المحاضرة الثالثة (3)

المشتقات الاقتصادية لدالة الانتاج

أستاذ المادة

د. ماجد عبد حمزة الداودي

المشتقات الاقتصادية لدالة الانتاج

لدالة الانتاج بعض المشتقات الاقتصادية التي يمكن للاقتصادي الاستفادة منها في مجال اتخاذ القرارات لزيادة الموارد الطاقة للعملية الانتاجية او التقليل منها .

1- الناتج المتوسط Average product (AP) :

هو نسبة المخرجات الى المدخلات اي حاصل قسمة الناتج الكلي على وحدات المورد المتغير X

$$= \frac{f(X)}{X}$$

$$AP=\frac{Y}{X}$$

ولتحقيق اكبر قيمة لمتوسط الانتاج يتحقق من خلال المشتقة الاولى لمتوسط الانتاج

$$\frac{\partial AP}{\partial x} = \frac{x_1 f(x_1) - f(x_1)}{x_1^2} = 0$$

وتستخدم الناتج المتوسط عموماً لقياس مدى كفاءة efficient الموارد المتغير المستخدم في العملية الانتاجية اذ تزداد كفاءة الموارد في بداية العملية الانتاجية وينعكس ذلك على تزايد منحنى الناتج المتوسط بمعدل اسرع الى نقطة معينة ثم يستمر الناتج المتوسط في الارتفاع ولكن بمعدل اقل مشيراً الى أن كفاءة المورد وأن كانت مازالت مرتفعة فأنها ليست كسابقاتها حتى يصل الناتج المتوسط الى اقصاه قم تبدأ كفاءة الموارد المتغيرة في التناقص مما ينعكس على منحنى الناتج المتوسط .

2- الناتج الحدي (MP) Marginal production :

يعرف بأنه الزيادة في الناتج الكلي الراجعة الى زيادة في كمية المورد المتغير بوحدة واحدة . اي ان:-

$$MP = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial TP}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f(x/y)}{\partial x}$$

فاذا كانت لدينا الدلة الاتية:-

TP=2X

فأن

$$MP = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$$

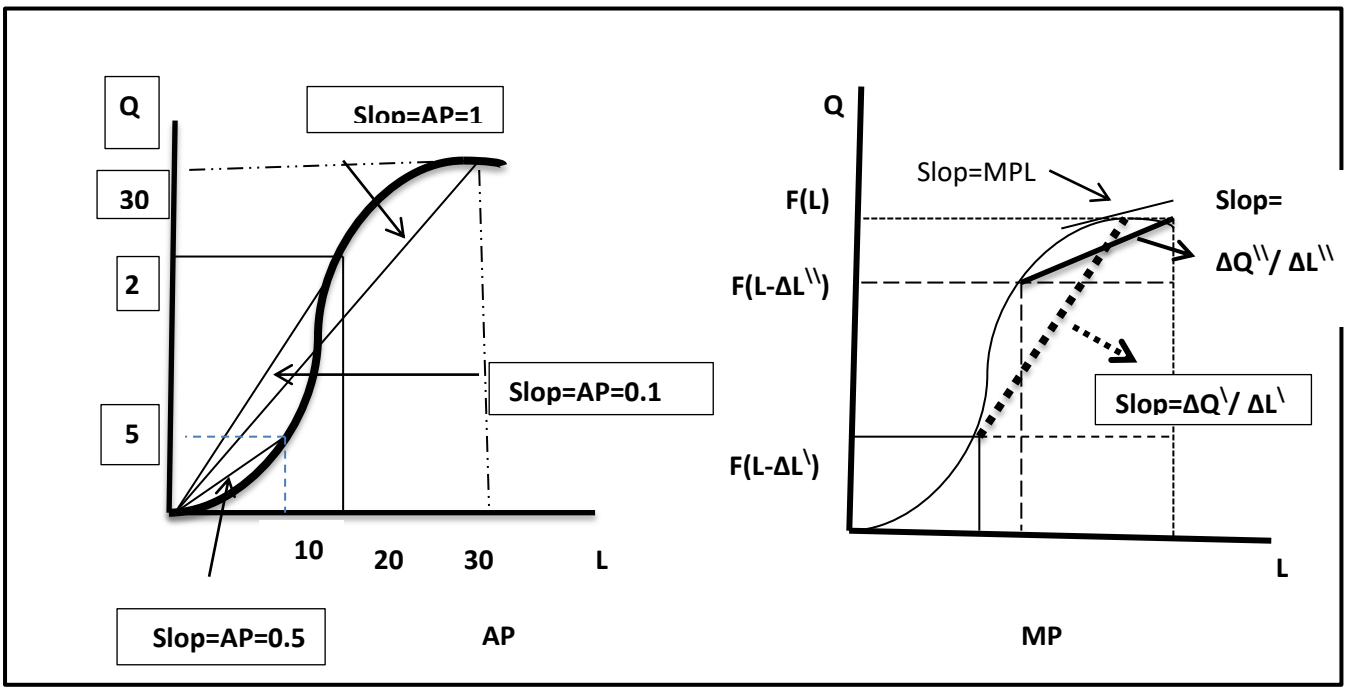
$$AP = \frac{y}{x} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\therefore MP = AP$$

*الجدول التالي يبين كيفية ايجاد كل من AP ,MP

X	Y	AP	MP
0	0	-	-
1	33	33	33
2	74	37	41
3	111	37	37
4	132	33	21

*ويمكن توضيح AP , MP من خلال المنحنى التالي :



التعظيم والتدنية Maximization & Minimization

في حالة الدوال ذات المتغير الواحد Y=f(X)

يوجد شرطان للحصول على قيمة التعظيم والتدنية :

1- **الشرط الاساسي Necessary Condition** وفيه يجب ان تكون المشتقة الاولى عند تلك القيمة (الحدية) Stationary تساوي صفر.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(^{/}X) = 0$$

2- **الشرط الكافي Sufficient Condition** وفيه يجب ان تكون المشتقة الثانية .

أ- سالبة اذا كانت قيمة Y هي الكبرى

$$\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{d^2y}{dx^2} = f^{//}(X)<0$$

ب- موجبة اذا كانت قيمة Y هي الصغرى $f^{//}(X)> 0$

- واذا كانت المشتقة الاولى ثابتة والثانية تساوي صفر يعني ان الدالة في نقطة انقلاب .
- المشتقة الثانية لدالة الانتاج هي بمثابة المشتقة الاولى لدالة الانتاج الحدي والقيمة الموجبة لهذه المشتقة تعني ان الناتج الحدي في تزايد والعكس صحيح المشتقة الثانية لدالة الانتاج $\frac{d^2y}{dx^2}$ هي عبارة عن انحناء او تحدب او تقعر باتجاة نقطة الاصل وهي مشتقة الثانية لدالة الانتاج .
- اذا كانت المشتقة الثالثة موجبة تعني ان الناتج الحدي متزايد بمعدل متزايد او يتناقص بمعدل متناقص.

اما اذا كانت سالبة فان الناتج الحدي يتزايد بزيادات متناقصة او يتناقص بمعدل متزايد .

اذا كانت صفر فان الناتج الحدي MP ذو ميل ثابت وغير منحني .

مرونة الانتاج Elasticity of Production

تستخدم مرونة الانتاج لتقدير درجة استجابة الناتج الكلي y للتغيرفي المورد المتغير اي هو عبارة عن التغير النسبي في المتغير التابع y مقسوماً على التغير النسبي في المتغيير X

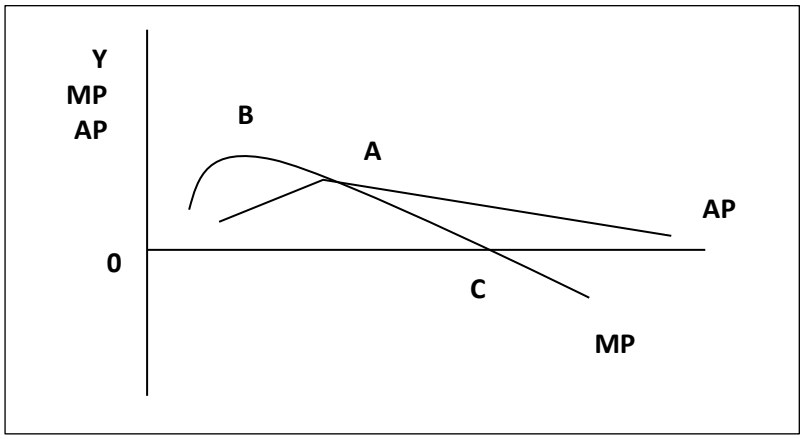
$$EP = \frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} \text{ or } \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta X}{X}} \text{ or } \frac{\Delta y}{y} * \frac{x}{\Delta X} \text{ or } \frac{\Delta y}{\Delta x} * \frac{X}{y}$$

ان الوحدة الاخيرة المضافة من العنصر X تؤدي الى زيادة في الانتاج اكبر من متوسط الانتاج لاي وحدة من العنصر والعكس صحيح .

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = MP \qquad \frac{X}{Y} = \frac{1}{AP}$$

$$EP = \frac{MP}{AP}$$

$$E = \frac{\Delta y}{\Delta x}.\frac{X}{Y} = MP.\frac{1}{AP} = \frac{MP}{AP}$$



1- اذا كان $AP < MP$ فان $1 < E$ نقطة B
2- اذا كان $AP = MP$ فان $1 = E$ نقطة A
3- اذا كان $AP < MP$ فان $0 < E < 1$ المنطقة المحمورة بين A,C
4- اذا كان $MP = 0$ فان $E = 0$ نقطة C (تعظيم الناتج MP=0)
5- اذا كان MP < 0 فأن E سالبة.

ماهي مرونة الانتاج كيف

$$Y = a \quad x$$

$$Y = ax^{0.5}$$

$$AP = ax^{-0.5}$$

$$MP = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.5ax^{-0.5}$$

$$EP = \frac{MP}{AP} = \frac{0.5ax^{-0.5}}{ax^{-0.5}} = 0.5$$

$$Y = ax^{b} \rightrightarrows P = b$$

او

$$EP = \frac{MP}{AP} = \frac{abx^{b-1}}{ax^{b-1}} = b$$

س/ افرض ان دالة الانتاج هي :

$$y = 0.4x + 0.08x^2 - 0.003x^3$$

قيمة جد EP, AP, MP عندما $x = 21$

المصادر

1-Ronald , D.K. 1981. Farm Management . McGraw-Hill book co. Tokyo

2-Sampath , R.K. 1979. Nature and measurement of efficiency. Indian Journal of Agricultural Economics. Vol. XXXIV, No.2.

–عطية ، عبد القادر محمد. 2000. الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق. الجزء الثاني. الطبعة الثانية. كلية التجارة. جامعة الإسكندرية.

6–الجو مرد ، أثير عبد الجبار. 1988. مقدمة في الرياضيات الاقتصادية. مديرية دار الكتب للطباعة . جامعة الموصل. ص 129.