المحاضره الثانية

Vectors المتجهات

❖ جمع وطرح المتجهات **Vector addition and subtraction**

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$$

$$\vec{A} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}\,, \quad \vec{B} = 5\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 9\hat{k}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = 8\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 8\hat{k}$$

❖ ضرب المتجه بقيمه عددية **Multiplication by scalar**

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \qquad \times 5$$

$$5\,\vec{A} = 5A_x\hat{\imath} + 5A_y\hat{\jmath} + 5A_z\hat{k}$$

❖ قانون التبادل **The commutative law**

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

$$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$$

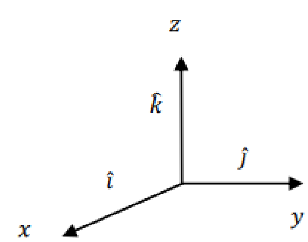
❖ قانون التوزيع **The associative law**

$$q(\vec{A} + \vec{B}) = q\vec{A} + q\vec{B}$$

❖ الضرب الإتجاهي **The cross product**

$$\vec{A} \times \vec{B}, \quad \vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$



$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{\imath}(A_yB_z - A_zB_y) - \hat{\jmath}(A_xB_z - A_zB_x) + \hat{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

ضرب المتجهات Vector Multiplication

هنالك نوعان من ضرب المتجهات

أولا:- الضرب العددي **Scalar product**

الضرب العددي لأي متجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يمثل بالرمز $\vec{A} \cdot \vec{B}$ و يقرأ $\vec{A}$ **dot** $\vec{B}$ و يساوي القيمة العددية لحاصل لحاصل ضرب مقداري المتجهين في جيب تمام الزاوية θ المحصورة بينهما أي أن

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A\,B\cos\theta$$

خواص الضرب العددي

1- $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB$ when $\theta = 0$

2- $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ when $\theta = 90^{o}$

3- $\vec{A} \cdot \vec{B} = B \cdot A$

4- $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$

5- $i \cdot j = i \cdot k = j \cdot k = 0$

6- $\vec{A} \cdot \vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz$

Where $\vec{A} = i\,Ax + j\,Ay + k\,Az$

$\vec{B} = i\,Bx + j\,By + k\,Bz$

ثانيا :- الضرب ألاتجاهي

يمثل حاصل الضرب ألمتجهي للمتجهين $\vec{B}$ و $\vec{A}$, بالرمز $\vec{A} \times \vec{B}$ و يقرأ $\vec{A}$ **cross** $\vec{B}$ و يساوي القيمة العددية لحاصل ضرب مقدار المتجهين في جيب الزاوية المحصورة بينهما أي ان

$$\vec{A} \times \vec{B} = A\,B\sin\theta$$

ضرب المتجهات Vector Multiplication

خواص الضرب ألاتجاهي

1- $\vec{A} \times \vec{B} = -B \times A$
2- $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ when $\theta = 180^\circ$
3- $\vec{A} \times \vec{B} = AB$ when $\theta = 90^\circ$
4- $i \times i = j \times j = k \times k = 0$
5- $i \times j = k$
6- $j \times k = i$
7- $k \times i = j$
8- $\vec{A} \times \vec{B} = (A_Y B_Z - A_Z B_Y)\, i + (A_Z B_X - A_X B_Z)\, j + (A_X B_Y - A_Y B_X)\, k$

و يمكن إيجاد المقدار أعلاه عن طريق المصفوفة .

مثال ١ :-

أذا كان لدينا المتجهان

$\vec{A} = i + 3j - 2k$

$\vec{B} = 3i - 2j + k$

اوجد

$\vec{A} + \vec{B}$ ، $\vec{A} - \vec{B}$ ، $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ، $\vec{A} \times \vec{B}$ و الزاوية المحصورة بين المتجهين

الحل

1- $\vec{A} + \vec{B} = (i + 3j - 2k) + (3i - 2j + k) = \mathbf{4i + j - k}$

2- $\vec{A} - \vec{B} = (i + 3j - 2k) - (3i - 2j + k) = \mathbf{-2i + 5j - 3k}$

3- $\vec{A} \cdot \vec{B} = (i + 3j - 2k) \cdot (3i - 2j + k)$

H . W

$= (I \cdot 3i) + (3j \cdot 2j) + (-2k \cdot k) = 3 - 6 - 2$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = \mathbf{-5}$

4- $\vec{A} \times \vec{B} = (i + 3j - 2k) \times (3i - 2j + k)$

4- $\vec{A} \times \vec{B} = (i + 3j - 2k) \times (3i - 2j + k)$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = i(3 - 4) + j(-6 - 1) + k(-2 - 9)$$

$\vec{A} \times \vec{B} = \mathbf{-i - 7j - 11k}$

5- $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos\theta$

$$\cos\theta = (\vec{A} \cdot \vec{B}) / AB \longrightarrow$$

$$\theta = \cos^{-1} [(\vec{A} \cdot \vec{B}) / AB]$$

$$A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}$$

$$B = (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)^{1/2}$$

$$\theta = 110.6^{\circ}$$