Ex.Find $\int x^2 e^x dx$

Sol.Let $u(x) = x^2$ and $v'(x) = e^x$

$\therefore \quad u'(x) = 2x$ and $v(x) = e^x$

Or if we use second formula $\int u\, dv = uv - \int v du$

$u = x^2 \implies du = 2xdx$

$v = e^x \implies dv = e^x dx$

$$\int \underset{u}{x^2} \underbrace{e^x\, dx}_{dv} = \underset{u}{x^2}\underset{v}{e^x} - \int \underset{v}{e^x} \underbrace{2x\, dx}_{du}.$$

Integration by parts formula

The new integral is less complicated than the original because the exponent on x is reduced by one. To evaluate the integral on the right, we integrate by parts again with $u = x, dv = e^x\, dx$. Then $du = dx, v = e^x$, and

$$\int \underset{u}{x} \underbrace{e^x\, dx}_{dv} = \underset{u}{x}\underset{v}{e^x} - \int \underset{v}{e^x} \underbrace{dx}_{du} = xe^x - e^x + C.$$

Integration by parts Equation (2)
$u = x, dv = e^x\, dx$
$v = e^x, \quad du = dx$

Using this last evaluation, we then obtain

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2\int xe^x\, dx$$
$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C,$$

Area Bounded by Two Curves
(المساحة المحددة بين منحنيين)

Total area $=\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx$

Ex. Find the area a bounded by the parabola $y = 2 - x^2$
, and the straight line $y = -x$.

Sol. Points of intersections are given by :-
$y = 2 - x^2 = -x$
$x^2 - x - 2 = 0$
$(x + 1)(x - 2) = 0$
$x = -1$ or $x = 2$
So the area a bounded by the two curves is given by :-

Total area $=\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx$
$= \int_{-1}^{2} (2 - x^2 + x)\, dx$
$= [\, 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \,]_{-1}^{2} = 4.5$

==

(Integration by Partial Fraction)
(التكامل بواسطة تجزئة الكسور)

في العادة نعبر عن المجموع الجبري لاي عدد من الكسور بدلالة كسر واحد وهذه العملية تسمى اختصار الكسور مثال :-

$$\frac{13}{x-2} - \frac{10}{x-1} = \frac{13\,(x-1) - 10\,(x-2)}{(x-2)\,(x-1)}$$

ونبحث الان العملية العكسية وهي كيفية تحليل كسر معلوم الى كسور ابسط منه تعرف بكسوره الجزئية ولتحليل اي كسر الى كسوره الجزئية بحيث يكون كسرا مناسبا بمعنى ان درجة البسط اقل من درجة المقام ويحلل الكسر المناسب الى كسوره الجزئية كما يلي :-

١ـ نحلل المقام اي يكتب على شكل حاصل ضرب اقواس .
٢ـ كل قوس من الدرجة الاولى في المقام يقابله كسر واحد مقامه القوس المذكور وبسطه مقدار ثابت
٣ـ كل قوس من الدرجة الاولى مكرر مرتان يقابله كسران الاول مقامه القوس والثاني مقامه مربع القوس وبسط كلا منهما مقدار ثابت وهكذا اذا كان القوس مكرر (n) من المرات يقابله (n) من

الكسور مقاماتها على الترتيب :- القوس ، القوس تربيع ، القوس تكعيب ، ....، القوس اس n وبسط كلا منها مقدار ثابت .

Ex. $$\frac{1}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(X+1)^2} + \frac{C}{(X+1)^3}$$

حيث : A , B , C ثوابت

٤-نكتب الكسر الاصلي كمجموع الكسور الجزئية السابقة ذات العوامل المجهولة في بسط كلا منها .

٥-نضرب الطرفين في مقام الكسر الاصلي فنحصل على معادلة بين متعددات حدود بمقارنة معاملات القوى المتناظرة في الطرفين نحصل على العوامل المجهولة .

Ex. $$\frac{1}{x^2-x-6} = \frac{1}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{X-3} + \frac{B}{X+2} = \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

$$= \frac{AX+2A+BX-3B}{(x-3)(x+2)} = \frac{(A+B)X+2A-3B}{(x-3)(x+2)}$$

الان نقارن بين بسطي الطرفين :-

$$1 = (A+B)X + 2A - 3B$$

بما انه لا يوجد X في الطرف الايسر فهذا يعني ان :-

$$A + B = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

والحد الثابت ١ يقابله 2A – 3B اي ان : -

$$2A - 3B = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

نحل (١) و (٢) بالتعويض او بالحذف :-

$$A + B = 0$$

$$A = -B$$

نعوض في المعادلة (٢) فنحصل على :

$$2(-B) - 3B = 1$$

$$-5B = 1$$

$$B = -\frac{1}{5}$$

نعوض قيمة B في (١) فنحصل على : $A = \frac{1}{5}$

اي ان :- $$\frac{1}{x^2-x-6} = \frac{\frac{1}{5}}{X-3} - \frac{\frac{1}{5}}{X+2}$$

الان نستخدم هذه الطريقة في ايجاد قيمة التكامل عندما نحتاج الى تجزئة الكسور وكما موضح في المثال الاتي :-

Ex. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x-2)}$

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$
$$= \frac{AX-2A+BX-B}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)X-2A-B}{(x-1)(x-2)}$$

بمقارنة البسطين :

$$X = (A+B)X - 2A - B$$
$$A + B = 1$$
$$A = 1 - B$$
$$-2A - B = 0 \quad ....(1)$$

نعوض قيمة A في المعادلة (١) فنحصل على :-

$$-2(1-B) - B = 0$$
$$B = 2$$

نعوض عن قيمة B فنحصل على قيمة A : $A = 1-2 = -1$

نعوض عن قيمة A , B فنحصل على :-

$$\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x-2)} = \int \left(\frac{-1}{(x-1)} + \frac{2}{X-2}\right) dx = -Ln\,(x-1) + 2\,Ln\,(x-2) + c$$

Ex . $\int \frac{dx}{x^2+2x-8} = \int \frac{dx}{(x-2)(x+4)}$

$$\frac{1}{(x-2)(x+4)} = \frac{A}{X-2} + \frac{B}{x+4} = \frac{A(X+4)+B(X-2)}{(x-2)(x+4)} = \frac{AX+4A+BX-2B}{(x-2)(x+4)}$$
$$= \frac{(A+B)X+4A-2B}{(x-2)(x+4)}$$

بمقارنة البسطين :-

$$1 = (A+B)X + 4A - 2B$$
$$A + B = 0$$
$$A = -B$$
$$4A - 2B = 1 \quad ....(1)$$

نعوض قيمة A في المعادلة (١) فنحصل على :-

$$-4B - 2B = 1$$
$$B = \frac{-1}{6}$$

نعوض عن قيمة B فنحصل على قيمة A : $A = \frac{1}{6}$

نعوض عن قيمة A , B فنحصل على :-

$$\int \frac{dx}{(x-2)(x+4)} = \int \left(\frac{\frac{1}{6}}{X-2} + \frac{\frac{-1}{6}}{X+4}\right) dx = \frac{1}{6} Ln\,(x-2) - \frac{1}{6} Ln\,(x+4) + c$$