التبادل Permutation:

يقصد بها عدد طرق الاختيار المرتب التي يمكن تكوينها من عدة أشياء يأخذها كلها أو بعضها ويرمز له (nρr) أي تبادل r من n وقانونه هو:

$$n\rho r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: - إذا كان لدينا أربعة حروف A,B,C,D واختير منها حرفان فما هي عدد الطرق التي يمكن بها اختيار هذين الحرفين؟

<u>الحل:</u> n = 4   r = 2

$$n\rho r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1} = 12$$

أي ان الطرق = 12

التوافيق Combination:

وهي عدد طرق الاختيار غير المرتب التي يمكن تكوينها من عدة أشـياء بأخذها كلها أو بعضـها ويرز له nCr أو $\binom{n}{r}$ وقانونه هو:

أي ان الترتيب في حالة التوافيق غير مهم $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

مثال: - ما عدد طرق الاختبار التي يمكن الحصول عليها لاختيار لجنة مؤلفة من (5) اشخاص من مجموع (9) اشخاص؟

الحل: - لاحظ بأن ترتيب الأشـخاص هنا غير ضـروري لان اختيار عمرو قبل زيد أو العكس هي نتيجة واحدة.

$$\therefore \binom{9}{5} = \frac{9!}{5!(9-5)!} = \frac{9!}{(5!)(4!)} = 126$$

ملاحظة

- أداة الربط $\left(\frac{and}{و}\right)$ تعني عملية التقاطع وتعني الضرب.
- أداة الربط $\left(\frac{أو}{or}\right)$ تعني عملية الاتحاد وتعني الجميع .

هذا وهناك قاعدتان أساسيتان يعتمد عليها كل من التبادل والتوافيق وهما:

1- إذا كان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E_1 هو n وان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E_2 هو m وكان E_1 وE_2 حادثان متنافيان فإن عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E_1 وE_2 هو (n+m) من الطرق.

2- إذا كان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E_1 هو n وان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E_2 هو m وكان E_1 وE_2 حادثان مستقلان فإن عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادث E_1 وE_2 هو (nm) من الطرق.

مثال: - صندوق به 6 كرات حمراء و4 سوداء و2 بيضاء فبكم طريقة يكن اختيار (5) كرات بحيث تكون 3 منها حمراء و2 سوداء؟

الحل:

عدد طرق اختيار 3 كرات حمراء $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times3\times2\times1} = 20$

عدد طرق اختيار 2 كرة سوداء $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1} = 6$

∴ عدد الطرق لاختيار (3) كرات حمراء و (2) سوداء هو $\binom{6}{3}\binom{4}{2} = (20)(6) = 120$ طريقة

قوانين الاحتمال Laws of Probability:

لقد وضعت القوانين التالية لتسهيل حساب درجة الاحتمال عند وقوع حادثين أو أكثر بدلاً من ايجادها عن طريق تعريف الاحتمال.

وقبل شرح قوانين الاحتمالات نفرض ان هناك حادثان E_1 وE_2 فالتعابير التالية يقصد بها ما يلي:

$\rho(E_1 + E_2)$: - احتمال وقوع الحدث E_1 أو الحدث E_2 (أي احتمال وقوع أياً منهما فقط).

$\rho(E_1 E_2)$: - احتمال وقوع الحادث E_1 و الحادث E_2 معاً.

$\rho(E_2 / E_1)$: - احتمال وقوع أو حدوث E_2 علماً بأن الحادث E_1 قد وقع ويسمى بالاحتمال الشرطي.

وهناك قانونان مهمان في حساب درجة الاحتمال وهما:

قانون الجمع The Addition Law

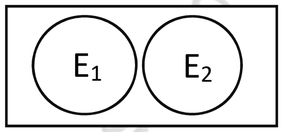
قانون الضرب The Multiplication Law

قانون الجمع The Addition Law:

1- إذا كانت الاحداث متنافية: -
ويقصد بها الحوادث التي يستحيل حدوثها في آن واحد.

وينص قانون الجمع على انه إذا كان E_1 وE_2 حادثان متنافيان فإن احتمال ظهور الحادث E_1 وE_2 هو مجموع احتمال حدوث كل منهما منفرداً أي:

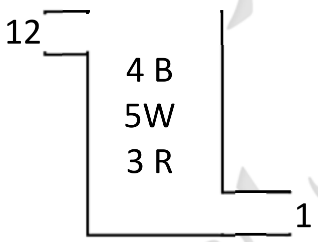
$$\rho\,(E_1 \text{ or } E_2) = \rho\,(E_1) + \rho(E_2)$$



$$\rho\,(E_1 + E_2 + \ldots + E_n) = \rho(E_1) + \ldots + \rho(E_n)$$

مثال: صندوق يحتوي على 4 كرات سوداء و5 كرات بيضاء و3 كرات حمراء فإذا سحبت كرة واحدة فما هو احتمال ان تكون إما سوداء أو بيضاء؟

<u>الحل:</u>

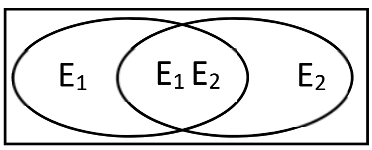


$$\rho\,(B \overset{or}{+} W) = \rho(B) + \rho(W)$$

$$= \rho(B+w) = \frac{4}{12} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12}$$

2- إذا كانت الاحداث غير متنافية:
إذا كان E_1 وE_2 حادثان غير متنافيان فإن احتمال حدوث أي منهما هو: حاصل جمع احتمال كل منهما ناقص احتمال حدوثهما معاً أي:

$$\rho(E_1 + E_2) = \rho(E_1) + \rho(E_2) - \rho(E_1E_2)$$



مثال: في احدى الكليات 25% من الطلبة رسب بالرياضيات (M) و15% من الطلبة رسب في الكيمياء (C) و10% رسب في كلا الرياضيات والكيمياء. فإذا انتخب طالب منهم عشوائياً فما هو احتمال ان يكون راسب في الرياضيات والكيمياء؟

الحل:

$$\rho(M \overset{\text{أو}}{+} C) = \rho(M) + \rho(C) - \rho(M.C)$$

$$= 0.25 + 0.15 - 0.10$$

$$\therefore \rho(M+C) = 0.30$$

مثال: اذا كان احتمال إصابة المحصول من قبل الآفة الزراعية A هو $\frac{3}{4}$ بينما احتمال إصابة المحصول من قبل الآفة الزراعية B هو $\frac{2}{3}$ فما هو احتمال إصابة هذا المحصول اذا تعرض لكلا الآفتين؟

الحل: $\rho(B) = \frac{2}{3}$ ، $\rho(A) = \frac{3}{4}$

بما ان الحادثين غير متنافيين لأنه من الممكن إصابة المحصول من قبل كل منهما لذا فإن احتمال إصابة المحصول بكلا الآفتين هو: -

$$\rho(A \overset{or}{+} B) = \rho(A) + \rho(B) - \rho(A.B)$$

$$= \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) - \frac{6}{12}$$

$$= \rho(A+B) = \frac{11}{12}$$

قانون الضرب The Multiplication Law:

1- عندما تكون الحوادث مستقلة:

وهي الحوادث التي لا يؤثر ظهور أحدها على نتيجة ظهور الحوادث الأخرى. فإذا كان E_1 وE_2 حادثان مستقلان. فإن احتمال حدوثهما معاً هو:

$$\rho(E_1 \text{and } E_2) = \rho(E_1) \times \rho(E_2)$$

مثال: عند رمي قطعتي نقود. ما هو احتمال الحصول على صورة في كليهما؟

الحل: نرمز لاحتمال الحصول على الصورة من قطعة النقود الأولى $\rho(H_1)$.

نرمز لاحتمال الحصول على الصورة من قطعة النقود الثانية $\rho(H_2)$.

$$\therefore \rho(H_1\ H_2) = \rho\ (H_1) \times \rho(H_2) = (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4}$$

2- عندما تكون الاحداث غير مستقلة.

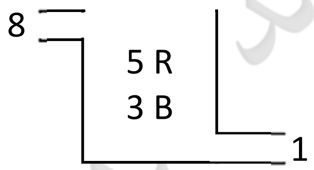
إذا كان E_1 وE_2 حادثان غير مستقلين فإن احتمال حدوثهما معاً هو:

$$\rho\ (E_1 \text{ and } E_2) = \rho\ (E_1) \times\ \rho(E_2/E_1)$$

حيث أن: E_2/E_1: احتمال ظهور الحادث E_2 علماً بان الحادث E_1 قد حدث.

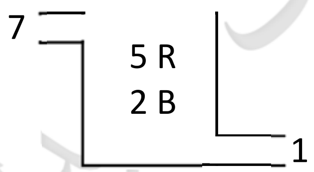
مثال: صندوق فيه 5 كرات حمراء و3 سوداء فإذا سحبت كرتان سوية (أو سحبت كرتان على التوالي بدون ارجاع الكرة الأولى الى الصندوق) ما هو احتمال ان تكون كلتاهما سوداء؟

<u>الحل</u>: احتمال الحصول على كرة سوداء في السحبة الأولى هو:



$$\rho\ (B_1) = \frac{3}{8}$$

أما في السحبة الثانية (بدون ارجاع الكرة المسحوبة الى الصندوق) فإن احتمال ان تكون الكرة سوداء هو:



$$\rho\ (B_2/B_1) = \frac{2}{7}$$

$$\therefore\ \rho\ (B_1B_2) = \rho(B_1) \times \rho(B_2/B_1)$$

$$= \frac{3}{8} \times \frac{2}{7}$$

$$\therefore\ \rho\ (B_1\ B_2) = \frac{6}{56}$$

امثلة وتمارين:

1- مثال: اذا كان عدد أسئلة امتحان الرياضيات 8 أسئلة والمطلوب الإجابة على 6 أسئلة بكم طريقة يمكن ان يجيب الطالب في الحالات:

أ- للطالب حرية الاختيار كل سؤال تشمله عملية الاختيار.

ب- شرط الإجابة على سؤالين من الثلاثة الأولى.

ت- شرط الإجابة على السؤال الرابع (سؤال معين).

أ- $nCr = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$$\binom{8}{6} = \frac{8!}{6!(8-6)!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{6\times5\times4\times3\times2\times1\ \times2\times1} = 28$$ طريقة

ب- $nCr = \binom{3}{2}\binom{5}{4} = \left(\frac{3!}{2!(3-2)!}\right)\left(\frac{5!}{4!(5-4)!}\right) = \left(\frac{3\times2\times1}{2\times1\times1}\right)\left(\frac{5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times1}\right)$

$\therefore \binom{3}{2}\binom{5}{4} = 3 \times 5 = 15$ طريقة

ت- $nCr = \binom{1}{1}\binom{7}{5} = \left(\frac{1!}{1!(1-1)!}\right)\left(\frac{7!}{5!(7-5)!}\right) = \left(\frac{1}{1\times1}\right)\left(\frac{7\times6\times5!}{5!\ \times2\times1}\right)$

$\therefore \binom{1}{1}\binom{7}{5} = 1 \times 21 = 21$ طريقة

مثال: صندوق فيه 10 كرات حمراء(R) و6 كرات بيضاء(W). سحبت منه 4 كرات معاً من دون ارجاع.

جد عدد طرق وقوع كل من الاحداث الآتية:

1- أن تكون الكرات المسحوبة من نفس اللون (أي 4 حمراء أو 4 بيضاء).

2- ان تكون كرتين بيضاء وكرتين حمراء.

16
R 10
W 6
4

عدد الطرق $\quad nCr = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$R4 \overset{\text{أو}}{or} W4 = {}_{10}C4 + {}_{6}C4 = \binom{10}{4} + \binom{6}{4}$

$= \frac{10!}{4!(10-4)!} + \frac{6!}{4!(6-4)!}$

$= \frac{10\times9\times8\times7\times6!}{4\times3\times2\ \times6!} + \frac{6\times5\times4!}{4!\ \times2\times1} \quad = 33$