة الاولى : المنحنيات الأسية :

في حالة كون الدالة اسية $y = ce^{A}$ (نذكر كلمة linearization) معنى ذلك استخدم الطريقة الاسية للحل وتكون كالآتي:

$$y = ce^{Ax}$$
$$lny = lnc + lne^{Ax}$$
$$lny = lnc + Ax\ lne$$
$$lny = lnc + Ax\ , \qquad \text{let } \ln c = \mathrm{B}$$
$$y = Ax + B$$

الطريقة الثانية : المنحنيات الهندسية : $y = A\,x^m$

$$E = \sum_{i=1}^{n} (-y_i + A x_i{}^m)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial A} = 2 \sum_{i=1}^{n} (-y_i + A x_i{}^m)\,(x_i{}^m) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} A x_i{}^{2m} - \sum_{i=1}^{n} y_i x_i{}^m = 0$$

$$A \sum_{i=1}^{n} x_i{}^{2m} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i{}^m$$

$$\boxed{A = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i{}^m}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{2m}}}$$

ملاحظة : اذا ذكر linearization وذكر معها قيمة m نأخذ ln لقيمة y ونطبق بعدها القانون $A = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i{}^m}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{2m}}$.

Example 1: Use the data linearization method and find the exponential fitting $y = ce^{Ax}$ for the points

(0,1.5) , (1, 2.5), (2,3.5), (3,5) , (4,7.5)

x_i	y_i	Y_i = Lny_i	x_i^2	x_iY_i
0	1.5	0.4054651081	0	0
1	2.5	0.9162907319	1	0.9162907312.505
2	3.5	1.252762968	4	525937
3	5	1.609437912	9	4.828313737
4	7.5	2.014903021	16	8.059612082
$\sum_{i=1}^{n} x_i = 10$	$\sum_{i=1}^{n} y_i = 20$	$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 6.198859741$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 30$	$\sum_{i=1}^{n} x_iY_i = 16.30974249$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_iY_i \\ \sum_{i=1}^{n} Y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16.30974249 \\ 6.198859741 \end{bmatrix}$$

30 A +10 B= 16.30974249

10 A + 5 B = 6.198859741

$$A = 0.3912023008$$
$$B = 0.4573673466$$

Y= A x +B

Y= 0.3912023008 x + 0.4573673466

Example2 : Students collected the experience in the following table the radiation $d = \frac{1}{2} g t^2$ where is the distance in meters and t is the time in seconds. Find the gravitate and constant g where (m=2).

x_i	y_i	${x_i}^2$	${x_i}^4$	${x_i}^2 y_i$
0.2	0.1960	0.04	0.0016	0.000784
0.4	0.7850	0.16	0.0256	0.1256
0.6	1.7665	0.36	0.1296	0.63594
0.8	3.1405	0.64	0.4096	2.00992
0.1	4.9075	0.01	0.0001	0.049075
$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2.1$	$\sum_{i=1}^{n} y_i = 10.7955$	$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 1.21$	$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^4 = 0.5665$	$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 y_i = 2.821319$

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i {x_i}^m}{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^{2m}} = \frac{2.821319}{0.5665} = 4.980263019$$

$$\mathrm{d} = 4.980263019$$

$$d = \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow g = 2d$$

$$g = 9.960526037$$

Exercises 1: Find the least squares approximating set of points :

(1,3) , (2,9) , (5,5) , (6,10) .

Exercises 2: If (1,2) , (2,3) , (3,5) solve by using least squares method.

Exercises 3: Find the curve of best fit $y = ce^{Ax}$ to the following data by using least squares method.

x	1	5	7	9	12
y	10	15	12	15	21

التحليل العددي 2

المحاضرة 3

Numerical Differentiation

م.د. محمد يوسف تركي

- لايجاد قيمة المشتقة f' للدالة f عند نقطة معينة يكون بسيطاً وذلك بأستعمال القواعد المعروفة لاشتقاق لمختلف انواع الدوال التي صيغها الرياضية معلومه. وان قواعد الاشتقاق لايمكن تطبيقها عندما تكون صيغية الدالة f غير معرفة بشكل رياضي وانما تكون قيمها معلومة عند عدد محدد من نقاط منطلقها. لذا يكون من الضروري وجود بعض الطرق التي تمكننا من ايجاد القيمة التقريبية للمشتقة الدالة f .

اولاً:- الاشتقاق العددي المبني على نقاط غير متساوية الابعاد ويتضمن هذا النوع من الاشتقاق العددي على طريقتين وهما :

1- طريقة لاكرانج

2- طريقة نيوتن للفروقات النسبية

ولايجاد قيمة المشتقة f' عند نقطة معينة فأننا نقوم بأيجاد صيغة الدالة f بالاعتماد على على معطيات المسألة . وبعد ذلك نقوم بأشتقاق صيغة الدالة ، وبعدها نجد القيمة العددية للمشتقة عند النقطة المعلومة (المطلوبة).

Example 1: Use the following table to find $f'(0.5)$, $f'(3)$ by

1- Lagrange method   2- Newton's divided differences.

x	1	2	4
$f(x)$	0	1	5

Solution:

1- Lagrange method

$$f(x) = 0\,\frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} + 1\,\frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} + 5\,\frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)}$$

$$= 0 + \frac{x^2-4x-x+4}{-2} + \frac{5(x^2-2x-x+2)}{6}$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 5x + 4) + \frac{5}{6}(x^2 - 3x + 2)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + \cancel{\frac{5}{2}x} - 2 + \frac{5}{2}x^2 - \cancel{\frac{5}{2}x} + \frac{5}{3}$$

$$= 0.33333\,x^2 - 0.33333$$

$$f'(x) = 0.66666\,x$$

$$f'(0.5) = (0.66666)(0.5) = 0.33333$$

$$f'(3) = (0.66666)(3) = 1.99998$$

2- Newton's divided differences

x	y	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$
1	0		
		1	
2	1		$\frac{2-1}{4-1} \quad = \frac{1}{3}$
		2	
4	5		

$$f(x) = 0 + (1)(x-1) \; + (\tfrac{1}{3})(x-1)(x-2)$$

$$= x - 1 + \left(\frac{1}{3}\right)(x^2 - 3x + 2)$$

$$= \cancel{x} - 1 + \frac{1}{3}x^2 \cancel{-x} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x = 0.66666\,x$$

$$f'(0.5) = (0.66666)(0.5) = 0.33333$$

$$f'(3) = (0.66666)(3) = 1.99998$$

Exercises : Use the following table to find $f'(6), f'(2.5), f''(2.5), f''(6)$ by

1- Lagrange method 2- Newton's divided differences.

x	1	2	5	6
$f(x)$	0	3	6	6

التحليل العددي 2

المحاضرة 4

Numerical Differentiation

م.د. محمد يوسف تركي

ثانياً:- الاشتقاق العددي المبني على نقاط متساوية الابعاد :

a) Differential of Newton's Forward formula

$$y = y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \cdots$$

$$= y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m^2-m}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{m^3-3m^2+2m}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{m^4-6m^3+11m^2-6m}{24}\Delta^4 y_0 + \cdots$$

$$\frac{dy}{dm} = \Delta y_0 + \frac{2m-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3m^2-6m+2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{4m^3-18m^2+22m-6}{24}\Delta^4 y_0 + \cdots$$

$$\because m = \frac{x-x_0}{h} \rightarrow \frac{dm}{dx} = \frac{1}{h}$$

$$\because \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dm}\cdot\frac{dm}{dx}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{h}\left\{\Delta y_0 + \left(m-\frac{1}{2}\right)\Delta^2 y_0 + \left(\frac{1}{2}m^2 - m + \frac{1}{3}\right)\Delta^3 y_0 + \left(\frac{1}{6}m^3 - \frac{3}{4}m^2 + \frac{11}{12}m - \frac{1}{4}\right)\Delta^4 y_0 + \cdots\right\}}$$

$$\because \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dm}\cdot\left(\frac{1}{h}\frac{dy}{dm}\right)\cdot\frac{dm}{dx} = \frac{1}{h^2}\cdot\frac{d^2y}{dm^2}$$

$$\frac{d^2y}{dm^2} = \Delta^2 y_0 + (m-1)\Delta^3 y_0 + \frac{12m^2-36m+22}{24}\Delta^4 y_0 + \cdots$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{1}{h^2}\left\{\Delta^2 y_0 + (m-1)\Delta^3 y_0 + \left(\frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{2}m + \frac{11}{12}\right)\Delta^4 y_0 + \cdots\right\}}$$

- ملاحظة 1 : نطبق الصيغتان اعلاه لايجاد قيمة المشتقة في نقطة غير موجوده في الجدول اي عندما تكون قيمة $m \neq 0$.
- ملاحظة 2 : عندما تكون قيمة m=0 اي ايجاد قيمة المشتقة لنقطة موجوده في الجدول فأن الصيغتان تصبحان بالشكل الاتي :

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{h}\left\{\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \cdots \right\}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{1}{h^2}\left\{\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 + \cdots \right\}$$

b) Differential of Newton's Backward formula

$$y = y_0 + m\nabla y_0 + \frac{m(m+1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\nabla^3 y_0 + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4!}\nabla^4 y_0 + \cdots$$

$$= y_0 + m\nabla y_0 + \frac{m^2+m}{2}\nabla^2 y_0 + \frac{m^3+3m^2+2m}{6}\nabla^3 y_0 +$$

$$+ \frac{4m^3+18m^2+22m+6}{24}\nabla^4 y_0 + \cdots$$

$$\frac{dm}{dx} = \frac{1}{h}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= y' = \frac{1}{h}\left\{\nabla y_0 + \left(m + \frac{1}{2}\right)\nabla^2 y_0 + \left(\frac{1}{2}m^2 + m + \frac{1}{3}\right)\nabla^3 y_0 + \left(\frac{1}{6}m^3 + \frac{3}{4}m^2 + \frac{11}{12}m + \frac{1}{4}\right)\nabla^4 y_0 + \cdots\right\} \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= y'' = \frac{1}{h^2}\left\{\nabla^2 y_0 + (m+1)\nabla^3 y_0 + \left(\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + \frac{11}{12}\right)\nabla^4 y_0 + \cdots\right\}
\end{aligned}\right\} \boxed{m \neq 0}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= y' = \frac{1}{h}\left\{\nabla y_0 + \frac{1}{2}\nabla^2 y_0 + \frac{1}{3}\nabla^3 y_0 + \frac{1}{4}\nabla^4 y_0 + \cdots\right\} \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= y'' = \frac{1}{h^2}\left\{\nabla^2 y_0 + \nabla^3 y_0 + \frac{11}{12}\nabla^4 y_0 + \cdots\right\}
\end{aligned}\right\} \boxed{m = 0}$$

c) Central interpolating formula

1- Bessel's formula

$$y = \frac{y_0+y_1}{2} + \left(m-\frac{1}{2}\right)\delta y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{\delta^2 y_0+\delta^2 y_1}{2} + \frac{m(m-1)(m-\frac{1}{2})}{3!}\delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m-1)(m+1)(m-2)}{4!}\frac{\delta^4 y_0+\delta^4 y_1}{2} + \cdots$$

$$y = \frac{y_0+y_1}{2} + \left(m-\frac{1}{2}\right)\delta y_{\frac{1}{2}} + \frac{m^2-m}{2}\frac{\delta^2 y_0+\delta^2 y_1}{2} + \frac{m^3-\frac{3}{2}m^2+\frac{1}{2}m}{6}\delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \frac{m^4-2m^3-m^2+2m}{24}\frac{\delta^4 y_0+\delta^4 y_1}{2} + \cdots$$

$$\frac{dm}{dx} = \frac{1}{h}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = y' &= \frac{1}{h}\left\{\delta y_{\frac{1}{2}} + \left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\delta^2 y_0+\delta^2 y_1}{2} + \left(\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}m+\frac{1}{12}\right)\delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{6}m^3-\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{12}m+\frac{1}{12}\right)\frac{\delta^4 y_0+\delta^4 y_1}{2} + \cdots\right\} \\
\frac{d^2y}{dx^2} = y'' &= \frac{1}{h^2}\left\{\frac{\delta^2 y_0+\delta^2 y_1}{2} + \left(m-\frac{1}{2}\right)\delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}m-\frac{1}{12}\right)\frac{\delta^4 y_0+\delta^4 y_1}{2} + \cdots\right\}
\end{aligned}\right\} \boxed{m \neq 0}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = y' &= \frac{1}{h}\left\{\delta y_{\frac{1}{2}} - \frac{\delta^2 y_0+\delta^2 y_1}{4} + \frac{1}{12}\delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \frac{\delta^4 y_0+\delta^4 y_1}{24} + \cdots\right\} \\
\frac{d^2y}{dx^2} = y'' &= \frac{1}{h^2}\left\{\frac{\delta^2 y_0+\delta^2 y_1}{2} - \frac{1}{2}\delta^3 y_{\frac{1}{2}} - \frac{\delta^4 y_0+\delta^4 y_1}{24} + \cdots\right\}
\end{aligned}\right\} \boxed{m = 0}$$

2- striling's formula

$$y = y_0 + m\frac{\delta y_{-\frac{1}{2}} + \delta y_{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{m^2}{2!}\delta^2 y_0 + \frac{m(m^2-1)}{3!}\frac{\delta^3 y_{-\frac{1}{2}} + \delta^3 y_{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{m^2(m^2-1)}{4!}\delta^4 y_0 + \frac{m(m^2-1)(m^2-4)}{5!}\frac{\delta^5 y_{-\frac{1}{2}} + \delta^5 y_{\frac{1}{2}}}{2} + \cdots$$

$$y = y_0 + m\frac{\delta y_{-\frac{1}{2}} + \delta y_{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{m^2}{2}\delta^2 y_0 + \frac{(m^3-m)}{6}\frac{\delta^3 y_{-\frac{1}{2}} + \delta^3 y_{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{(m^4-m^2)}{24}\delta^4 y_0 + \frac{(m^5-5m^3+4m)}{120}\frac{\delta^5 y_{-\frac{1}{2}} + \delta^5 y_{\frac{1}{2}}}{2} + \cdots$$

$$y' = \frac{1}{h}\left\{\frac{\delta y_{-\frac{1}{2}} + \delta y_{\frac{1}{2}}}{2} + m\delta^2 y_0 + \left(\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{6}\right)\frac{\delta^3 y_{-\frac{1}{2}} + \delta^3 y_{\frac{1}{2}}}{2} + \left(\frac{1}{6}m^3 - \frac{1}{12}m\right)\delta^4 y_0 + \left(\frac{1}{24}m^4 - \frac{1}{8}m^2 + \frac{1}{30}\right)\frac{\delta^5 y_{-\frac{1}{2}} + \delta^5 y_{\frac{1}{2}}}{2} + \cdots\right\}$$

$$y'' = \frac{1}{h^2}\left\{\delta^2 y_0 + m\frac{\delta^3 y_{-\frac{1}{2}} + \delta^3 y_{\frac{1}{2}}}{2} + \left(\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{12}\right)\delta^4 y_0 + \left(\frac{1}{6}m^3 - \frac{1}{4}m\right)\frac{\delta^5 y_{-\frac{1}{2}} + \delta^5 y_{\frac{1}{2}}}{2} + \cdots\right\}$$

$\mathrm{m} \neq 0$

$$y' = \frac{1}{h}\left\{\frac{\delta y_{-\frac{1}{2}} + \delta y_{\frac{1}{2}}}{2} - \frac{\delta^3 y_{-\frac{1}{2}} + \delta^3 y_{\frac{1}{2}}}{12} + \frac{\delta^5 y_{-\frac{1}{2}} + \delta^5 y_{\frac{1}{2}}}{60} + \cdots\right\}$$

$$y'' = \frac{1}{h^2}\left\{\delta^2 y_0 - \frac{1}{12}\delta^4 y_0 + \cdots\right\}$$

$\mathrm{m} = 0$

Example : If x= 2, 4, 6, 8, 10 and y= 2, 1, 3, 8, 20 write the differences table and find $f'(2.2), f''(2.2), f'(5.7), f''(5.7), f'(9.3), f''(9.3), f'(2), f''(6), f'(5.7)$.

Solution:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
2	2				
		-1			
4	1		3		
		2		0	
6	3		3		4
		5		4	
8	8		7		
		12			
10	20				

$$x^* = 2.2 \rightarrow x_0 = 2 \quad \therefore m = \frac{0.2 - 2}{2} = 0.1$$

$$f'(2.2) = \frac{1}{2}\left\{-1 + (0.1 - 0.5)(3) + \left((0.5)(0.1)^2 - 0.1 + 0.333\right)0 + \left(\frac{(0.1)^3}{6} - \frac{3}{4}(0.1)^2 + \frac{11}{12}(0.1) - \frac{1}{4}\right)(4)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{-1 - 2.2 + 0 + (0.0002 - 0.0075 + 0.0917 - 0.25)(4)\} = -1.43133$$

$f''(2.2)$= H.W (1.52166)

$$x^* = 5.7 \rightarrow x_0 = 6 \quad \therefore m = \frac{5.7 - 6}{2} = -0.15$$

$$f'(5.7) = \frac{1}{2}\left\{\frac{2+5}{2} + (-0.15)(3) + \left(\frac{(-0.15)^2}{2} - \frac{1}{6}\right)\frac{0+4}{2} + \left(\frac{(-0.15)^3}{6} - \frac{-0.15}{12}\right)(4)\right\} = 1.39583$$

$f''(5.7)$= H.W (0.60291)

$$x^* = 9.3 \rightarrow x_0 = 10 \quad \therefore m = \frac{9.3 - 10}{2} = -0.35$$

$f'(9.3) = H.W$ (6.642)

$$f''(9.3) = \frac{1}{4}\left\{7 + (-0.35 + 1)(4) + \left(\frac{(-0.35)^2}{2} - \frac{3}{2}(-0.35) + \frac{11}{12}\right)(4)\right\} = 2.853$$

$$x^* = 2 \rightarrow m = 0$$

$$f'(2) = \frac{1}{2}\left\{-1 - \frac{3}{2} + \frac{0}{3} - \frac{4}{4}\right\} = -1.75$$

$$x^* = 6 \rightarrow m = 0$$

$$f'(6) = \frac{1}{2}\left\{\frac{2+5}{2} - \frac{0+4}{12}\right\} = 1.584$$

$$x^* = 10 \rightarrow m = 0$$

$$f'(10) = \frac{1}{2}\left\{12 + \frac{7}{2} + \frac{4}{3} + \frac{4}{4}\right\} = 8.917$$

التحليل العددي 2

المحاضرة 5

Numerical Integration

م.د. محمد يوسف تركي

- ان الصيغة العامة للتكامل المحدد هي $I = \int_a^b f(x)dx$ حيث ان a,b قيمتان محددتان ، وأن f(x) هي دالة مستمرة للمتغير x الذي يأخذ القيمه $a \le x \le b$.

Methods of Integration:

1) Trapezium method

لحساب قيمة التكامل بطريقة شبة المنحرف (اي حساب المساحة المحصورة بين منحني الدالة y=f(x) ومحور السينات و المستقيمين x=a , x=b) فاننا نقسم الفترة [a , b] الى n من الفترات المتساوية الطول $h = \frac{b-a}{n}$ ، فتكون حدود الفترات $x_0 = a , x_1 , x_2 ,..., x_n = b$.

مساحة المستطيل ABCD $= h\,y_i$

مساحة المثلث BCE $= \frac{h}{2}(y_{i+1} - y_i)$

مساحة الكلية (A_i) $= hy_i + \frac{h}{2}(y_{i+1} - y_i)$

$$= hy_i + \frac{h}{2}y_{i+1} - \frac{h}{2}y_i = \frac{h}{2}(y_{i+1} + y_i)$$

$$A_0 = \frac{h}{2}(y_1 + y_0)$$

المساحة المحصورة في $[x_0, x_1]$

$$A_1 = \frac{h}{2}(y_2 + y_1)$$

المساحة المحصورة في $[x_1, x_2]$

$$A_2 = \frac{h}{2}(y_3 + y_2)$$

المساحة المحصورة في $[x_2, x_3]$

$$\vdots$$

$$A_{n-1} = \frac{h}{2}(y_n + y_{n-1})$$

المساحة المحصورة في $[x_{n-1}, x_n]$

المساحة الكلية المحصورة تحت المنحني

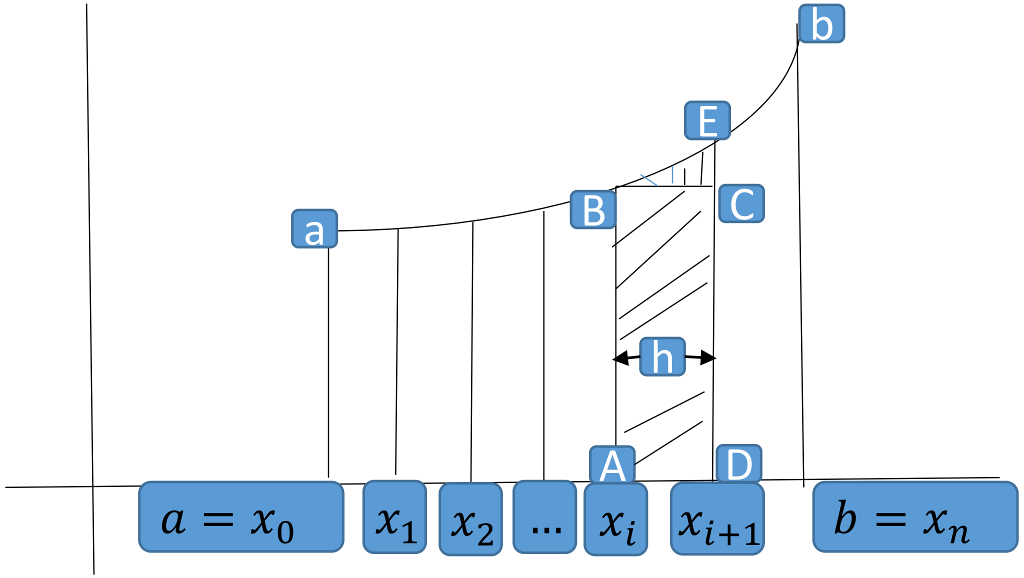
$$T_I = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} A_i$$

$$= \frac{h}{2}(y_1 + y_0) + \frac{h}{2}(y_2 + y_1) + \frac{h}{2}(y_3 + y_2) + \ldots + \frac{h}{2}(y_n + y_{n-1})$$

$$= \frac{h}{2}y_0 + \frac{h}{2}y_1 + \frac{h}{2}y_1 + \frac{h}{2}y_2 + \cdots + \frac{h}{2}y_{n-1} + \frac{h}{2}y_n$$

$$= \frac{h}{2}y_0 + hy_1 + hy_2 + \cdots + hy_{n-1} + \frac{h}{2}y_n$$

$$\boxed{\boldsymbol{T_I = \frac{h}{2}(y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}))}}$$



2) Simpson's method

تعتمد طريقة سمسون على صيغة نيوتن التقدمية للاندراج فتكامل صيغة نيوتن على فترات مقسمة بصورة منتظمة على الفترة [a , b] وبالنسبة الى n فيمكننا الحصول على صيغة تكامل سمسون .
لتكن الفترات المقسمة كالأتي $[x_0,x_2]\,,[x_2,x_4]\,,\dots,[x_{n-2},x_n]$ لناخذ الفترة الاولى $[x_0,x_2]$ وتكامل صيغة نيوتن عليها ، وبابدالها بفتره مكافئة لها وهي $[0,2]$.

$$f(x) = y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \cdots$$

$$\because m = \frac{x-x_0}{h} \rightarrow dm = \frac{1}{h}dx \rightarrow dx = h\,dm$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int_0^2 \left(y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \cdots\right) h\,dm$$

$$= h\left(2y_0 + 2\Delta y_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 y_0 + 0\,\Delta^3 y_0 + \cdots\right)$$

فاذا اهملنا الحدود من الدرجة الثالثة فما فوق ، فأن التكامل يصبح

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = h\left(2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(\Delta y_1 - \Delta y_0)\right)$$

$$= h\left(2y_0 + 2y_1 - 2y_0 + \frac{1}{3}(y_2 - y_1 - y_1 + y_0)\right) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

اما التكامل على الفترة $[x_2,x_4]$ فهو

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

اما التكامل على الفترة $[x_{n-2},x_n]$ فهو

$$\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

فتكون صيغة التكامل بطريقة سمسون كالأتي

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + y_4 + 4y_5 + y_6 + \cdots + y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6 + \cdots + y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$\boxed{S_I = \frac{h}{3}[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots + y_{n-2})]}$$

- ملاحظة : 1) بطريقة سمسون يجب ان تكون التقسيمات للفترة [a, b] عدداً زوجياً اي (n عدد زوجي) اما بطريقة شبة المنحرف فتحل المسألة سواء كانت n عدداً فردياً او زوجياً.

2) اذا كانت n عدداً فردياً ونريد حل المسألة بطريقة سمسون فنحل الفترة الاولى $[x_0,x_1]$ بطريقة شبه المنحرف والفترات الباقية تحل بطريقة سمسون.

Example1 : Find approximate value of the following integration

$$\int_0^4 x\, lnx\, dx \quad , \qquad n = 8$$

Solution : $h = \frac{4-0}{8} = 0.5$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_i	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
y_i	0	−0.347	0	0.608	1.386	2.291	3.296	4.385	5.545

1) Trapezium method

$$T_I = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_8 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7)\right)$$

$$= \frac{0.5}{2}\left(0 + 5.545 + 2(-0.347 + 0 + 0.608 + 1.386 + 2.291 + 3.296 + 4.385)\right) = 7.196$$

2) Simpson's method

$$S_I = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)\right)$$

$$= \frac{0.5}{3}\left(0 + 5.545 + 4(-0.347 + 0.608 + 2.291 + 4.385) + 2(0 + 1.386 + 3.296)\right) = 7.124$$

Exercises 1:Find approximate value of the following integration

$$\int_{0}^{4} x\, lnx\, dx \quad , \qquad n = 7$$

Exercises 2:Find approximate value of the following integration

$$\int_{-2}^{2} x^2 e^x dx \quad , \qquad n = 6$$

التحليل العددي 2

المحاضرة 6

Numerical Integration

م.د. محمد يوسف تركي

3) Simoson's 3/8 method

بنفس الاسلوب السابق الذي استخدم في اشتقاق طريقة سمسون يمكن اشتقاق طريقة سمسون ثلاث اثمان للتكامل ، فثلا نكامل على الفترة $[x_0,x_3]$ فنحصل على

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3]$$

تتضمن هذه الطريقة اربع نقاط اي اربع قيم للدالة وخطأ البتر فيها من الرتبة $o(h^5)$

كما يمكن تطبيقها عندما يكون عدد الفترات الجزئية n قابلا للقسمة على 3.

4) Bool's method (طريقة بول ذات النقاط الخمس)

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{2h}{45}[7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + f_4]$$

5) Weddle's method (طريقة ويدل ذات النقاط السبع)

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{3h}{10}[f_0 + 5f_1 + f_2 + 6f_3 + f_4 + 5f_5 + f_6]$$

6) Romberg method (طريقة رومبرك)

$$
\begin{array}{llllll}
n=1 & T_{1,1} & & & & \\
n=2 & T_{2,1} & T_{2,2} & & & \\
n=4 & T_{3,1} & T_{3,2} & T_{3,3} & & \\
n=8 & T_{4,1} & T_{4,2} & T_{4,3} & T_{4,4} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & T_{n,1} & T_{n,2} & T_{n,3} & T_{n,4} & \cdots \quad T_{n,n}
\end{array}
$$

حيث يمثل العمود الاول قيم التكامل بطريقة شبة المنحرف . كما نلاحظ بأن تقسيم الفترات يتم بصورة مضاعفه. أما الاعمدة الباقية يمكن ايجادها من الصيغة الرياضية الاتية:

$$
\boxed{T_{i,j} = \frac{4^{j-1}\ T_{i,j-1} - T_{i-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}}
$$

Example1 : Find approximate value of the following integration

$$\int_0^4 x\ lnx\ dx \quad , \qquad n = 8$$

x_i	0	4
y_i	0	5.545

x_i	0	2	4
y_i	0	1.386	5.545

x_i	0	1	2	3	4
y_i	0	0	1.386	3.296	5.545

x_i	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
y_i	0	-0.347	0	0.608	1.386	2.291	3.296	4.385	5.545

Solution : n=1 $\rightarrow \quad h = \frac{4-0}{1} = 4$

$$T_{1,1} = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) = \frac{4}{2}(0 + 4) = 11.090$$

n=2 $\rightarrow \quad h = \frac{4-0}{2} = 2$

$$\boldsymbol{T_{2,1} = \frac{h}{2}(y_0 + 2(y_1) + y_2)} = 8.317$$

n=4 $\rightarrow \quad h = \frac{4-0}{4} = 1$

$$\boldsymbol{T_{3,1} = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_4 + 2(y_1 + y_2 + y_3)\right)} = 7.455$$

n=8 $\rightarrow \quad h = \frac{4-0}{8} = 0.5$

$$\boldsymbol{T_{4,1} = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_8 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7)\right)} = 7.196$$

$$T_{2,2} = \frac{4^1 T_{2,1} - T_{1,1}}{4^1 - 1} = \frac{4(8.317) - 11.090}{3} = 7.393$$

$$T_{3,2} = \frac{4^1 T_{3,1} - T_{2,1}}{4^1 - 1} = 7.168$$

$$T_{4,2} = \frac{4^1 T_{4,1} - T_{3,1}}{4^1 - 1} = 7.110$$

$$T_{3,3} = \frac{4^2 T_{3,2} - T_{2,2}}{4^2 - 1} = 7.153$$

$$T_{4,3} = \frac{4^1 T_{4,2} - T_{3,2}}{4^2 - 1} = 7.1063$$

$$T_{4,4} = \frac{4^3 T_{4,3} - T_{3,3}}{4^3 - 1} = 7.105$$

110.90			
8.317	7.393		
7.455	7.168	7.153	
7.196	7.110	7.106	7.105

The value of the integration is 7.105

التحليل العددي 2

المحاضرة 7

Numerical solutions of differential equations

الحلول العددية للمعادلات التفاضلية

م.د. محمد يوسف تركي

1) Taylor's series method

يمكننا ايجاد قيمة y(x) بأستخدام متسلسلة تيلر حول نقطة مثل x_0 بالصيغة الاتيه :

$$\boldsymbol{y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}y''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!}y'''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^{k-1}}{(k-1)!}y^{(k-1)}(x_0)}$$

لو اعطيت دالة بالشكل

$$y' = f(x, y) = \frac{\partial y}{\partial x}$$

بحيث تكون قابلة للاشتقاق عدة مرات لكل من x, y ، فيمكننا ايجاد قيمة المشتقات كما يلي

$$y' = f(x, y)$$

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + f \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = f_x + f \cdot f_y$$

$$y''' = f_{xx} + f \cdot f_{xy} + f_y(f_x + f \cdot f_y) + f(f_{xy} + f \cdot f_{yy})$$

$$= f_{xx} + 2f \cdot f_{xy} + f_x \cdot f_y + f \cdot (f_y)^2 + f^2 f_{yy}$$

ان صيغة متسلسلة تيلر يمكن كتابتها بالصيغة الاتية لايجاد y_1

$$y_1 = y_0 + h\, y'_0 + \frac{h^2}{2!} y''_0 + \frac{h^3}{3!} y'''_0 + \cdots + \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} {y_0}^{(k-1)}$$

اما قيمة y_2 فيمكن ايجاد قيمتها بتعويض x_1 في قيم مشتقات الدالة وكالاتي

$$y_2 = y_1 + h\, y'_1 + \frac{h^2}{2!} y''_1 + \frac{h^3}{3!} y'''_1 + \cdots + \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} {y_1}^{(k-1)}$$

يمكن كتابة قيمة y_i بالصيغة

$$y_{i+1} = y_i + h\, y'_i + \frac{h^2}{2!} y''_i + \frac{h^3}{3!} y'''_i + \cdots + \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} {y_i}^{(k-1)}, i = 0, 1, 2, \ldots$$

وتتوقف عندما تكون

$$|y_{i+1} - y_i| < \epsilon$$

ملاحظة : في الطرق العددية يقسم منطلق x الى فترات جزئية بطول h وكالاتي :

$$x_i = x_0 + i\, h, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Example 1: By Taylor's series method solve the following differential equation $y' = 1 - 2xy$, where $h = 0.1$,$y(1) = 0.538$ and $k = 4$, $\epsilon = 0.02$.

solution: since y(1) = 0.538 $\rightarrow$ $x_0 = 1$ and $y_0 = 0.538$

$$y' = 1 - 2xy$$

$$y'' = 0 - 2(xy' + y) = -2xy' - 2y = -2x(1 - 2xy) - 2y = -2x + 4x^2y - 2y$$

$$y''' = -2 + 4\left(x^2y' + y(2x)\right) - 2y' = -2 + 4x^2y' + 8xy - 2y'$$

$$= -2 + 4x^2(1 - 2xy) + 8xy - 2(1 - 2xy) = -2 + 4x^2 - 8x^3y + 8xy - 2 + 4xy$$

$$= -4 + 12xy + 4x^2 - 8x^3y$$

$$y'_0 = 1 - 2(1)(0.538) = -0.076$$

$$y''_0 = -2(1) + 4(1)^2(0.538) - 2(0.538) = -0.924$$

$$y'''_0 = -4 + 12(1)(0.538) + 4(1)^2 - 8(1)^3(0.538) = 2.152$$

$$y_1 = y_0 + h\,y'_0 + \frac{h^2}{2!}y''_0 + \frac{h^3}{3!}y'''_0$$

$$y_1 = (0.538) + (0.1)\,(-0.076) + \frac{(0.1)^2}{2}(-0.924) + \frac{(0.1)^3}{6}(2.152) = 0.526$$

Since $x_0 = 1$ and $h = 0.1$ $\rightarrow$ $x_1 = x_0 + h = 1 + 0.1 = 1.1$

$$y'_1 = 1 - 2(1.1)(0.526) = -0.157$$

$$y''_1 = -2(1.1) + 4(1.1)^2(0.526) - 2(0.526) = -0.706$$

$$y'''_1 = -4 + 12(1.1)(0.526) + 4(1.1)^2 - 8(1.1)^3(0.526) = 2.182$$

$$y_2 = y_1 + h\,y'_1 + \frac{h^2}{2!}y''_1 + \frac{h^3}{3!}y'''_1$$

$$y_2 = (0.526) + (0.1)(-0.157) + \frac{(0.1)^2}{2}(-0.706) + \frac{(0.1)^3}{6}(2.182) = 0.507$$

$$|y_{i+1} - y_i| = |0.507 - 0.526| = 0.019 < \epsilon$$

Exercises: By Taylor's series method solve the following differential equation $y' = x - y$, where, $y(0) = 1$, $x_1 = 0.1$ $and\ k = 5$, $\epsilon = 0.08$.

التحليل العددي 2

المحاضرة 8

Numerical solutions of differential equations

الحلول العددية للمعادلات التفاضلية

م.د. محمد يوسف تركي

2) Euler's method

$$y' = f(x, y)$$

في طريقة أويلر لحل المسألة نبتر متسلسلة تيلر بعد الحد الذي يحوي **h** أي ان

$$y_{i+1} = y_i + h\, y'_i = y_i + h\, f(x, y)$$

فان خوارزمية الحل التكراري تكون بالشكل

$$y_1 = y_0 + h\, y'_0$$
$$y_2 = y_1 + h\, y'_1$$
$$y_3 = y_2 + h\, y'_2$$

وتتوقف عندما تكون

$$|y_{i+1} - y_i| < \epsilon$$

ان ايجاد حل المسألة بطريقة أويلر يتضمن خطأ كبير في قيم الدالة (نتيجة لبتر متسلسلة تيلر) فلهذا طورت هذه الطريقة بشكل يتضمن خطأ اقل وقد سميت بطريقة أويلر المطورة (Modified Euler method) وهي تكون بالصيغة الاتية :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\ (y'_i + y'_{i+1})$$

ان حساب قيمة y'_i يكون بشكل مباشر من خلال الدالة الاصلية، اما حساب y'_{i+1} والتي تعتمد على قيمة y_{i+1} (هي غير معروفة في هذه الخطوة) فنقم بأستخدام صيغة أويلر الاعتيادية حيث يتم حساب قيمه تقديريه أولية الى y_{i+1} ثم نجد قيمة y'_{i+1} من الدالة الاصلية وبعد ذلك نستخدم صيغة أويلر المطوره للحصول على تقريب افضل الى y_{i+1}.

Example 1: By Euler's and modified Euler's method solve the following differential equation

$$\boldsymbol{y' = 1 - 2xy}, \text{ where } \boldsymbol{h = 0.1}\ , \boldsymbol{y(1) = 0.538}\ .$$

Solution: By Euler's method

since y(1) = 0.538 $\rightarrow$ $x_0 = 1 \ and \ y_0 = 0.538$

$$y' = 1 - 2xy$$
$$y'_0 = 1 - 2(1)(0.538) = -0.076$$
$$y_1 = y_0 + h\, y'_0$$
$$y_1 = (0.538) + (0.1)\,(-0.076) = 0.530$$

Since $x_0 = 1 \ and \ h = 0.1 \ \rightarrow \ x_1 = x_0 + h = 1 + 0.1 = 1.1$

$$y'_1 = 1 - 2(1.1)(0.530\ ) = -0.166$$
$$y_2 = y_1 + h\, y'_1$$
$$y_2 = (0.530) + (0.1)(-0.166) = 0.513$$

Since $x_0 = 1 \ and \ h = 0.1 \ \rightarrow \ x_2 = x_0 + 2\,h = 1 + 0.2 = 1.2$

$$y'_2 = 1 - 2(1.2)(0.513\ ) = -0.231$$
$$y_3 = y_2 + h\, y'_2$$
$$y_2 = (0.513) + (0.1)(-0.231) = 0.490$$

Solution: By Modified Euler's method

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\,(y'_i + y'_{i+1})$$

since y(1) = 0.538 $\rightarrow\ x_0 = 1\ \ and\ \ y_0 = 0.538$

By Euler's method $y'_0 = -0.076\ \rightarrow y_1 = y_0 + h\,y'_0 = 0.530$

$$y'_1 = 1 - 2(1.1)(0.530\,) = -0.166$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\,(y'_0 + y'_1) = 5.538 + \frac{0.1}{2}(-0.076 - 0.157) = 0.526$$

$$y'_1 = 1 - 2(1.1)(0.526\,) = -0.157$$

By Euler's method $y_2 = y_1 + h\,y'_1 = 0.526 + (0.1)(-0.157) = 0.510$

$$y'_2 = 1 - 2(1.2)(0.510\,) = -0.224$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\,(y'_1 + y'_2) = 0.526 + \frac{0.1}{2}(-0.157 - 0.224) = 0.507$$

التحليل العددي 2

المحاضرة 9

Numerical solutions of differential equations

الحلول العددية للمعادلات التفاضلية

م.د. محمد يوسف تركي

2) Runge- Kutta method

ان الدقة التي تعطيها هذه الطريقة لحل المسألة $y' = f(x,y)$ هي كدقة طريقة متسلسلة تيلر لكن دون حساب المشتقات العليا. وهنالك صيغتان لهذة الطريقة :

أ) صيغة رنك –كتا ذات الرتبة (2) والصيغة العامة لها هي :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$k_1 = hf(x_i , y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1)$$

ب) صيغة رنك ــكتا ذات الرتبة (4) والصيغة العامة لها هي :

ان دقة نتائج هذه الصيغة هي افضل من نتائج الصيغه السابقة ، وذلك لان متسلسة تيلر تقطع بعد الحد الذي يحتوي على h^2 . تعتبر هذه الصيغة من الصيغ التي تستغرق وقت كبير ،وخاصه عندما تكون الدالة f معقده بعض الشي ، يرجع السبب الى ان هذة الصيغة تتطلب حساب قيمة الدالة f(x, y) اربع مرات في كل خطوة. والصيغة العامة لها:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h\, f(x_i\,, y_i)$$

$$k_2 = h\, f(x_i + \frac{h}{2}\,,\ y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = h\, f(x_i + \frac{h}{2}\,,\ y_i + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = h\, f(x_i + h\ ,\ y_i + k_3)$$

Example 1: By Runge-Kutta method solve the following differential equation

$$y' = x^2 - 2xy, \text{ where } h = 0.2 \ , y(1) = 0.$$

Solution:

since y(1) = 0 $\rightarrow$ $x_0 = 1 \ and \ y_0 = 0$

$k_1 = h\,f(x_0\,, y_0) = 0.2[(1)^2 - 0] = 0.2$

$k_2 = h\,f\left(x_0 + \frac{0.2}{2}\,, y_0 + \frac{0.2}{2}\right) = 0.2\,f(1.1\,, 0.1) = 0.2[(1.1)^2 - 2(1.1)(0.1)] = 0.198$

$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{0.2}{2}\,, y_0 + \frac{0.198}{2}\right) = 0.2\,f(1.1\,, 0.099) = 0.1984$

$k_4 = hf(x_0 + 0.2\,, y_0 + 0.1984) = 0.2\,f(1.2\,, 0.1984) = 0.1928$

$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$= 0 + \frac{1}{6}(0.2 + 2(0.198) + 2(0.1984) + 0.1928)$=0.1976

$x_1 = x_0 + h = 1 + 0.2 = 1.2$ •

$k_1 = h\,f(x_1\,, y_1) = 0.2\,f(1.2\,, 0.1976) = 0.1932$ •

$k_2 = h\,f\left(x_1 + \frac{0.2}{2}\,, y_1 + \frac{0.1932}{2}\right) = 0.2\,f(1.3\,, 0.2942) = 0.1850$ •

$k_3 = h\,f\left(x_1 + \frac{0.2}{2}\,, y_1 + \frac{0.1850}{2}\right) = 0.2\,f(1.3\,, 0.2901) = 0.1871$ •

$k_4 = f(x_1 + 0.2\,, y_1 + 0.1871) = 0.2\,f(1.4\,, 0.3847) = 0.1766$ •

$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ •

• $= 0.1976 + \frac{1}{6}(0.1932 + 0.37 + 0.3742 + 0.1766)$=0.3833