Republic of Iraq Ministry of Higher Education & Research

University of Anbar

College of Education for Pure Sciences

محاضرات الاحصاء ١

مدرس المادة : الاستاذ المساعد

الدكتور فراس شاكر محمود

Distribution of ordered statistic

التوزيعات الاحصائية المرتبة

Let $x_1, x_2, \dots, x_n$ denote a random sample from a distribution of the continuous stype having p.d.f , f(x) which is positive .

Provided $a < x < b$, let y be the smallest of these x_1, y_1 , be the next x_1 in ordesd of magnitude … and x_n the largest x .

1- The order statistic of the random sample $x_1, \dots, x_n$ then the joint p.d.f .

في حالة كون الاشتراك Joint نستخدم القانون في حالة الاشتراك العام

$$g(y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} n!\, f(y_1).f(y_2) \dots f(y_n) & a < y_1 < y_2 < \cdots < y_n < b \\ 0 & o.w \end{cases}$$

من يطلب Joint استخدم هذا القانون أو يذكر

i.i.d⇒ identically independent distribution or statistically indep

بالمعنى العينات مستقلة التوزيع اي يعني المشترك يساوي حاصل ضرب الهامشية

*عندما تكامل دالة الكثافة الاحتمالية يعطي دالة التوزيع وعندما نشتق دالة التوزيع يعطي دالة كثافة الاحتمالية.

* independent identically distribution التوزيع المستقل المائل

2- The marginal p.d.f of any order statistic say y_i

هذا القانون يستخدم في حالة marginal القانون هو

$$g_i(y_i) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!}\,[F(y_i)]^{i-1}[1-F(y_i)]^{n-i}\, f(y_i) & a < y_i < b \\ 0 & o.w \end{cases}$$

حيث ان n! هو حجم العينة sample size يعطى في السؤال و i هو تسلسل الاحصائية يعطى ايضا و $F(y_i)$ تمثل دالة التوزيع (التراكمي) ولكي نجدها نكامل الدالة الاصلية $f(y_i)$ تمثل الدالة الاصلية

$$F(y_i) = \int_0^x f(x)\, du$$

Example :- Let $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$ denote the order statistic of r.v sample size 4 from distribution having p.d.f & $P(\frac{1}{2} < y_3)$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & for \quad 0 < x < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

Solution :-

$$F(x) = \int_0^x f(u)du \Rightarrow \int_0^x 2u\, du \Rightarrow [u^2]_0^x$$

$F(x) = x^2$ الدالة التوزيعية

حجم العينة $n! = 4!$, $i = 3$

$$g_i(y_i) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!}\,[F(y_i)]^{i-1}[1-F(y_i)]^{n-i}\,f(y_i) & a < y_i < b \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$g_3(y_3) = \begin{cases} \dfrac{4!}{(3-1)!\,(4-3)!}\,[{y_3}^2]^{3-1}[1-{y_3}^2]^{4-3}\,2y_3 & a < y_3 < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$g_3(y_3) = \begin{cases} 12\,(y_3)^4(2y_3)[1-{y_3}^2] & a < y_3 < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$g_3(y_3) = \begin{cases} 24\,[{y_3}^5 - {y_3}^7] & a < y_3 < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$P\left[y_3 > \frac{1}{2}\right] = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(y_3)dy_3 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} 24\,({y_3}^5 - {y_3}^7)dy_3 = \frac{243}{256}$$

3- The smallest p.d.f of any order statistic

في حالة طلب الاصغر نستخدم القانون

$$g_1(y_1) = n[1-F(y_1)]^{n-1}.f(y_1) \qquad , \quad a < y_1 < b$$

4- The largest p.d.f of any order statistic

في حالة طلب الاحتمالية الاكبر في القانون

$$g_n(y_n) = n[F(y_n)]^{n-1}.f(y_n) \qquad , \quad a < y_n < b$$

5- هذا القانون يستخدم في حالة التوزيع المشترك لاي قيمتين

$$g_{i.j}(y_i, y_j) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)i}\,[y_i]^{i-1}\,\left[F(y_j)-F(y_i)\right]^{n-i-1}\left[1-F(y_j)\right]^{n-j} f(y_i)\,f(y_j) & for\ a < y_i < y_j < b \\ 0 & o.w \end{cases}$$

حيث n هو حجم العينة الكلي

j الحد الثاني و i الحد الاول

<u>Example</u> :- Let $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$ be the order statistic of R.S of size n=4 from a distribution having a p.d.f $f(x) = 3x^2 \quad 0 < x < 1$

a) Find the Joint $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$

b) Find the p.d.f of y_3

c) Find $P(0.5 < y < 1)$

<u>Solution</u> :-

$$(x) = \int_0^x 3u^2\,du \Rightarrow [u^3]_0^x \Rightarrow F(x) = x^3 \qquad n = 4\ ,i = 3$$

a) Find the Joint $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$

على القانون الاول لان طلب الدالة المشتركة بشكل عام

$$g(y_1, y_2, y_3, y_4) = \begin{cases} 4!\,f(y_1).f(y_2).f(y_3).f(y_4) & a < y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$g(y_1, y_2, y_3, y_4) = \begin{cases} 4!\,3(y_1)^2.(3{y_2}^2).(3{y_3}^2).(3{y_4}^2) & a < y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$g(y_1, y_2, y_3, y_4) = \begin{cases} 1944({y_1}^2).({y_2}^2).({y_3}^2).({y_4}^2) & a < y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

b) Find the p.d.f of y_3

بما انه حدد y_3 ∴ marginal

$$g_i(y_i) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!}\,[F(y_i)]^{i-1}[1-F(y_i)]^{n-i}\,f(y_i) & a < y_i < b \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$g_3(y_3) = \begin{cases} \dfrac{4!}{(3-1)!\,(4-3)!}\,[y_3{}^3]^{3-1}[1-y_3{}^3]^{4-3}\,2\,y_3{}^2 & a < y_3 < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$g_3(y_3) = \begin{cases} 12\;3(y_3)^2(y_3)^6[1-y_3{}^3] & a < y_3 < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$g_3(y_3) = \begin{cases} 36\,[y_3{}^8 - y_3{}^{11}] & a < y_3 < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

c) Find $P(0.5 < y_1 < 1)$

بما انه طلب الاحتمالية الاقل ∴ الاصغر

$$g_1(y_1) = n[1-F(y_1)]^{n-1}.f(y_1)$$

$$g_1(y_1) = 4[1-(y_1)^3]^{4-1}.(3y_1{}^2)$$

$$g_1(y_1) = 12y_1{}^2[1-(y_1)^3]^3$$

$$P[0.5 < y_1 < 1] = \int_{0.5}^{1} y(y_1)dy_1 = \int_{0.5}^{1} 12y_1{}^2\,(1-y_1{}^3)^3\,dy_1$$

$(1-y_1{}^3)^3$ على نظرية ذات الحدين $(a \pm b)^n$

$$(a \pm b)^n = C_0^n(a)^n(\pm b)^0 + C_1^n(a)^{n-1}(\pm b)^1 + \cdots + C_i^n(a)^{n-i}(\pm b)^i$$

$$(1-y_1{}^3)^3 = C_0^3(1)^3(-y_1{}^3)^0 + C_1^3(1)^2(y_1{}^3)^1 + C_2^3(1)^1(-y_1{}^3)^2$$

$$(1-y_1{}^3)^3 = 1 - 3y_1{}^3 + 3y_1{}^6 - y_1{}^9$$

$$\therefore \int_{0.5}^{1} 12y_1{}^2\,[1-3y_1{}^3+3y_1{}^6-y_1{}^9]dy_1$$

$$= \int_{0.5}^{1} (12y_1{}^2 - 36y_1{}^5 + 36y_1{}^8 - 12y_1{}^{11})\,dy_1$$

$$= [4y_1{}^3 - 6y_1{}^6 + 4y_1{}^9 - y_1{}^{12}]_{0.5}^{1}$$

$$= [(4-6+4-1) - (4(0.5)^3 - 6(0.5)^6 + 4(0.5)^9 - (0.5)^{12})]$$

$$= 0.58618164062$$

Example :- $x_1, x_2, x_3 \sim U(0,1)$ find the p.d.f of $z_1 = y_3 - y_1$ & find $f(y_1, y_3)$.

Solution :- n=3 Because x_1, x_2, x_3

$i = 1 \quad , \quad j = 3$ Because $f(y_1, y_3) = y_{i,j}$

$$x \sim U(0,1) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

Since $x_1, x_2, x_3 \sim U(0,1)$

$$f(y_1) = \begin{cases} 1 & 0 < y_1 < 1 \\ 0 & o.w \end{cases} \quad , \quad f(y_3) = \begin{cases} 1 & 0 < y_3 < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

نجد الدالة التوزيعية

$$F(x) = \int_0^x (1)\, du \Rightarrow F(x) = [u]_0^x \Rightarrow F(x) = x$$

$$\therefore F(y_1) = y_1 \quad , \quad F(y_3) = y_3$$

$$g_{i.j}(y_i, y_j) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)i} [y_i]^{i-1} \left[F(y_j) - F(y_i)\right]^{n-i-1} \left[1 - F(y_j)\right]^{n-j} f(y_i)\, f(y_j) & for\ a < y_i < y_j < b \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$g_{i.j}(y_i, y_j) = \begin{cases} \dfrac{3!}{(1-1)!\,(3-1-1)!\,(3-3)i} [y_1]^{1-1}\, [y_3 - y_1]^{3-1-1} [1 - y_3]^{3-3} (1)(1) & \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$f(y_1, y_3) = 3!\ [y_1]^0 [y_3 - y_1]^1 [1 - y_3]^0\ .(1)(1) \quad , \quad 0 < y_1 < y_3 < 1$$

$$f(y_1, y_3) = 6[y_3 - y_1]$$