وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الانبار
كلية الصيدلة

المرحلة الاولى

المحاضرة الاولى

مادة الرياضيات

Math & Biostatistics

أستاذة المادة

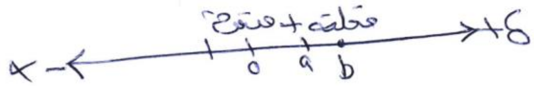
م.م. كوثر عبد المجيد احمد العاني

1441 هـ

2020 م

Intervals

يمكن التعبير عن الحقائق الهندسية بلغة الاعداد ومثال على ذلك فأننا نقرن كل عدد حقيقي بنقطة على خط مستقيم



* ليكن كل من $a,b \in R$ فيمكن ان نفترض ان $a<b$:

١- تسمى المجموعة $\{x : x \in R, a<x<b\}$ بالفترة المفتوحة ويرمز لها بالرمز (a,b)

٢- تسمى المجموعة $\{x : x \in R, a\le x\le b\}$ بالفترة المغلقة ويرمز لها بالرمز $[a,b]$

٣- تسمى المجموعة $\{x : x \in R, a\le x<b\}$ بالفترة نصف المغلقة من اليسار ويرمز لها بالرمز $(a,b]$

٤- تسمى المجموعة $\{x : x \in R, a<x\le b\}$ بالفترة نصف المغلقة من اليمين ويرمز لها $(a,b]$

Absolute Value

تعرف القيمة الحقيقية Absolute value للعدد الحقيقي X والتي يرمز لها بالرمز |X| بما يأتي

$$|X| = \begin{cases} X & \text{if } X \geq 0 \\ -X & \text{if } X < 0 \end{cases}$$

وعليه فأن القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي هي عدد حقيقي غير سالب

* Theory of Absolute Value

1- $|ab| = |a| \cdot |b|$

2- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

3- $|X| < a \Leftrightarrow -a < X < a$

4- $|X| > a \Leftrightarrow X > a$ or $X < -a$.

example : write the intervals value to prove the x value?

1- $|x-4|<2$

Sol

$|x|<a \iff -a<x<a$

$-2<x-4<2$

$2<x<6$

$Tp=\{x: x\in R, 2<x<6\}$

interval $(2,6)$

4

② $|2x-7| > 1$

Sol

$2x-7 > 1$ or $2x-7 < -1$

$2x > 8$ or $2x < 6$

$x > 4$ or $x < 3$

$Tp = \{(-\infty, 3) \cup (4, \infty)\}$

③ $|x+\frac{1}{2}| < \frac{3}{2}$

$-a < x < a$

$\frac{-3}{2} < x + \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$

$\frac{-3}{2} - \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$

$\frac{-4}{2} < x < \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$

$-2 < x < 1$ $\Rightarrow Tp = \{x : x \in R, -2 > x > 1\}$

Inequalities

يقال للعبارات $a<b$ و $a>d$ متباينات

تكون المتباينة صحيحة لبعض الاعداد الحقيقية وغير صحيحة للبعض الاخر

ويقال لمجموعة الاعداد الحقيقية التي تحقق المتباينة بمجموعة الحل لمجموعة المتباينة T_p و S_s

نظريات المتباينات

١. ليكن $a,b,c \in R$ فان

$$a<b \iff a+c<b+c$$

٢. ليكن $a,b,c \in R$.

A- اذا كان c عدد موجباً فان

$$a<b \iff ac<bc$$

B- اذا كان c عدد سالباً فان

$$a<b \iff ac>bc$$

example :- Find the Solution of the Inequalities ?

1- $2X - 7 < X + 4$

$X < 11$

$Tp = \{X : X \in R, X < 11\}$

2- $-5 < 2X + 6 < 4$ H.W

3- $X^2 - 5X + 6 < 0$

$(X - 2)(X - 3) < 0$

a) $X - 2 < 0$ and $X - 3 < 0$

$X < 2$ & $X > 3$

$\therefore Tp = \{\emptyset\}$

III

3) b- $X-2>0$ and $X-3<0$

$X>2$ and $X<3$

$\therefore TP = \{X : X \in R,\ 2 < X < 3\}$

④ $3+7X \leqslant 2x-9$ $(*-3)$

$\cancel{3}-\cancel{3}+7x \leqslant 2x-9-3$

$7x \leqslant 2x-12$

$7x-2x \leqslant -12$

$5X \leqslant -12$ $\div(5)$

$X \leqslant \frac{-12}{5}$

$\therefore TP = \{X : X \in R,\ X \leqslant \frac{-12}{5}\}$

8

5) $7 \leqslant 2-5x < 9$

Sol

$2-5x \geqslant 7$ and $2-5x < 9$

$\cancel{2}-\cancel{2}-5x \geqslant 7-2$ & $\cancel{2}-\cancel{2}-5x < 9-2$

$-5x \geqslant 5$ & $-5x < 7$

$x \geqslant -1$ & $x < -\frac{7}{5}$

$TP = \{x : x \in R,\ -1 \geqslant x < -\frac{7}{5}\}$

6) $4+5x \leqslant 3x-7$

Sol

$\cancel{4}-\cancel{4}+5x \leqslant 3x-7-4$

$5x \leqslant 3x-11$

$5x-3x \leqslant -11$

$2x \leqslant -11$ $(\div 2)$

$x \leqslant \frac{-11}{2} \Rightarrow TP = \{x : x \in R,\ x \leqslant \frac{-11}{2}\}$

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الانبار
كلية الصيدلة

المرحلة الاولى

المحاضرة الثانية

مادة الرياضيات

Math & Biostatistics

أستاذة المادة

م.م. كوثر عبد المجيد احمد العاني

1441 هـ **2020 م**

①

Function

ليكن لدينا (a,b) مجموعة ولتكن F مجموعة الازواج المرتبة (x,y) بحيث ان $y \in b$, $x \in a$

١- يقال ان F هي دالة من $F: A \to B$ اذا اقترن كل عنصر في X بعنصر وحيد من B

وتسمى مجموعة العنصر الاول X منطلق الدالة (المجال Domin) وتسمى مجموعة العنصر الثاني y مستقر الدالة (المجال المقابل Range)

العنصر y هو صورة العنصر X لفعل F وان X متغير مستقل و y متغير معتمد غير مستقر لكل دالة هناك منطلق ومستقر

$F(X) = y \rightarrow$ مستقر الدالة

منطلق الدالة X

2

٢- العمليات الجبرية مع الدوال

Domin $\leftarrow D_F = R \rightarrow$ Range , $R_f = R^+$

ليكن كل من $F(X)$, $g(X)$ دالة فإن

1- $(F \mp g)(x) = F(x) \mp g(x)$

2- $(f \cdot g)(X) = F(X) \cdot g(X)$

3- $F/g(X) = F(X)/g(X)$

4- $K F(X) = K F(X)$

where the (K) is any Konstant.

examples:

if the

1- $F(X) = X^2$, $g(X) = X$ Find 1- $(F+g)(x)$

2- $(f \cdot g)(x)$

Sol

1- $(F+g)(X) = F(X) + g(X) \Rightarrow \boxed{X^2+X}$

2- $(f \cdot g)(X) = f(X) \cdot g(X) \Rightarrow X^2 \cdot X = \boxed{X^3}$

2

Ex2 $F(x) = x^2$, $g(x) = x^2+1$ Find $(F/g)(x)$

Sol $\frac{F}{g}(x) = \frac{F(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{x^2+1}$

Ex3 $F(x) = x^2+2x-3$ find $x=-2$, $x=0$, $x=(x+2)$

Sol

① $F(-2) = (-2)^2 + 2(-2) - 3 \Rightarrow \cancel{4} - \cancel{4} - 3 = -3$

② $F(0) = (\cancel{0})^2 + \cancel{2}(0) - 3 \Rightarrow -3$

③ $F(x+2) = (x+2)^2 + 2(x+2) - 3 = x^2 + 6x + 5$

Inverse Function.

لتكن A مجموعة جزئية من R ولتكن F هو دالة من $A \longrightarrow R$

$F: A \longrightarrow R$

$g: F(A) \longrightarrow R$

دالة يقال متباينة فاذا وجدت الدالة g من $F(A) \to R$
بحيث ان $F(g(y)) = y$ لكل $y \in R$ فان الدالة $g(y)$ تكون معكوس
الدالة $F(x)$.

بصيغة أخرى : اذا كانت الدالتين $g(y)$ و $f(x)$ تحقق الشرطين

1- $F(g(y)) = y$

2- $g(F(x)) = x$

يمكننا القول ان $f(x)$، $g(y)$ دالتين متعاكستين اي ان $g(y)$ معكوس
الدالة $F(x)$ و $F(x)$ معكوس الدالة $g(y)$.

* نلاحظ منطلق الدالة $g(y)$ هو مستقر الدالة $F(x)$ و مستقر الدالة $g(y)$ هو منطلق الدالة $F(x)$ ويمكننا أن نرمز لمعكوس الدالة $F(x) = F^{-1}_{(x)}$

example 1

if the F, g it is function

$F(x) = 3x$

$g(y) = \frac{1}{3}y$, prove the function $g(y)$ it is invers function $F(x)$

Sol

1- $F(g(y)) = F(\frac{1}{3}(y)) = 3(\frac{1}{3}y) = y$ الشرط الأول

$g(F(x)) = g(3x) = \frac{1}{3}(3x) = x$

ex 2 : $F(x) = 2x+1$

Sol

$F(x) = y \Rightarrow 2x+1 = y$

$2x = y-1$

$\therefore x = \frac{1}{2}(y-1) = g(y)$

$F(g(y)) = F[\frac{1}{2}(y-1)]$

$= 2[\frac{1}{2}(y-1)]+1 = y-1+1 = y$

example find the invers function f(x)

$$F(x) = \frac{2}{x-1}$$

Sol

$$f(x) = y \Rightarrow y = \frac{2}{x-1}$$

$$x = \frac{2}{y} + 1 \Rightarrow \underbrace{x = \frac{2+y}{y}}_{g(y)}$$

$$F(g(y)) = F\left(\frac{2+y}{y}\right) = \frac{2}{\frac{2+y}{y} - 1} \Rightarrow \frac{2}{\frac{2+y-y}{y}}$$

$$\Rightarrow \frac{2y}{2} = y$$

$$g(f(x)) = g\left(\frac{2}{x-1}\right) = \frac{2 + \frac{2}{x-1}}{\frac{2}{x-1}}$$

$$= \frac{\frac{2x-2+2}{x-1}}{\frac{2}{x-1}} \Rightarrow \frac{2x-2+2}{x-1} \cdot \frac{x-1}{2}$$

$$= \frac{2x}{2} = 2$$

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الانبار
كلية الصيدلة

المرحلة الاولى

المحاضرة الثالثة

مادة الرياضيات

Math & Biostatistics

أستاذة المادة

م.م. كوثر عبد المجيد احمد العاني

1441 هـ

2020 م

1   Lec 3

(Goordinate planer)

١- نظام الاحداثيات المتقاطع (Intersecting Coordinate System)

يتكون المستوى الاحداثي من تقاطع مستقيمين متعامدين عند نقطة الاصل (٠،٠) المستقيم الافقي لديمثل المحور الافقي X-axis والمستقيم العمودي يمثل المحور العمودي y-axis احداثيات اي نقطة (a,b) تقع داخل المستوى تمثل بالاحداثي السيني x والذي يمثل بالنقطة a والاحداثي الصادي يمثل بالنقطة b لتقاطع المحورين يعطي (a,b) الاحداثيين الافقي والعمودي يقسمان المستوى الى اربعة تربيعات (four quardtics)

٢- المسافة بين نقطتين distance between two Point

$P_1(x_1, y_1)$

$P_2(x_2, y_2)$

يمكن ايجاد العلاقة بينهما وايجادها بالتالي

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2

٣/ نقاط التقاطع Intercept Point

النقطة التي يقطع بها المستقيم أو المنحني المحورين تسمى نقطة التقاطع
يمكن ايجاد العلاقة الاحداثيات كما يأتي

لايجاد نقاط التقاطع مع المحور السيني نضع $y=0$

لايجاد نقاط التقاطع مع المحور الصادي نضع $x=0$

example 1/ Find the Intekept Point straight $3x+2y=6$?

sol

$y=0 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2$

$Point_1\ (2,0)$

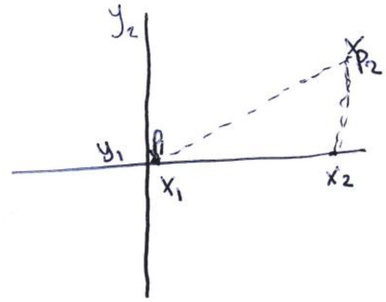
$x=0 \Rightarrow 2y=6 \Rightarrow y=3$

$Point_2\ (0,3)$

٤- الميل على الخط المستقيم Slope of a line

اذا كانت $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ نهايتي نقطتين على قطعة مستقيم غير عمودي على المحورين فأن ميل هذا الخط يعرف بالاتي

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



* ملاحظات

1- زاوية ميلان الخط نرمز لها (θ) تقاس بالاتجاه الموجب عكس عقارب الساعة

الخطوط العمودية على المحور السيني يكون ميلها غير معرف لان $\Delta x = 0$

اما الخطوط العمودية على المحور الصادي فيكون ميلها يساوي 0 لان $\Delta y = 0$

٢- م- ميل الخط المستقيم يكون متساويا لاي نقاط مختارة لانه لا يعتمد على النقاط المختارة وانما يعتمد على الخط متزايد أو متناقص فيكون موجبا او سالبا على التوالي كما موضح

مستقيم عمودي على اليمين غير معرف لان $x = 0$

B- اذا كان الخطين متعامدين فان $m_1 = \frac{-1}{m_2}$ اما اذا كان الخطين متوازيين فان $m_1 = m_2$

C- اذا كانت الخطوط غير عمودية فان العلاقة بين الميل وزاوية الميل هي $m = \tan\theta$

وعليه فان الخطوط العمودية على المحور السيني تكون ميلها غير معرف لأن

$$\theta = 90 = \frac{\pi}{2}$$

$$\tan\frac{\pi}{2} = \infty$$

والخطوط العمودية على المحور الصادي تكون ميلها Zero

$$\theta = 0 \Rightarrow \tan 0 = 0$$

5- معادلة الخط المستقيم Equation of a straight Line

A- معادلة الخط المستقيم غير العمودي في حالة وجود نقطة وميل يسمى Slope Point equ

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

-B

B- معادلة الخط المستقيم غير العمودي في حالة وجود قطع على المحور الصادي وميل تسمى Slope and y intercept equation

$y = mx + b$ where $b \Rightarrow$ قطع محور صادي

C - في حالة لو كان الخط يمر بنقطة الاصل فأن المعادلة

$y = mx$

اذا كان الميل $= 1$ فأن $y = x$

اما اذا كان $m = -1$ فأن $y = -x$

d) في حالة وجود نقطة ومعادلة مستقيم يوازي المستقيم المطلوب فأن

$$m = \frac{-\ x \text{ معامل}}{y \text{ معامل}}$$

example 1 :- Find the distance between Point $(\underbrace{2,1}_{x_1\ y_1})$ to the Stright the equation $y = x+2$

Solution

$x=0 \Rightarrow y=2 \quad \therefore \text{Point } (0,2)$

$y=0 \Rightarrow x=-2 \quad \therefore \text{Point } (-2,0)$

لايجاد معادلة المستقيم L_2

$y = x+2 \text{ ----- } (1)$

$y - x - 2 = 0$

$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow m_1 = 1$

$\therefore m_2 = -1 \Rightarrow y - y_1 = m_2(x - x_1)$

$y - 1 = -1(x-2)$

$y - 1 = -x + 2$

$\therefore \boxed{y = -x+3} \text{ ---- } L_2 \text{ - } (2)$

I

complete ex 1

بمساواة معادلة 1 و 2
معادلة 1 معطاه في السؤال

$$X+2=-X+3 \Longrightarrow 2X=1$$

$$\therefore X=\frac{1}{2}$$ نعوضها في 1

$$y=\frac{1}{2}+2 \quad \therefore y=\frac{5}{2}$$

Point $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$=\sqrt{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{5}{2}\right)^2} \Longrightarrow \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{18}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

example2: Find the equ. stright Pass through ~~including~~ two Point $(4,9)$, $(2,3)$

$\quad\quad x_1 \; y_1 \quad x_2 \; y_2$

Sol

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Longrightarrow \frac{3-9}{2-4} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 9 = 3(x - 4)$$

معادلة مستقيم

Stright equation.

---

example 3: Find the equ. stright passing through the Point $(2,3)$ and the Slope $\frac{-3}{2}$?

Sol

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{-3}{2}(x - 2)$$

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الانبار
كلية الصيدلة

المرحلة الاولى

المحاضرة الرابعة

مادة الرياضيات

Math & Biostatistics

أستاذة المادة

م.م. كوثر عبد المجيد احمد العاني

1441 هـ

2020 م

The limits

$$\lim_{x \to a} F(x) = L \qquad \text{or} \quad F(x) \longrightarrow L \ \text{ when } x \to a$$

ليكن كل من $F(x)$, $g(x)$ دالة بحيث أن

$$\lim_{x \to a} F(x) = L_1 \quad , \quad \lim g(x) = L_2$$

فأن .

1- $\lim\limits_{x \to a} F(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \to a} F(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

2- $\lim\limits_{x \to a} f(x) \mp g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \mp \lim\limits_{x \to a} g(x)$

3- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$

(4) $\lim\limits_{x \to a} K = K$ where K: any constant

$\lim K F(x) = K \lim\limits_{x \to a} f(x)$

(5) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to \infty} x = \infty$

2

There are the number of soultion method to solve the limits which are:

* التعويض المباشر
* التحليل ثم الاختصار
* الضرب بالعامل المرافق للبسط او المقام او لكليهما
* في حالة الاقتراب من اللانهاية والدالة كسرية نقسم البسط او المقام على اكبر أس.

examples:

1- $\lim_{x\to 2} \frac{5x^3+4}{x-3} = \frac{\lim_{x\to 2} 5x^3+4}{\lim_{x\to 2} x-3}$

$= \frac{5(2)^3+4}{(2)-3} = \frac{44}{-1} = -44$

2) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

$\lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} \Rightarrow \lim_{x\to 2} (x+2) = 4$

3/

(3) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}+\cancel{3}-\cancel{3}}{\cancel{x}\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

(4) $$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x}{2x^3 - 5}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3}}{2\frac{x^3}{x^3} - \frac{5}{x^3}} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{5}{x^3}} = \frac{0-0}{2-0} = 0$$

(5) $\underline{\underline{4}}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x-3} = -2$$

(6) $$\lim_{x\to 0} \frac{(a+x)^3-a^3}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} [a^3+b^3] \Rightarrow (a-b)[a^2+ab+b^2]$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{[}(a+x)-a][(a+x)^2+a(a+x)+a^2}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(a^2+2a\underset{0}{x}+\underset{0}{x^2}-a^2+a\underset{0}{x}+a^2)}{\cancel{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} 3a^2+3a\underset{0}{x}+\underset{0}{x^2} = 3a^2$$

5/

⑦ Find $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

Solution:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x},$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \times \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x})^2-(1)^2}{x(\sqrt{1+x}+1)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1}+\cancel{x}-\cancel{1}}{\cancel{x}(\sqrt{1+x}+1)} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{1+0}+1}$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

6

* Some Important Limits

1- $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$

2- $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$

3- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

4- $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

5- $\lim_{x\to 0} e^{x} = 1$

6- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

7- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1} x}{x} = 1$

8- $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x}{x} = 1$

7

⑧ Find the Limit of function $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$?

Solution:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x-x+2}{x^2+3x-2x-6}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)-1(x-2)}{x(x+3)-2(x+3)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x+3} \Rightarrow \frac{2-1}{2+3} = \frac{1}{5}$$

9) $\lim_{x\to\infty} \frac{3-x^2}{1+2x^2}$?

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3(x^2\ x^2)x^2}{1(x^2+2x^2)x^2} = \frac{0-1}{0+2} = \frac{-1}{2}$$

8

10) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)}$$

$[\sin^2 x + \cos^2 x = 1] \Longrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)}$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{=1} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{0}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

2

11- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{2}{2} \Rightarrow 2 \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2$

12) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to -1} \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -1} (x-1)$

$= (-1-1) = -2$

13) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^4+3x^2+2x}{x^4-x+1} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{3\frac{x^4}{x^4}+3\frac{x^2}{x^4}+2\frac{x}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}-\frac{x}{x^4}+\frac{1}{x^4}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{3+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}} \Rightarrow \frac{3+\frac{3}{(0)^2}+\frac{2}{(0)^3}}{1-\frac{1}{(0)^3}+\frac{1}{(0)^4}} = 0$

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الانبار
كلية الصيدلة

المرحلة الاولى

المحاضرة الخامسة

مادة الرياضيات

Math & Biostatistics

أستاذة المادة

م.م. كوثر عبد المجيد احمد العاني

1441 هـ

2020 م

Lec 5

1

((Differentiation by using the definition of a derivative))

* if the function $f(x)$ and the point (x, y), Lies on the Line, the Slope of the tangent Pass through the function in this Point it is:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

we can say:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = y' = \frac{d}{dx} f(x)$$

where the $f'(x)$ it is represent the derivative of a Function that can be used to find the equation of the tangent Line.

2

example: Find by using the definition of the derivative, the derivative of the following Functions?

1- $F(x) = x^2$ ⇒ الدالة الرئيسية

Sol

$$\acute{F}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$ قانون تعريف المشتقة

عند التعويض في قانون المشتقة نعوض بكل (x^2) بـ $(x+\Delta x)^2$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x \Rightarrow$$ نعوض عن قيمة $\Delta x = 0$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} = 2x$$

3/

2- $F(x) = \frac{1}{x}$, where $x \neq 0$

$$\bar{F}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{x\Delta x\,(x+\Delta x)} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x+\Delta x)} = \frac{-1}{x^2}$$

3- $F(x) = \frac{x}{x-3}$

$$\bar{F}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x+\Delta x}{x+\Delta x-3} - \frac{x}{x-3}}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(x-3)(x+3) - x(x+\Delta x-3)}{(x-3)(x+\Delta x-3)}}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2+x\Delta x-3x-3\Delta x-x^2-x\Delta x+3x}{\Delta x(x-3)(x+\Delta x-3)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3\Delta x}{\Delta x(x-3)(x+\Delta x-3)} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3}{(x-3)(x+\Delta x-3)}$$

$$= \frac{-3}{(x-3)^2}$$

④ Find the derivative function $f(x) = x^2+2$ and Find the equation of the tangent curve at $x=2$?

اوجد مشتقة الدالة $f(x)=x^2+2$ ثم جد معادلة المنحني المماس لمنحنى الدالة عند $x=2$

$$f(x) = x^2+2 \Rightarrow \bar{f}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2+2-(x^2+2)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2}+2x\Delta x+\Delta x^2\cancel{+2}\cancel{-x^2}\cancel{-2}}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} 2x+\underbrace{\Delta x}_{0} \Rightarrow 2x = m$$

$\therefore$ Slop $= 2x$ where $x=2$

$$\therefore m = 2\times 2 = 4$$

$$f(x) = \underbrace{x^2+2}_{y \text{ تمثل}} \Rightarrow \therefore y = x^2+2$$

$$y = (2)^2+2 = 6 \qquad (2,6)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y-6 = 4(x-2) \Rightarrow \boxed{y = 4x-2}$$ معادلة منحنى المماس

5) Find by using the definition of the derivative, the derivative of the function $f(x) = 6x - x^2 + 5$

باستخدام تعريف المشتقة جد مشتقة الدالة $f(x) = 6x - x^2 + 5$

Solution :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

نعوض بكل (X) بدالة الأصلية
ب (X+ΔX) حسب تعريف القانون

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6(x+\Delta x) - (x+\Delta x)^2 + 5 - (6x - x^2 + 5)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{6x} + 6\Delta x - \cancel{x^2} - 2x\Delta x + \Delta x^2 + \cancel{5} - \cancel{6x} + \cancel{x^2} - \cancel{5}}{\Delta x}$$

عامل مشترك

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(6 - 2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} 6 - 2x + \underbrace{\Delta x}_{0} \Rightarrow \boxed{6 - 2x}$$

6

⑥ $F(x) = 2x+3$

sol

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)+3 - (2x+3)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{2x} + 2\Delta x \cancel{+3} \cancel{-2x} \cancel{-3}}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = 2$$

Chain rule

let $y = f(u)$, $u = g(x)$ where is $F(u)$, $g(x)$ it is two Function are differentiable Such that

$$\bar{y} = \bar{F}[g(x)] \cdot \bar{g}(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

example 1 : $F(x) = (x^2+1)^5$

$\acute{F}(x) = (5(x^2+1)^4 \cdot 2x)$ حسب قواعد الاشتقاق العادية

2) Fined $\frac{dy}{dx}$ to the function?

$y = u^2$ $\quad u = x^2+3$ حسب قاعدة السلسلة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{du} = 2u \, , \, \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (2u) \cdot (2x) = 4ux$$

نعوض $(u = x^2+3)$ حسب السؤال $\quad \therefore \frac{dy}{dx} = 4x(x^2+3)$

$$\boxed{= 4x^3 + 12x}$$

8/

(3) $y = \sqrt{t^2+t}$, $t = 2x+3$ find $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t+1}{2\sqrt{t^2+t}}$$

مشتقة الجذر = مشتقة داخل الجذر / ٢×الجذر

$$\frac{dt}{dx} = 2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2t+1}{\cancel{2}\sqrt{t^2+t}} \cdot \cancel{2} \Rightarrow \frac{2(2x+3)+1}{\sqrt{(2x+3)^2+(2x+3}}$$

(4) $y = 5\sqrt{u}$, $u = \frac{x^3}{5}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{\cancel{5}}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{3}{\cancel{5}}x^2$$

$$= \frac{3x^2}{2\sqrt{u}}$$

نستطيع التعويض بقيمة u والتبسيط
او نتوقف الحل الى هنا .

Q

5) The Point moving on the curve $y = x^3 - 3x + 5$ such that $x = \frac{1}{2}\sqrt{t+3}$, where ($t$) represents time. what is the rate of change of y when $t = 4$?

Sol

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3 \quad (= 3(x^2 - 1)) \quad , \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{4\sqrt{t}}$$

$$\frac{dy}{dt} \Rightarrow = 3(x^2 - 1) \cdot \frac{1}{4\sqrt{t}} = \frac{3(x^2 - 1)}{4\sqrt{t}}$$

when $t = 4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{4+3} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{3\left(\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 - 1\right)}{4\sqrt{4}}$$

(10) if the $y=-6z^2-23$ & $z=\frac{-4}{x}$ find $\frac{dy}{dx}$?

Sol

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$z=-4x^{-1}$$

$$\frac{dz}{dx}=4x^{-2}=\frac{4}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dz}=-12z$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-12z\cdot\frac{4}{x^2} = -12\left(\frac{-4}{x}\right)\cdot\frac{4}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{192}{x^3}$$

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الانبار
كلية الصيدلة

المرحلة الاولى

المحاضرة السادسة

مادة الرياضيات

Math & Biostatistics

أستاذة المادة

م.م. كوثر عبد المجيد احمد العاني

1441 هـ **2020 م**

 lec 6

Implicit Function derivative

الدوال من النوع $y=f(x)$ تدعى بالدوال الصريحة explicitly وهي دوال لمتغير واحد مستقل ومتغير معتمد . وقد تصادفنا نوعي اخرى من الدوال لمتغيرين او اكثر ويكون من الصعب او المستحيل حلها الا بالاعتماد على ما يسمى بمشتقة الدوال الضمنية

وهذا مثال معادلة لمتغيرين هما (x,y) اي ان

$$x^2+y^2=1$$

$$y=\mp\sqrt{1-x^2}$$

اي انها بالحقيقة دالتين صريحتين وكذلك الدالة $x^2+y^2=3xy$ هي دالة ضمنية ومن الصعوبة ايجاد (y) بدلالة (x)

وبشكل عام ليس من الضروري ايجاد (y) بدلالة (x) وانما نعتمد الاشتقاق الضمني لايجاد حلها.

2

example: Find $\frac{dy}{dx}$ by use Implicit function derivative ?

1- $5y^2 + y = x^2$

$$10y\bar{y} + \bar{y} = 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx}[10y+1] = 2x$$

$\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{10y+1}$$

2- $4x^2 - 2y^2 = 9$

$$8x - 4y\bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{y} = \frac{8x}{4y} = \frac{2x}{y}$$

واذا ~~...~~ طلب المشتقة الثانية فيمكن ايجادها من المشتقة الأولى

$$\bar{\bar{y}} = \frac{(2)y - 2x(\bar{y})}{y^2} \Rightarrow \frac{2y - 2x\left(\frac{2x}{y}\right)}{y^2}$$

$$= \frac{2\left(y - \frac{2x}{y}\right)^2}{y^2} \Rightarrow \frac{2(y^2 - 4x^2)}{y^3}$$

3

③ $x^3+x^2y-10y^4=0$

$$3x^2+(2xy+\bar{y}x^2)-40y\bar{y}=0$$

$$3x^2+x^2\bar{y}+2xy-40y\bar{y}=0$$

$$(x^2-40y)\bar{y}=-3x^2-2xy$$

$$\bar{y}=\frac{-3x^2-2xy}{x^2-40y}$$

④ $2x^2-4xy+y^2-5x+3y+10=0$

$$4x-(4x\bar{y})+(4y+2y\bar{y}-5+3y\bar{y}+0=0$$

$$4x-4x\bar{y}-4y-2y\bar{y}-5+3y\bar{y}=0$$

$$4x-4y-5=(4x+2y-3y)\bar{y}$$

$$\bar{y}=\frac{4x-4y-5}{4x+2y-3}$$

4/

(5) $\sqrt{xy} + 3y = 10x$

$$\frac{1}{2\sqrt{xy}} x \frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx} = 10$$

$$= \frac{x\frac{dy}{dx} + y}{2\sqrt{xy}} + 3\frac{dy}{dx} = 10$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+3}{2\sqrt{xy}} - 10$$

(6) $x^2 + 3y^2 = 3$

Sol

$$2x + 6y\bar{y} = 0$$

$$2x = -6y\bar{y} \Rightarrow \bar{y} = -\frac{2x}{6y} \Rightarrow \frac{-x}{3y}$$

(5)

"Area between two curve"

ايجاد المساحة بين منحنى

لنفرض ان كل من $f(x)$, $g(x)$ دالتين مستمرتين ضمن الفترة $[a,b]$

وان $f(x)$ اكبر او يساوي $g(x)$ لجميع قيم x ضمن الفترة ذاتها

وعليه فأن المساحة المحددة اسفل منحني الدالة $f(x)$ وفوق الدالة $g(x)$

او على يمين الخط $x = a$ ويسار الخط $x = b$ هي

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

example: find the area down the curve $y = x+6$ and up the curve $y = x^2$ ingloding the intervals $(0,2)$ x_1, x_2

Sol

$$A = \int_0^2 [(x+6) - x^2]\, dx$$

$$A = \int_0^2 x\,dx + \int_0^2 6\, dx - \int_0^2 x^2\, dx$$

$$A = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + 6x\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 \Rightarrow A = 14 - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{42 - 8}{3} = \frac{34}{3}$$

(6)

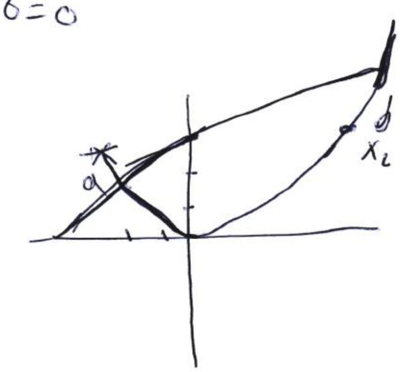
* في حالة ان المنحنيين يتقاطعان بنقطة او نقطتين بدلا من خط مستقيم من جهة اليمين واليسار فيمكن ايجاد نقاط التقاطع للحصول على حدود التكامل

example (2): Find the area between the up curve $y=x^2$ and the up strength $y=x+6$ and the ends of the Point of intersection

Sol

$x^2 = x+6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$(x-3)(x+2) = 0$



$x=3 \Rightarrow (3,9)$

$a=-2 \quad , \quad b=3$

$x=-2 \Rightarrow (-2,4)$

$$A = \int_{-2}^{3} \left((x+6) - x^2 \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{3}$$

$$= \left(\frac{9}{2} + 18 - \frac{27}{3} \right) - \left(\frac{4}{2} - 12 + \frac{8}{3} \right) = \frac{125}{6}$$

(7)

ex3: Find the area to the between curve $f(x) = 1 + 5x - x^2$

$g(x) = 4x - x^2$

inglading the intervals [1, 3]

$$A = \int_1^3 (1+5x-x^2) - (4x - x^2)\,dx$$

$$= \int_1^3 dx + 5\int_1^3 x\,dx - \int_1^3 x^2\cancel{dx} - \int_1^3 4x\,\cancel{dx} + \int_1^3 x^2\,dx$$

$$= \left(x + 5\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Big]_1^3$$

$$= \left(3 + \frac{45}{2} - \frac{27}{3} - 18 + \frac{27}{3}\right) - \left(1 - \frac{5}{2} - \frac{1}{3} - 2 + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \left[3 + \frac{45}{2} - \frac{27}{3} - 18 + \frac{27}{3} - 1 + \frac{5}{2} + \frac{1}{3} + 2 \frac{1}{3}\right]$$

يتوحيد المقامات والاختصار

Completed