

## أمثلة رياضية

إذا علمت أن دالة إنتاج دجاج اللحم بالنسبة للعلف تأخذ الشكل الآتي:

$X$  = كمية الإنتاج اللحم .  $Q$  = الكمية المستخدمة من العلف.

$$Q=0.5X+0.11X^2-0.02X^3$$

المطلوب 1- حساب كمية العلف التي تحقق أعظم ربح للمنتج ، إذا علمت بأن سعر كيلو غرام اللحم (1500) دينار ، وسعر كيلو غرام العلف ( 600 ) دينار.

2- تحديد كمية العلف التي تحقق أكبر إنتاج للمنتج.

الحل

يتحقق أقصى ربح عندما تتساوى قيمة الناتج الحدي (  $VMP$  ) مع سعر المورد الإنتاجي (  $P_X$  )

$$VMP = P_X$$

حيث أن قيمة الناتج الحدي (  $VMP$  ) هي عبارة عن حاصل ضرب الناتج الحدي (  $MP$  ) مضروباً في سعر وحدة الإنتاج (  $P_Q$  )

$$MP \cdot P_Q = P_X$$

نستخرج الناتج الحدي باشتقاق الدالة

$$MP = dQ/dX = 0.5 + 0.22X - 0.06X^2$$

$$VMP = MP \cdot P_Q = (0.5 + 0.22X - 0.06X^2) * 1500$$

$$= 750 + 330X - 90X^2$$

$$VMP = P_X$$

$$750 + 330X - 90X^2 = 600$$

$$90X^2 - 330X - 150 = 0$$

تحل بالدستور

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-330) \pm \sqrt{108900 - 4(90)(-150)}}{2(90)}$$

$$= \frac{330 \pm \sqrt{108900 + 54000}}{180} = \frac{330 \pm \sqrt{162900}}{180}$$

$$= \frac{330 + 403.6}{180}$$

X=4.07 kg      علف

اذن يستخدم 4.07 كغم علف في الوجبة ، إذا عوضنا 4.07 في الدالة ممكن ان نعرف كمية الانتاج.

اي إذا عوضنا 4.07 في الدالة الأساسية لمعرفة وزن الطير ونضرب في سعر الإنتاج نستخرج قيمة الإنتاج وإذا طرحنا منها حاصل ضرب كمية العلف في سعر كغم العلف (الكلفة) نحصل على الربح .

عندما يتساوى سعر كغم العلف مع قيمة كغم اللحم نتوقف لأن بعد ذلك نقوم بإضافة علف أكثر من قيمة اللحم التي يعطيها الطير.

2- أعلى إنتاج يتحقق عندما  $MP=0$

$$0.5+0.22X-0.06X^2=0$$

$$0.06X^2-0.22X-0.5=0$$

$$X = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} / 2a$$

$$= 0.22 \pm \sqrt{0.0484 + 0.12} / 0.12 = 0.22 \pm \sqrt{0.1684} / 0.12 = 0.22 + 0.410 / 0.12$$

$$= 5.25 \text{ كغم}$$

## مبدأ الإحلال والاستبدال

عندما تكون لدينا عدة عناصر إنتاج تساهم في إنتاج منتج معين فأننا نطمح إلى تحقيق مستوى معين من الإنتاج في ظل ميزانية محددة من التكاليف ، هذه الميزانية يتم توزيعها لشراء كميات من عناصر الإنتاج لغرض استخدامها لذلك المنتج وعندما تكون الميزانية مفتوحة ولا توجد قيود عليها فعلينا أن نشتري من كل عنصر من عناصر الإنتاج إلى المستوى الذي يجعل قيمة ناتجه الحدي متساوية إلى سعر.

$$VMP_{X1} = P_{X1}$$

$$VMP_{X1} / P_{X1} = 1 \quad \text{عبارة أخرى}$$

لكن في الغالب وهو الحال العمومية لا يستطيع مدير المزرعة بلوغ هذا المستوى لكل عناصر الإنتاج بسبب القيود الموضوعة على ميزانية تكاليفه (رأس المال المتوفّر لديه) لشراء عناصر الإنتاج.

في مثل الحالة يقع على مدير المزرعة أن يصل إلى نسبة متساوية لكل عناصر الإنتاج بين ناتجها الحدي وسعرها، بمعنى:

$$VMP_{X1}/P_{X1} = VMP_{X2}/P_{X2} = VMP_{X3}/P_{X3} = \dots = VMP_{Xn}/P_{Xn}$$

بما ان  $P_Q \cdot MP^* = VMP_X$  اذن عامل مشترك فيكون:-

$$MP_{X1}/P_{X1} = MP_{X2}/P_{X2} = MP_{X3}/P_{X3} = \dots = MP_{Xn}/P_{Xn}$$

للمنتج هدفان أما أعظم إنتاج في ظل ميزانية تكاليف محددة وهو السائد أو أدنى كلفة في ظل إنتاج محدد.

لتحديد أعظم إنتاج ممكن في ظل ميزانية تكاليف محددة.

**مثال**

إذا علمت بأن دالة إنتاج الحليب الشهي لحصيرة أبقار تحتوي على (25) بقرة حلوب كانت كالتالي:-

$$Q = 6X_1^{0.2} X_2^{0.7}$$

$Q$ =كمية إنتاج الحليب الشهي

$X_1$ =كمية العلف الأخضر المستخدم شهرياً (بالكغم)

$X_2$ =كمية العلف المركز المستخدم شهرياً (بالكغم)

$X_1$ =كمية العلف الأخضر المستخدم شهرياً (بالكغم)

$P_{X1}$ =سعر كغم العلف الأخضر = (10) دينار

$P_{X2}$ =سعر كغم العلف المركز = (200) دينار

المتوفر لدى المربى لإنفاق على هذه الحصيرة (600) ألف دينار ، علماً أن سعر كغم الحليب (100) دينار.

ما هي كمية العلف الأخضر والمركز التي توصي المربى باستخدامها لتحقيق أعظم إنتاج ممكن من الحليب؟

**الحل**

لتحديد مستويات عناصر الإنتاج التي ستحقق أعظم مستوى إنتاج للمربي في ظل قيد ميزانية التكاليف نحددها بمساواة

$$MP_{X1}/P_{X1} = MP_{X2}/P_{X2}$$

وباستخدام ميزانية التكاليف

$$P_{X_1} * X_1 + P_{X_2} * X_2 = 600000$$

من دالة الإنتاج نحسب  $MP_{X_1}$  &  $MP_{X_2}$

$$MP_{X_1} = dQ / dX_1 = 1.2 X_1^{-0.8} * X_2^{0.7}$$

$$MP_{X_2} = dQ / dX_2 = 4.2 X_1^{0.2} * X_2^{-0.3}$$

نطبق العلاقة

$$MP_{X_1} / P_{X_1} = MP_{X_2} / P_{X_2}$$

$$MP_{X_1} / MP_{X_2} = P_{X_1} / P_{X_2}$$

$$1.2 X_1^{-0.8} * X_2^{0.7} / 4.2 X_1^{0.2} * X_2^{-0.3} = 10/200$$

$$1.2X_2 / 4.2X_1 = 10/200$$

$$240X_2 = 42X_1$$

$$X_1 = 240X_2 / 42$$

نعرض هذا في معادلة ميزانية التكاليف

$$10X_1 + 200X_2 = 600000$$

$$10(5.71X_2) + 200X_2 = 600000$$

$$57.1X_2 + 200X_2 = 600000$$

$$257.1 X_2 = 600000$$

$$X_2 = 2333.72$$

اذن يشتري (2.333) طن من العلف المركز شهرياً للحصيرة

نعرض عن قيمة  $X_2$  لاستخراج كمية العلف الأخضر

$$5.71 * 2333.72 = 13325.5$$

ولتحديد مستوى الإنتاج الذي يتحقق للمنتج نقوم بالتعويض عن كميات عناصر الإنتاج التي حسب أعلاه ( $X_1 * X_2$ ) في معادلة الإنتاج الأصلية لاحتساب كمية الإنتاج. (أي معرفة الإنتاج الشهري من الحليب):-

$$Q = 6X_1^{0.2} * X_2^{0.7}$$

$$= 6(13325.5)^{0.2} * (2333.72)^{0.7}$$

$$= 6(6.68) * (227.842)$$

$$= 9131.9 \text{ كغم حليب شهرياً}$$

ولمعرفة إنتاج البقرة الواحدة من الحليب نقسم على (25)

$$9131.9 / 25 = 365.1 \text{ كغم إنتاج البقرة الواحدة شهرياً}$$

$$365.1 / 30 = 12 \text{ كغم إنتاج البقرة في اليوم الواحد}$$