جامعة الانبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

مقرر : مودولات (مقاسات)

المصدر

كتاب البنى الجبرية ٣

(المودولات)

د.محمد حسن الهوشي

منشورات جامعة تشرين

سوريا

المحاضرة السابعة

في المودولات

عندئذ، بحسب النظرية 9.6.1 يوجد R – هومومرفيزم:

$$h:\bigoplus_j M_j \to M$$

بحيث يكون $h\circ q_j = q'_j$. ومن المخطط:

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, shift left, "p'_j"] \arrow[d, shift left, "g"] \\
M_j \arrow[ur, shift left, "q'_j"] \arrow[r, "q_j"'] & \bigoplus_j M_j \arrow[u, shift left, "h"]
\end{tikzcd}$$

ومن أجل كل $m \in M$، نجد:

$$(h\circ g)(m)=h(g(m))=\sum_j h\circ q_j\circ p'_j)(m)$$

$$=\sum_j (q_j\circ p'_j)(m)=m$$

و $h\circ g$ هو التطبيق المطابق على M. وإذا كان $x\in\bigoplus_j M_j$، فإن:

$$(g\circ h)(x)=g(h(m))=\sum(q_j\circ p'_j)(h(x))=$$

$$=\sum_j\sum_k (q_j\circ p'_j\circ h\circ q_k\circ p_k)(x)$$

$$=\sum_j (q_j\circ p_k)(x)$$

بحسب (1)

$$=x$$

إذاً، $g \circ h$ هو التطبيق المطابق على $\bigoplus_j M_j$. وينتج مما سبق أن h و g هما R – إيزومرفيزمان أحدهما نظير الآخر. والآن بتطبيق النظرية 10.6.1 نجد أن $(M,(q'_i))$ هو جداء معاكس للأسرة $(M_i)_{i\in I}$. □

ملاحظة (1): إذا كانت $I=\{1,\cdots,n\}$ فإن العلاقة (2) في نص النظرية 13.6.1، تأخذ الشكل التالي:

$$\sum_{i=1}^{n} q'_i \circ p'_i = \mathrm{id}_M$$

ملاحظة (2): هناك بالطبع خواص هامة ومفيدة تعطي جداء أسرة R – مودولات (M_i) هوية مميزة مثنوية لتلك التي تعطيها النظرية 13.6.1، للجداء المعاكس ونصها كما يلي:

يكون R – مودول M بالإضافة إلى الأسرة (p'_j) من R – هومومرفيزمات $p'_j : M_j \to M$ جداء للأسرة (M_i) $\Leftrightarrow$ توجد أسرة R – هومومرفيزمات $q'_j : M_j \to M$ بحيث يكون:

$$\left.\begin{array}{lll} id_{M_j} & \text{إذا كان} & j=k \\ 0 & \text{إذا كان} & j\neq k \end{array}\right\} = p'_k \circ q'_j \qquad (1)$$

(2) من أجل كل $(x_j) \in \prod_j M_j$ يوجد عنصر وحيد $x \in M$ بحيث يكون $p'_j(x) = x_j$ من أجل كل $j \in I$.

في كل ما سبق كانت مودولات الأسرة (M_i) مودولات كيفية، قد تكون عناصر بعضها من طبيعة مختلفة عن طبيعة عناصر الأخرى. فيما يلي ندرس الحالة الهامة الآتية التي تكون فيها عناصر الأسرة (M_i) جميعها مودولات جزئية في R – مودول M. في هذه الحالة نأخذ الإدخال (الإحواء، تطبيق الاحتواء) الطبيعي $\iota_j : M_j \to M$ و $h : \oplus M_j \to M$ الهومومرفيزم الوحيد الذي يجعل المخطط:

$$\begin{tikzcd} & M \\ M_j \arrow[ur, dashed, "\iota_j"] \arrow[r, "q_i"'] & \bigoplus_j M_j \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

تبديلياً من أجل كل $j \in I$. من برهان النظرية 9.6.1، نعلم أن h معطى بالعلاقة:

$$h(m_j) = \sum_j \iota_j(m_j) = \sum_j m_j$$

إذاً، $\mathrm{Im}(h)$ هو المودول الجزئي $\sum_j M_j$ في M المولد بـــ $\bigcup_j M_j$، وهذا يسمح لنا بإعطاء التعريف الآتي:

تعريف 14.6.1: ليكن M R – مودولاً، و $(M_i)_{i\in I}$ أسرة R – مودولات جزئية في M. نقول إن M هو المجموع المباشر الداخلي للأسرة (M_i) إذا كان التطبيق $h:\bigoplus_i M_i \to M$ المعرف أعلاه إيزوموفيزماً.

نوجز خواص المجموع المباشر للأسرة المودولات الجزئية $(M_i)_{i\in I}$ بالنظرية الآتية.

نظرية 15.6.1: ليكن M R – مودولاً، و (M_i) أسرة R – مودولات جزئية في M عندئذ:

(a) M مجموع مباشر للأسرة (M_i) $\Leftrightarrow$ كل عنصر $x \in M$ يمثل بشكل وحيد بالشكل $x = \Sigma_i m_i$ حيث $x_i \in M_i$ من أجل كل $i \in I$، و $m_i = 0$ ما عدا من أجل عدد محدود منها.

(b) إن الفرضيات الآتية متكافئة:

(1) المجموع $\Sigma_i M_i$ هو مجموع مباشر للأسرة.

(2) إذا كان $\Sigma_i m_i = 0$، فإن $m_i = 0$ من أجل كل i.

(3) $M_i \cap \sum_{j, j \neq i} M_j = \{0\}$ من أجل كل $i \in I$.

البرهان:

(a) بالتعريف M مجموع مباشر للأسرة (M_i) $\Leftrightarrow$ h إيزومرفيزم (غامر + متباين). إن h غامر $\Leftrightarrow$ $M = \mathrm{Im}(h) = \Sigma_i M_i$ $\Leftrightarrow$ يمكن التعبير عن كل $x \in M$ بالشكل $x = \Sigma_i m_i$، حيث $m_i \in M_i$ من أجل كل $i \in I$ و $m_i = 0$، ما عدا عدد محدود منها. وبما أن $h((m_i)) = \Sigma_i m_i$ فإن h متباين $\Leftrightarrow$ تكون هذه التعابير وحيدة.

(b) (1) $\Leftarrow$ (2): بحسب (a) يعبر عن 0 كمجموع، بطريقة وحيدة وهي التافهة:

$$0 = 0 + \cdots + 0 + \cdots$$

(2) $\Leftarrow$ (3): ليكن $x \in \left(\Sigma_i M_j\right) \cap_{j=i} M_i$، وليكن:

$$x = m_i = \sum_{j=i} m_j$$

عندئذ نحصل على المساواة:

$$-m_i + \sum_{j=i} m_j = 0$$

وبحسب (2)، $m_i = 0$ و $x = 0$.

(3) $\Leftarrow$ (1): لنفترض أن $\sum_i m_i = \sum_i m'_i$، حيث $m_i, m'_i \in M_i$ من أجل كل i. عندئذ:

$$m_i - n_i = \sum_{j=i} (n_j - m_j)$$

حيث الطرف الأيسر من هذه العلاقة من M_i، في حين أن الطرف الأيمن هو من $\sum_{i=j} M_j$. وبحسب (3) يكون $m_j - n_j = 0$ أو $m_j = n_j$ من أجل كل j. والآن، بحسب (a) يكون (1) محققا. □

نتيجة 16.6.1: ليكن M_1 و M_2 مودولين جزئيين في R – مودول M. عندئذ $M = M_1 \oplus M_2 \Leftrightarrow M = M_1 + M_2$، و $M_1 \cap M_2 = \langle 0 \rangle$.

البرهان: واضح. □

نتيجة 17.6.1: إذا كان $M = \oplus_{i \in I} M_i$، فإن $M = M_i \oplus (\oplus_{i=j} M_j)$.

البرهان: من النظرية 15.6.1، (b) نجد أن:

$$\sum_{j=i} M_j = \oplus_{j=i} M_j$$

وعندئذ، يصبح المطلوب نتيجة مباشرة للنتيجة 16.6.1. □

ملاحظة: إذا كان $M = M_1 \oplus M_2$، فإننا نقول إن M_1 يتمم M_2، M_2 يُتمم M_1، أو نقول إن M_1 و M_2 متتامان في M. إذا كان $M \supseteq N$ مودولاً جزئياً، فإننا نقول إن N حد مباشر في M إذا وجد مودول جزئي P في M حيث $M = P \oplus N$، أي بحيث يكون N و P متتامين. وهنا يجب أن نلاحظ أنه ليس من الضروري وجود متمم لكل مودول جزئي N في $R-$ مودول M. مثلاً، إذا كان $\mathbb{Z} \ni q, p$، حيث $q, p \neq 0, 1$، فإن $q\mathbb{Z} \cap p\mathbb{Z} \ni pq$، وبالتالي $p\mathbb{Z} \cap q\mathbb{Z} \neq <0>$، ولما كان كل مودول جزئي في $\mathbb{Z}$ هو من الشكل $n\mathbb{Z}$ من أجل n ما في $\mathbb{Z}$، فإن $p\mathbb{Z}(p \neq 0,1)$ ليس من الضروري أن يكون وحيداً. مثلا، إذا أخذنا الفراغ الشعاعي $\mathbb{R}^2$ (فوق $\mathbb{R}$) والفراغات الجزئية:

$$Z = \{(r,r) : r \in \mathbb{R}\} \text{ و } Y = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\} \text{ و } X = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$$

فكل عنصر $\mathbb{R}^2 \ni (x,y)$ يكتب بالشكل:

$$(x,y)=(x,x)+(y,y-x)=(y,y)+(x-y,0)$$

وبالتالي، نجد أن: $\mathbb{R}^2 = Z \oplus X = Z \oplus Y$ ومع ذلك، فإن متممي مودول جزئي إيزومرفيان كما يتبين مما يلي.

نظرية 18.6.1: ليكن M_1 و M_2 مودولين جزئيين متتامين في M. عندئذ $M_2 \cong M/M_1$ و ($M_1 \cong M/M_2$).

البرهان: إن الإسقاط الطبيعي $p_2 : M \to M_2$، المُعرّف بالعلاقة $p_2(m_1+m_2)=m_2$ هو $R-$ هومومرفيزم غامر، نواته هي M_1، إذاً

$$M/\operatorname{Ker} p_2 = M/M_1 \cong p_2(M) = M_2$$

□

1 – 7 المودول الحر

في هذا البند نعطي تعريف المودول الحر لنأخذ فكرة بسيطة عن هذا المفهوم بالقدر الذي يلزمنا في الفصول التالية إلى أن نصل إلى الفصل المخصص لهذا النوع من المودولات.

تعريف 1.7.1: لتكن R حلقة و M R – مودولاً. تسمى المجموعة الجزئية $M \supseteq X$ مرتبطة خطياً فوق R إذا وجدت عناصر مختلفة $x_1,\cdots,x_n$ من X وعناصر $a_1,\cdots,a_n$ من R ليست جميعها أصفاراً و $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$ إذا لم تكن X مرتبطة خطياً، فإنها تسمى مستقلة خطياً.

تعريف 2.7.1: ليكن M R – مودولا و $M \supseteq X$ مجموعة جزئية، تسمى X قاعدة لـــ M إذا كانت:

(1) X تولد M: $M=<X>$.

(2) X مستقلة خطياً.

تعريف 3.7.1: يسمى R – مودول M حراً إذا كان له قاعدة. وبعبارة أخرى، المودول الحر هو كل مودول له قاعدة. وإذا كانت X قاعدة للمودول M، فإن $|X|$ يسمى رنك M ويرمز له بالرمز $\text{rank}(M)$ أو بالرمز $\mu(M)$، أي أن:

$$\mu(M) = \text{rank}(M) = |X|$$

إذا كان $|X| < \infty$، فإننا نقول أن M منتهي الرنك، أو إن M مودول حر ذو رنك محدود، وإلا (أي إذا كان $|X| = \infty$) فإن M يسمى مودولاً حراً ذا رنك لانهائي.

بحسب النظرية 15.6.1، القول إن $X = (x_i)_{i \in I}$ قاعدة لـــ M مكافئ القول إن M مجموع مباشر لأسرة المودولات الجزئية في M، $(Rx_i)_{i \in I}$ حيث $\text{Ann}(x_i) = <0>$ من أجل كل $i \in I$، علما أن:

$$Ann(x) = \{r \in R : \ rx = 0\}$$

أضف إلى ذلك أن $M=\oplus_{i\in I}R_i$ هو R – مودول حر، قاعدته هي $X=(e_i)_{i\in I}$، حيث $R_i=R$ و $e_i=(\delta_{ij})_{j\in I}$. وفي هذه الحالة نقول إن M حر على المجموعة I. وإذا كان M R – مودولاً حراً رنكه n، فإن $M\cong R^n$ حسب الإيزومورفيزم $f:R^n\to M$ المعرف بالعلاقة:

$$f(r_1,\cdots,r_n)=\sum_{i=1}^{n}r_ix_i$$

حيث $(x_1,\cdots,x_n)$ قاعدة لـــ M.

إن ما يهمنا هو النظرية الآتية والتي ستلزمنا في الفصل القادم (انظر النظرية 4.3.2).

ليكن $f:M\to M'$ هومومرفيزم R – مودولات. نرمز بـــ N_f لنواة f وبـــ R_f لصورة f، أي أن $N_f=\mathrm{Ker}(f)$ و $R_f=\mathrm{Im}(f)$. يسمى العدد $\mathrm{rank}(N_f)$ درجة انعدام f ويرمز له بالرمز $\mathrm{null}(f)$، ويسمى العدد $\mathrm{rank}(\mathrm{Im}(f))$ رانك f، ويرمز له بالرمز $\mathrm{rank}(f)$.

نظرية 4.7.1: ليكن $f: M \to M$ هومومرفيزم R – مودولات حرة، ليكن $n = \text{rank}(M)$، عندئذ:

$$n = \text{null}(f) + \text{rank}(f)$$

البرهان: بحسب نظرية الإيزومرفيزم الأولى، لدينا:

$$M/\text{Ker}(f) = M/N_f \cong \text{Im}(f) = R_f$$

لتكن $(x_1, \cdots, x_m)$ قاعدة لـ N_f و $(x_1, \cdots, x_m, \cdots, x_n)$ قاعدة لـ M، وليكن $F = < x_{m+1}, \cdots, x_n >$، عندئذ $F \cong R_f$ و $\text{rank}(R_f) = \text{rank}(F)$. من أجل كل عنصر $x \in M$، لدينا $x = \sum_i a_i x_i$ و

$$x = \left(x - \sum_{i=m+1}^{n} a_i x_i \right) + \sum_{i=m+1}^{n} a_i x_i \in N_f + F$$

لأن $x - \sum_{i=m+1}^{n} a_i x_i \in N_f$.

m n

إذاً، $M = N_f + F$. ليكن $x \in N_f \cap F$ وليكن $x = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i = \sum_{i=m+1}^{n} a_i x_i$، عندئذ:

$$a_1 x_1 + \cdots + a_m x_n - a_{m+1} x_{m+1} - \cdots - a_n x_n = 0$$

و $a_i = 0$ من أجل كل i، لأن $(x_1, \cdots, x_n)$ قاعدة لـــ M، إذاً:

$$\begin{aligned} n = \operatorname{rank}(M) &= (n-m) + m = \operatorname{rank}(F) + \operatorname{rank}(N_f) \\ &= \operatorname{rank}(R_f) + \operatorname{rank}(N_f) \\ &= \operatorname{null}(f) + \operatorname{rank}(f) \end{aligned}$$

كما هو مقرر. □

فرضية 5.7.1: كل R – مودول M هو عامل مودول حر F، وإذا كان M منتهي التوليد، فإنه عامل R – مودول حر منتهي التوليد، ويمكننا أخذ $\mu(F) = \mu(M)$.

البرهان: لتكن $X=(x_i)_{i\in I}$ مجموعة مولدة لـــ M وليكن $F=\oplus_{i\in I}R_i$، حيث $R_i=R$ المودول الحر على مجموعة الأدلة I. تعرف الهومومرفيزم $f:F\to M$ بالعلاقة:

$$f((a_i)_{i\in I})=\sum_{i\in I}a_ix_i$$

بما أن X تولد M، فإن f غامر، وبالتالي $F/\ker(f)\cong M$. نلاحظ أنه إذا كانت $|X|<\infty$، فإن F منتهي التوليد، كما أن $\mu(F)\geq\mu(M)$. لكن F حر على I، وبالتالي $|I|\geq\mu(F)$، وبما أن I تفرق مجموعة مولدات M، فإنه ينتج أن $\mu(M)\geq\mu(F)$ إذا كانت X مجموعة صغرى مولدة لـــ M. لذلك يمكننا أن نأخذ $\mu(F)=\mu(M)$. □