مبادئ نظرية الاحتمال: Elementary probability theory

ان نظرية الاحتمال تلعب دورا هاما في نظريات وتطبيقات علم الإحصاء، ونظرية الاحتمال تعنى بدراسة التجارب العشوائية.

مصطلحات وتعاريف:

1-التجربة العشوائية: The random experiment:

هي التجربة التي لا يمكن معرفة نتيجتها لخضوعها لقوانين الاحتمال، أن رمي زار الطاولة هي تجربة عشوائية، لان النتائج الممكنة لهذه التجربة تخضع لقوانين الاحتمال، وإذا اراد كيمياوي ان يقدر كمية الزيت في بذور القطن فان العينة التي سيبني تقديره عليها والنتائج التي سيحصل عليها ستخضع لقوانين الاحتمال ولهذا فان هذه التجربة عشوائية.

2-فضاء العينة Sample space:

فضاء العينة هو مجموعة من النقاط تمثل جميع النتائج الممكنة لتجربة ما حيث، أن كل نتيجة Out come تمثل بنقطة Point او عنصر Element في فضاء العينة، فعند رمي قطعة نقود متزنة عشوائياً ولمرة واحدة فان فضاء العينة يكون من نتيجتين ممكنتان: H وT اي صورة وكتابة.

3-الحادث (الحدث) The event:

هو نقطة او عدة نقاط في فضاء العينة ويرمز له (E)، فالحصول على الصورة (H) من رمي قطعة نقود مرة واحدة يسمى حدثا وهو يتكون من نقطة واحدة من مجموعة نقاط فضاء العينة [H, T]

4-الحوادث المتنافية (المستبعدة): Mutually exclusive) events:

يقال عن الحدثين، E_2E_1 انهما متنافيان (مستبعدان أي ان أحدهما يبعد الاخر) إذا استبعد حدوثهما معنا، فمثلاً عند رمي قطعة نقود فمن المستحيل الحصول على صورة وكتابة في نفس الوقت.

5-الحوادث المستقلة: Independent events:

هي الحوادث التي إذا وقع أحدها لا يمنع او يؤثر على وقوع الاحداث الاخرى فمثلاً عند رمي قطعتي نقود فالحصول على الصورة من القطعة الأولى لايؤثر في نتيجة القطعة الثانية.

6-الحوادث غير المستقلة: Non independent events:

هي الحوادث التي إذا وقع أحدها يؤثر في وقوع الأحداث الأخرى. فمثلاً في حالة صندوق به كرات بيضاء وسوداء فعند سحب كرتان على التوالي بحيث لا تعاد الكرة الأولى فان نتيجة السحبة الثانية تتاثر بنتيجة السحبة الاولى لذا فالحادثان غير مستقلين.

7-الحالات الممكنة: Possible cases:

Dr. Ahmed Shehab

هي الحالات المختلفة التي يمكن أن تظهر في تجربة معينة، فعند رمي قطعة النقود فعدد الحالات الممكنة هنا حالتين (صورة او كتابة) وعند رمي زهرة النرد فعدد الحالات هي (6) حالات.

8-الحالات المواتية:

هي الحلات التي تحقق ظهور الحادث المراد دراسته وتسمى ايضا بحالات النجاح، فمثلاً عند رمي زهر الطاولة فاذا كان الحادث هوالحصول على عدد زوجي فالحالات التي تتحقق ظهور هذا الحادث هي الحصول على (2،4،6) فهذه الحالات الثلاثة تسمى الحالات المواتية.

9-الحالات المتماثلة:

هي الحالات المتكافئة والمتساوية في اماكنية حدوثها عند رمي قطعة النقود فان الظروف المهيئة للحصول على أي وجه (صورة، كتابة) تكون متكافئة فيقال بان الحالتين اللتان تنتج عن تجربة رمي قطعة النقود حالتان متماثلتان.

10 -مضروب n (n Factorial)

مضروب n (ويرمز له n!) ويعرف بانه:

$$n! = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 1$$

فمثلا مضروب 5! هو.

$$n! = 5\,(4)\,(3)\,(2)\,(1) = 120$$

11-التباديل: Permutation

ويقصد بالتباديل بأنها عدد طرق الاختيار المرتب التي يمكن تكوينها من عدد أشياء بأخذها كلها أو بعضها ويرمز لها ب npr أي تباديل r من n وقانونه هو

$$npr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: إذا كان لدينا اربعة حروف هي (ABCD) ونريد ان نعمل تشكيلة مكونة من حرفين فقط من الاربعة حروف اعلاه، فما هو عدد الطرق التي يمكن اختيارها لهذين الحرفين؟

الحل:

$$4P2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 12$$

أي أن عدد الطرق = 12 وهي:

AB, AC, AD, BC, BD, CD, BA, CA, DA, CB, DB, DC

Dr. Ahmed Shehab

حيث إن كلا منهما يمثل ترتيبا مختلفة للحروف، فهنا مثلا ترتيب الحرفين بطريقة AB يختلف عن طريقة الترتيب BA وهكذا في ترتيب بقية الحروف.

حالة وجود المجموعات المتشابهة:

لندرس الان عدد الطرق المختلفة التي يمكننا فيها ترتيب حروف كلمة (باب) قد تبدو لأول وهلة ان عدد هذه الطرق هو 6 =!3 الا ان تكرار الحرف (ب) مرتين يمنع استعمال هذه القاعدة لانه لا يمكن التميز بين (ب) الموجودة في أول الكلمة و(ب) الموجودة في اخر الكلمة، وفي الحقيقة أن عدد الطرق هو (3) وليس (6) وهي ب ا ب ، اب ب ، ب ب 1. فعدد الحروف 3، اثنان منها متشابهة لذا فان عدد الطرق الممكن بها ترتيب حروف كلمة (باب) هو:

$$\frac{3!}{2!\,1!} = 3$$

ويمكن القول بانه إذا كانت لدينا من الاشياء، ومنهما m متشابهة فان عدد طرق ترتيب هذه الاشياء على خط هي: $\frac{n!}{m!}$

فاذا كانت هناك m_1 من الاشياء وm_2 من الاشياء المتشابهة الاخرى فان عدد الطرق الممكنة الترتيب هذه الاشياء على خط هو: $\frac{n!}{m_1!m_2!}$

فمثلاً عدد الطرق الممكنة لترتيب حروف كلمة (السلسلة) هو:

$$\frac{7!}{2!\,3!\,1!\,1!} = 420$$

وبالإمكان الان تعميم هذه القاعدة فنقول إن التباديل في حالة وجود مجموعات متشابهة هي:

$$\frac{n!}{m_1!\,m_2!\,m_3!}$$

علماً بان: $m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots = n$

مثال: ما هو عدد الترتيبات التي يمكن تكوينها من أحرف كلمة (Statistics).

الحل:

عدد الأحرف الكلية = 10

وان الحرف s تكرر 3 مرات

وان الحرف t تكرر 3 مرات

Dr. Ahmed Shehab

وان الحرف a تكرر مرة واحدة

وان الحرف ز تكرر مرتان

وان الحرف c تكرر مرة واحدة

لذا فان:

$$\frac{n!}{m_1!\,m_2!\,m_3!\,m_4!\,m_5} = \frac{10!}{3!\,3!\,1!\,2!\,1!} = 50400$$

12-التوافيق: Combinations

يقصد بالتوافيق بانها عدد طرق الاختبار غير المرتب التي يمكن تكوينها من عدة أشياء بأخذها

كلها أو بعضها ويرمز له بـ (nCr) او $\binom{n}{r}$

وقانونه هو:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

أي أن الترتيب في حالة التوافيق غير مهم، على العكس من التباديل، ففي المثال السابق عن ترتيب الحروف (A,B,C,D) كان يهمنا أي حرف ياتي اولا وايهما ياتي ثانية حيث كل حالة تعتبر صورة مغايرة للاخرى، اما في التوافيق فلا يهم أي حرف ياتي اولا وايهما ثانية فكلا الحالتين تعتبر نتيجة واحدة.

لاحظ بأن:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

مثال: ماعدد طرق الاختيار التي يمكن الحصول عليها لاختيار لجنة مؤلفة من 5 اشخاص من مجموع 9 اشخاص؟

الحل: لاحظ بان ترتيب الأشخاص هنا غير ضروري لان اختيار عمر قبل حيدر او العكس هي نتيجة واحدة.

$$\binom{9}{5} = \frac{9!}{5!\,(9-5)!} = \frac{9!}{5!\,4!} = 126$$

Dr. Ahmed Shehab

الاحتمال: Probability

من المفاهيم الاساسية في الأحتمالات مفهوم المحاولة، وتعرف بأنها العملية التي تجرى ويتوقع أن ينتج عنها شيء، ومثال ذلك ولادة مولود، رمي قطعة نقود، السحبة، النجاح، الفشل، ألخ ..... والمحاولات نوعان:

أ-نوع ينتج عنه نتيجتين فقط لا ثالث بينهما وتسمى محاولات برنولي:

ومثال ذلك رمي قطعة النقود، ومن شروط محولات برنولي ان تكون النتيجة واضحة ومستقلة وتنفي الحدث الاخر وان يكون هناك احتمال بحصول الحدث.

ب -محاولات اخرى تكون نتائجها أكثر من اثنين:

لنفرض ان حدثا معينا (E) يمكن أن يتحقق (او يحدث او ينجح في n من الحالات (وتسمى الحالات المواتية (favorable cases من مجموعة N من الحالات الممكنة All possible cases وعلى فرض ان جميع الحالات المكنة هذه متساوية الحدوث Equally likely cases فان درجة احتمال ظهور الحدث E_i ويرمز له $P(E_i)$ هي:

$$P(E_i) = \frac{\text{عدد الحالات المؤاتية للحدث}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{n}{N}$$

هذا وان احتمال عدم ظهور هذا الحدث (أي فشله) ويرمز له بـ $P(\not{E})$ هو:

$$P(\not{E}) = 1 - P(E)$$

ويسمى $P(\not{E})$ باحتمال الحادث المكمل او الاحتمال العكسي.

مثال1: لو رميت قطعة نقود متزنة بصورة عشوائية مرة واحدة فقط فما هو احتمال حصول الحدث (H) أي الصورة؟

الحل:

$$P(H)=n/N=1/2$$

لان الحالات الممكنة (N) = 2 وهي اما الصورة او الكتابة.

مثال2: رميت قطعة نقود متزنة 3 مرات وبصورة عشوائية فما هو احتمال الحصول على الصورة مرتين.

الحل: عدد الحالات الممكنة = 8 حالات (الان 2×2×2 = 8) وهي:

HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT

اما الحالات المواتية = 3 حالات وهي:

(HHT, HTH, THH)

Dr. Ahmed Shehab

لذا فاحتمال الحصول على الصورة مرتين هما:

$$P(2H) = \frac{3}{8}$$

بعض خواص الاحتمالات:

1) إذا رمزنا لاحتمال حدوث حادث بالرمز p(E) واحتمال عدم حدوث هذا الحادث بالرمز P(E) فإن: $P(E_2) + P(E_2) = 1$

أن درجة احتمال أي حادث تتراوح بين الصفر والواحد اي $0 < P(E) < 1$ أي انه إذا ظهر الحدث المطلوب فان احتماله = 1 وعندها يسمى الحدث (E) بانه اكيد، وذا لم يظهر فاحتماله = صفر وعندها يسمى الحدث (E) بانه مستحيل.

3) اذا كانت

$E_1E_2,\ldots\ldots E_n$ هي عناصر او نقاط فضاء العينة فان مجموع درجات احتمالاتها =1 أي أن:

$$P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n) = 1$$

$$\sum P(E_i) = 1$$

مثال: صندوق يحتوي على (6) كرات حمراء و(4) بيضاء و(5) صفراء فاذا سحبت منه كرة عشوائية فاحتمال أن تكون (1) حمراء (2) بيضاء (3) صفراء.

الحل:

حمراء: $P(R) = \frac{6}{15}$

بيضاء: $P(w) = \frac{4}{15}$

صفراء : $P(Y) = \frac{5}{15}$

$$P(R) + P(W) + P(Y) = 1$$

Dr. Ahmed Shehab

المصادر:

1. الراوي، خاشع محمود. 1989. المدخل الى الإحصاء. وزارة التعليم العالي والبحث العلمي. جامعة الموصل.
2. طبيه، احمد عبدالسميع. 2007. مبادئ الإحصاء، عمان. دار البداية. ر.أ: www.daralbedayah.com (2007/6/1709)
3. David, M. Lane. Introduction to Statistics. Online Edition.