جامعة الانبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

مقرر : مودولات (مقاسات)

المصدر

كتاب البنى الجبرية ٣

(المودولات)

د.محمد حسن الهوشي

منشورات جامعة تشرين

سوريا

المحاضرة السادسة

في المودولات

$$\begin{tikzcd}
 & & N \arrow[dll, dashed, "\theta"'] \arrow[dl, dashed, "h^{-1}\circ\theta"] \arrow[d, "g_i"] \\
M \arrow[r, "h^{-1}"'] & M \arrow[r, "f_i'"'] & M_i
\end{tikzcd}$$

إن وحدانية θ تقتضي الآن أن الثنائية $(M',(f_i'))$ هي أيضاً جداء للأسرة (M_i). □

من النظرية 4.6.1 والنظرية 5.6.1 نستنتج مباشرة خاصتين هامتين للجداء، وأعني بهما الخاصة التبديلية والخاصة التجميعية.

نتيجة 6.6.1 (تبديلية الجداء): لتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة R – مودولات، عندئذ:

$$\prod_i M_i = \prod_i M_{\sigma(i)},\ \sigma \in S_I$$

البرهان: إن الثنائية $(\prod M_{\sigma(i)}, (p_{\sigma(i)})$ هي أيضاً جداء للأسرة (M_i)،

والمطلوب ينتج مباشرة من نظرية الوحدانية (النظرية 5.6.1). □

نتيجة 7.6.1 (تجميعية الجداء): لتكن (I_k) تجزئة لـ I، حيث $k \in K$.

عندئذ:

$$\prod_{i \in I} M_i \cong \prod_{k \in K} \left(\prod_{i \in I_k} M_i \right)$$

البرهان: ليكن N R – مودولاً كيفياً، إذا أعطينا أي M_i نأخذ $k \in K$ بحيث

يكون $i \in I_k$. عندئذ يوجد في المخطط:

$$\begin{tikzcd}
 & & N \arrow[dll, dashed, "f"'] \arrow[dl, dashed, "h_k"] \arrow[d, "g_i"] \\
\prod_{k\in K}\left(\prod_{i\in I_k} M_i\right) \arrow[r, "p_k"'] & \prod_{i\in I_k} M_i \arrow[r, "p_i"'] & M_i
\end{tikzcd}$$

R – هومومرفيزم وحيد $h_k : N \to \prod_{i\in I_k} M_i$ ، بحيث يكون:

$$p_i \circ h_k = g_i , \quad \forall i \in I_k$$

و R – هومومرفيزم وحيد $f : N \longrightarrow \prod_{k\in K}(\prod_{i\in I_k} M_i)$ ، بحيث يكون:

$$p_i \circ h_k \circ f = g_i \qquad (*)$$

ليكن الآن $f' : N \longrightarrow \prod_{k\in K}(\prod_{i\in I_k} M_i)$ R – هومومرفيزماً آخر، يحقق أيضاً العلاقة

(*). إذا كان $x \in N$ ، نأخذ $f(x) = (x_k)$ ، $k \in K$ ، حيث مهما يكن $k \in K$ ، فإن

$x_k=(m_i)_{i\in I_k}$، وليكن $f'(x)=(x'_k)_{k\in K}$، حيث مهما يكن $k\in K$، فإن $x'_k=(m'_k)_{i\in I_k}$، عندئذ، لدينا:

$$g_i(x)=(p_ip_k)(f(x))=p_i(x_k)=m_i$$
$$g_i(x)=(p_ip_k)(f'(x))=p_i(x_k)=m_i$$

وبالتالي، فإن $f(x)=f'(x)$ و $f=f'$. وهذا يبين أن:

$$\prod_{k\in K}\left(\prod_{i\in I_k}M_i\right)$$

بالإضافة إلى الأسرة $(p_i\circ p_k)_{i\in I_k}$، جداء لأسرة المودولات $(M_i)_{i\in I}$. ووحدانية الإيزومرفيزم المطلوب تنتج الآن من النظرية 5.6.1. □

ننتقل الآن إلى دراسة الجداء المعاكس (المجموع المباشر) لأسرة R – مودولات $(M_i)_{i\in I}$. سأبرهن نظريتين متعلقتين بالمجموع المباشر. إحداهما تبرهن على وجود هذا المجموع، وتبرهن الثانية على وحدانيته. ولصوغ وبرهان هاتين النظريتين نمهد ما يلي:

لتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة R – مودولات، ولنتأمل المجموعة الجزئية في مودول الجداء الكارتيزي (الديكارتي) $\prod_{i\in I_k} M_i$، المؤلفة من أسرة العناصر $(m_k)_{i\in I}$ من $\prod_i M_i$ حيث $m_i = 0$ من أجل كل $I_k \ni i$ تقريباً. أي أن $m_i = 0$ ما عدا من أجل عدد محدود من العناصر m_i. من الواضح أن هذه المجموعة تشكل مودولاً جزئياً في $\prod_i M_i$. يسمى هذا المودول الجزئي مجموعاً مباشراً خارجياً لأسرة المودولات $(M_i)_{i\in I}$، ويرمز له بالرمز $\oplus_{i\in I} M_i$.

من أجل كل $I \ni j$ نأخذ التطبيق:

$$q_j : M_j \longrightarrow \oplus M_i$$

المُعرّف بالعلاقة:

$$q_j(x) = (x_i)_{i \in I}$$

حيث $x_i = 0$ إذا كان $i \neq j$، و $x = x_j$. بسهولة نجد أن q_j من أجل $I \ni j$ هو R – هومومرفيزم مودولات متباين (R – مونومرفيزم)، يسمى الإحواء أو تطبيق الإحواء لـــ M_j في $\oplus_{i \in I} M_i$.

فرضية 8.6.1: إذا كان $(M, (f_i))$ جداءً معاكساً لأسرة R – مودولات (M_i)، فكل f_j هو R – مونومرفيزم.

البرهان: من أجل كل $I \ni i$، نأخذ $M_i = N$، $\mathrm{id}_{M_i} = g_i$، و $= g_i$ التطبيق الصفري 0. إذا كان $i \neq j$ في تعريف الجداء المعاكس (التعريف 2.6.1). عندئذ، من $h \circ f_i = \mathrm{id}_{M_i}$ نجد أن f_j هو R – مونومرفيزم. □

نحن الآن في وضع يسمح لنا بالبرهان على وجود الجداء المعاكس لأسرة R – مودولات (M_i).

نظرية 9.6.1 (نظرية الوجود): من أجل كل أسرة R مودولات $(M_i)_{i\in I}$ تكون الثنائية $(\oplus_{i\in I} M_i, (q_i))$ جداءً معاكساً لهذه الأسرة.

البرهان: ليكن N R – مودولاً كيفياً، و $(g_i)_{i\in I}$ أسرة R – هومومرفيزمات $g_i : M_i \to N$ من أجل كل $i \in I$. نعرف

$$h : \oplus M_i \longrightarrow N$$

بالعلاقة:

$$h((m_i)) = \sum_i g_i(m_i)$$

[نلاحظ أن h معرف جيدا لأن كل أسرة (m_i) تحوي فقط عدداً محدداً من العناصر m_i المختلفة عن الصفر] من الواضح أن h هو R – هومومرفيزم. أضف إلى ذلك، من أجل كل $x_i \in M_i$ لدينا:

$$(h \circ q_i)(x) = h(q_i(x)) = g_i(x)$$

وبالتالي $h \circ q_i = g_i$ من أجل كل $I \ni i$. لبرهان وحدانيـــة h، نفرض أن $k : \oplus M_i \to N$ هو R − هومومرفيزم آخر، حيث $k \circ q_i = g_i$ من أجل $I \ni i$.

عندئذ، من أجل كل (m_i) من $\oplus M_i$، لدينا (بفرض أن جميع المجاميع معرفة جيدا):

$$k((m_i)) = k\left(\sum_i q_i(m_i)\right) = \sum_i (k \circ q_i)(m_i)$$

$$= \sum_i g_i(m_i) = h((m_i))$$

$$\Rightarrow k = h$$

وبذلك يتم برهان النظرية 9.6.1.

□

نظرية 10.6.1 (الوحدانية): لتكن (M_i) أسرة R – مودولات، و $(M,(f_i))$ جداءها المعاكس. إن $(M',(f'_i))$ جداء آخر عندما وفقط عندما يوجد R – إيزومرفيزم $h:M \to M'$، بحيث يكون $h \circ f_i = f'_i$.

البرهان: مشابه لبرهان النظرية 5.6.1 (فهو مثنّوية). □

من النظريتين 9.6.1 و 10.6.1 تنتج خاصتا الجداء المعاكس الهامتان، وأعني بهما الخاصة التبديلية والخاصة التجميعية.

نتيجة 11.6.1 (تبديلية الجداء المعاكس): لتكن (M_i) أسرة R – مودولات. عندئذ:

$$\sigma \in S_I,\ \oplus M_i \cong \oplus M_{\sigma(i)}$$

البرهان: من الواضح أن $(\oplus_{i\in I} M_{\sigma(i)}, (q_{\sigma(i)}))$ هي أيضاً جداء معاكس للأسرة (M_i). وعندئذ ينتج المطلوب من النظرية 10.6.1.

نتيجة 12.6.1 (تجميعية الجداء المعاكس): تكن (M_i) أسرة R – مودولات، و $(I_k)_{k\in K}$ تجزئة لـ I، عندئذ، يوجد R – هومومرفيزم:

$$\oplus_{i\in I} M_i \cong \oplus_{k\in K}(\oplus_{i\in I_k} M_i)$$

البرهان: ليكن N R – مودولاً كيفياً، من أجل كل M_i نأخذ $K \ni k$، بحيث يكون $I_k \ni i$. لنتأمل المخطط الآتي:

$$\begin{tikzcd}
 & N & \\
M_i \arrow[ur, "g_i"] \arrow[r, "g_i"'] & \oplus M_i \arrow[u, dashed, "h_k"] \arrow[r, "q_k"'] & \bigoplus_k(\bigoplus_i M_i) \arrow[ul, dashed, "f"']
\end{tikzcd}$$

في هذا المخطط h_k هو R – هومومرفيزم وحيد، حيث $h_k \circ q_i = g_i$ من أجل كل i، وf هو R – هومومرفيزم وحيد، حيث $f \circ q_k = g_k$ من أجل كل $K \ni k$.

وينتج من ذلك أن:

$$f \circ q_k \circ q_i = g_i \quad \text{من أجل} \quad I_k \ni i \quad \text{و} \quad K \ni k \qquad (*)$$

ليكن $f':\oplus_{k\in K}(\oplus_{i\in I_k}M_i)\to N$ R – هومومرفيزماً آخر يحقق العلاقة (*)، وليكن $p'_j:\bigoplus_i M_i\to M_j$ مقصور $p_j:\prod_i M_i\to M_j$ على $\bigoplus_i M_i$. عندئذ، بملاحظة أن $\Sigma_j(q_j\circ p'_j)$ هو التطبيق المطابق على $\bigoplus_{j\in I} M_j$، نحصل على:

$$\begin{aligned} f' &= \sum_k\sum_{i\in I_k} f'\circ q_k\circ q_i\circ p'_i\circ p'_k \\ &= \sum_k\sum_i g_i\circ p'_i\circ p'_k \\ &= \sum_k\sum_i f\circ q_k\circ q_i\circ p'_i\circ p'_k \\ &= f \end{aligned}$$

وهذا يبرهن أن $\sum_{k\in K}(\bigoplus_{i\in I_k} M_i)$ بالإضافة إلى الأسرة $(q_k\circ q_i)_{i\in I_k}$ جداء معاكس للأسرة $(M_i)_{i\in I}$. والإيزومرفيزم المطلوب ينتج الآن من النظرية 10.6.1. □

فيما يلي نعطي جل اهتمامنا إلى المجموع المباشر (الجداء المعاكس) لأسرة R – مودولات، وندرس بعض الخواص لهذا المجموع. وبعبارة أخرى، سوف نعطي هذا المجموع هوية مميزة لما له من الأهمية. لنبدأ بالنظرية.

نظرية 13.6.1: لتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة R – مودولات و $q'_j : M_j \to M$ R – هومومرفيزماً. عندئذ، $(M,(q'_i))$ جداء معاكس للأسرة (M_i) $\Leftrightarrow$ توجد أسرة R – هوهومرفيزمات $(p'_i)_{i\in I}$، حيث $p'_j : M \to M_j$ يحقق ما يلي:

$$\left.\begin{array}{lll} id_M & \text{إذا كان} & j=k \\ 0 & \text{إذا كان} & j\neq k \end{array}\right\} = p'_k \circ q'_j \qquad (1)$$

(2) من أجل كل $m \in M$، $p'_j(m)=0$، ما عدا من أجل عدد محدد $j \in I$ و $\sum_{j\in I}(q'_j \circ p'_j)(m) = m$.

البرهان: لنفرض أن $(M,(q'_i))$ جداء معاكس لـ (M_i). عندئذ يوجد R – إيزومرفيزم وحيد $f:\bigoplus_i M_i \to M$ ، بحيث يكون من أجل كل $j \in I$ المخطط:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "q'_j"'] \arrow[d, "f"] \\ M_j \arrow[r, "q_j"'] & \bigoplus_j M_j \end{tikzcd}$$

تبديلياً. من أجل كل $j \in I$ نعرف $p'_j : M \to M_j$ بالعلاقة:

$$p'_j = p_j \circ f^{-1}$$

حيث $p_j : \bigoplus M_j \to M_j$ هو مقصور $\overline{p}_j : \prod_j M_j \to M_j$ على $\bigoplus_j M_j$. عندئذ، من أجل كل $j,k \in I$ لدينا:

$$p'_k \circ q'_j = p_k \circ f^{-1} \circ q'_j = p_k \circ q_j = \begin{cases} id_{M_j} & , \quad j = k \\ 0 & , \quad j \neq k \end{cases}$$

أضف إلى ذلك، من أجل كل $M \ni m$، يتبين من المساواة:

$$p'_j(m) = (p_j \circ f^{-1})(m) = p_j(f^{-1}(m))$$

أن $p'_j(m)$ يساوي الصفر ما عدا من أجل عدد محدد $I \ni j$. وأخيراً:

$$\begin{aligned} \sum (q'_j \circ p'_j) &= (\sum_j f \circ q_j \circ p_j \circ f^{-1})(m) \\ &= (f \circ \sum_j (q_j \circ p_j) \circ f^{-1})(m) \\ &= m \end{aligned}$$

لأن $\sum_j (q_j \circ p_j)$ هو تطبيق المطابق على $\bigoplus_j M_j$.

بالعكس، نفرض أن الشرطين (1) و (2) في نص النظرية محققان. عندئذٍ، من أجل كل $M \ni m$ نعرف $g : M \to \bigoplus_j M_j$ بالعلاقة:

$$g(m) = \sum_j (q_j \circ p'_j)(m)$$