كلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الرياضيات

المرحلة: الرابعة

أستاذ المادة : أ.د. عبد الرحمن سلمان جمعة

اسم المادة باللغة العربية : التحليل العقدي

اسم المادة باللغة الإنكليزية : Complex analysis

اسم الحاضرة الأولى باللغة العربية: الاعداد المركبة

اسم المحاضرة الأولى باللغة الإنكليزية : Complex Numbers

١-١ مقدمة

التحليل العقدي ببساطة هو موضوع تطبيق ما تعلمنا في التفاضل والتكامل على الأعداد الخيالية ،وعادة الطلبة يتعلمون هذا في دراستهم عند مواجهة ما هو الجذر التربيعي للعدد السالب مما اضطر إلى توسيع حقل الأعداد الحقيقية لنحصل على قيم لهذا الجذر حيث سمي الحقل الجديد بحقل الأعداد العقدية والذي يرمز له بالرمز $\mathbb{C}$.

في هذا الفصل سندرس العدد العقدي من حيث تمثيله هندسيا والصيغة التي يأخذها ودراسة خواصه الجبرية والتي تكون غالبا مشابهة لخواص الاعداد الحقيقية والتحليلية والهندسية بالإضافة الى تمثيله بالشكل القطبي ودراسة الخواص التبولوجية له ويرمز له عادة بالرمز z .

تعريف ١-١: يعرف العدد العقدي(المركب) بأنه الزوج المرتب $z = (x, y)$ ويكتب بالشكل $z = x + iy$ حيث $i = \sqrt{-1}$ أو $i = (0,1)$ وعليه نسمي x بالجزء الحقيقي للعدد z ويرمز له $x = Rez$ أما y فيمثل الجزء التخيلي للعدد z ويرمز له $y = Im\, z$ وهي أعداد تنتمي إلى حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. اما مجموعة الأعداد العقدية(المركبة) فيرمز لها بالرمز $\mathbb{C}$ ويعبر عنها $\mathbb{C} = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R}\}$.

مثال١-١: الاعداد الاتية هي اعداد عقدية:

$$(z = 3\,, \qquad z = 2i\ , \qquad z = 1 + i\,, \qquad z = 2 + 3i)$$

ملاحظة١-١: أ- يكون العدد العقدي حقيقيا صرفا إذا كان $y = 0$.

ب- يكون العدد العقدي خياليا صرفا إذا كان $x = 0$.

١-٢ الخواص الجبرية للعدد العقدي:

أ- خاصية الجمع: لتكن $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ عددين عقديين فإن حاصل الجمع يعرف بالشكل الآتي:

$$z_1 \mp z_2 = (x_1 + iy_1) \mp (x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1 \mp x_2) + i(y_1 \mp y_2) = z_2 \mp z_1$$

مثال١-٢: لتكن $z_1 = 3 + 3i$, $z_2 = 1 - i$ فإن

$$z_1 + z_2 = (3 + 3i) + (1 - i) = (3 + 1) + i(3 - 1) = 4 + 2i$$

ب- خاصية الضرب: لتكن $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ عددين عقديين فإن حاصل الضرب يعرف بالشكل الآتي:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \\ &= z_2 \cdot z_1 \end{aligned}$$

<u>مثال١-٣:</u> لتكن $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - i$ فأن

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (1 + 2i) \cdot (2 - i) \\ &= \big(1 \cdot 2 - 2(-1)\big) + i\big(1(-1) + 2(2)\big) \\ &= (2 + 2) + i(-1 + 4) \\ &= 4 + 3i \end{aligned}$$

ج- خاصية القسمة: لتكن $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ عددين عقديين فإن حاصل القسمة يعرف بالشكل الآتي:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + i\frac{y_1x_2 + x_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}. \end{aligned}$$

<u>مثال١-٤:</u> لتكن $z_1 = 3 - i$, $z_2 = 1 - 2i$ فإن

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3 - i}{1 - 2i} \\ &= \frac{3(1) + (-1)(-2)}{(1)^2 + (-2)^2} + i\frac{(-1)(1) - (3)(-2)}{(1)^2 + (-2)^2} \\ &= \frac{5}{5} + i\frac{5}{5} = 1 + i \end{aligned}$$

والجدير بالذكر هنا ان الخاصية الابدالية والتجميعية تنطبق على الاعداد العقدية كما في الاعداد الحقيقية وندعها للطالب للتحقق منها .

<u>مــلاحظــة١-٢:</u>

أ- العنصر المحايد لعملية الجمع هو (٠,٠) أي أن $z = 0$.

ب- العنصر المحايد لعملية الضرب هو (١,٠) أي أن $z = 1$.

ج- النظير الجمعي للعدد العقدي هو $-z$ اي ان $-z = -(x, y)$.

د- النظير الضربي للعدد العقدي هو $\frac{1}{z} = z^{-1} = (x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

هـ- حقل الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ هو حقل غير مرتب.

برهان الملاحظة (د) والملاحظة (هـ) تترك تمرين للطالب.

<u>تعريف ١-٢:</u> لتكن $z = x + iy$ فإن العدد المرافق (*conjugate*) للعدد z ويرمز له $\overline{z}$

يعرف كالآتي: $\overline{z} = x - iy$

والقيمة المطلقة (المقياس) للعدد العقدي ويرمز لـه بـالرمز $|z|$ ويعرف $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ ويسمى طول العدد ويكافئ الصيغة

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \geq 0$$

<u>مثال ١-٥:</u> لتكن $z = 3 - i$ فأن $\overline{z} = 3 + i$ وكذلك فإن

$$|z| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

<u>1-٣ خواص مرافق ومقياس العدد العقدي:</u>

أ- $Re\, z = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $Im\, z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

ب- $\overline{z_1 \mp z_2} = \overline{z_1} \mp \overline{z_2}$.

ج- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

د- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ بشرط أن $z_2 \neq 0$.

هـ- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.

و- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ بشرط أن $z_2 \neq 0$.

ي- $|\overline{z}| = |z|$.

ت – $\overline{\overline{z}} = z$.

<u>نظرية١-١:</u> لكل $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ فأن

أ – $Im\, z_1 \leq |z_1|\,,\ \ Re\, z_1 \leq |z_1|$.

ب – $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

ج – $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

د – $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

البرهان: نبرهن الفرع (ب) والبقية نترك برهانها للطالب.

برهان الفرع (ب) نستخدم تعريف مقياس العدد العقدي الوارد في التعريف (١-٢) ليكون البرهان كما يلي

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1 + z_2}\right)$$

$$= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2})$$

$$= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}$$

$$= |z_1|^2 + \overline{\overline{z_1}z_2} + \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2$$

$$= |z_1|^2 + 2Re\,(\overline{z_1}z_2) + |z_2|^2$$

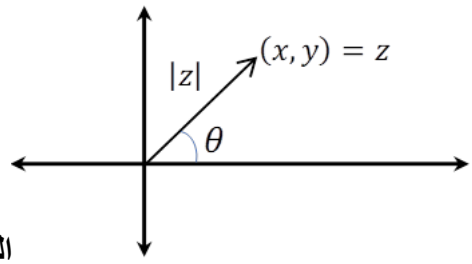
من الفرع (أ) يكون لدينا $|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|\overline{z_1}z_2| + |z_2|^2$

$$\leq (|z_1| + |z_2|)^2$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين نستنتج المطلوب.

<u>١-٤ التمثيل الهندسي والصيغة القطبية للعدد العقدي:</u>

عند رسم العدد $z = x + iy$ في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ فإن $|z|$ يمثل طول المتجه الواصل بين النقطة (x, y) ونقطة الأصل $(0,0)$ كما في الشكل(١-١).



الشكل(١-١)

الزاوية θ الظاهرة في الشكل(١-١) تسمى (*argument*) العدد العقدي z وتكتب بالشكل $\theta = arg\, z$ وتعرف بأنها الزاوية التي يصنعها العدد العقدي مع محور السينات الموجب.

نلاحظ ان θ غير وحيدة التحديد لان اذا عوضنا θ ب $\theta + 2n\pi$ حيث $n \in \mathbb{Z}$ ، فأننا نحصل على نفس النقطة ، بينما تكون وحيدة حين $-\pi < \theta \leq \pi$ عندئذ نطلق عليها القيمة الاساسية للسعة $arg\, z$ ويرمز لها بالرمز $Arg\, z$.

<u>مثال ١-٦</u>: جد السعة $arg\, z$ والقيمة الأساسية للسعة للعدد العقدي $z = 1 + i$ **الحل:** حسب تعريف السعة θ نجد أن

$$arg\, z = \theta = tan^{-1}\frac{y}{x} = tan^{-1}\frac{1}{1} \qquad \theta = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \qquad n =$$

اذن تكون $0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

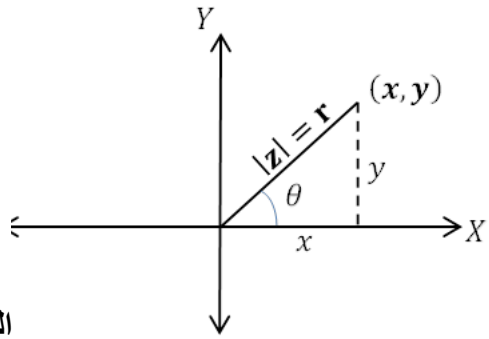
أما القيمة الأساسية لهذه السعة فهي أصغر قيمة موجبة للسعة θ حيث $-\pi < \theta \leq \pi$ أي أن $Arg\, z = \frac{\pi}{4}$.

الآن سنوضح الصيغة القطبية (*Polar form*) للعدد العقدي:

لتكن r وθ الإحداثيات القطبية للنقطة (x, y) التي تقابل العدد العقدي الغير صفري $z = x + iy$ من المعروف سابقا أن $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ كذلك العدد z نستطيع كتابته بالصيغة القطبية وكما يلي

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (1)$$

حيث $r = |z|$, θ: هي السعة للعدد العقدي z كما مبين بالشكل (١-٢).



الشكل(١-٢)

ملاحظة١-٣: إذا كان $z = 0$ فإن الإحداثي θ غير معرف لذلك عند استخدامنا للإحداثيات القطبية يجب أن يكون $z \neq 0$.

نظرية ١-٢: ليكن z_1, z_2 عددان عقديان فأن

أ − $arg(z_1.z_2) = arg\, z_1 + arg\, z_2$

ب − $arg(z_1/z_2) = arg\, z_1 - arg\, z_2$

ج − $arg(\overline{z_1}) = -arg\, z_1$

البرهان: نبرهن الفرع (أ) وتترك الفروع البقية كتمرين للطالب.

برهان (أ) من الصيغة القطبية للعدد العقدي فان

$$z_1 = |z_1|(cos\,\theta_1 + i\,sin\,\theta_1)$$

$$z_2 = |z_2|(cos\,\theta_2 + \ i\,sin\,\theta_2)$$

حيث θ_2, θ_1 السعة للعددين z_2, z_1 على الترتيب .

وعليه يكون

$$z_1.z_2 = |z_1||z_2|(cos\,\theta_1\,cos\,\theta_2 - sin\,\theta_1\,sin\,\theta_2) + i(cos\,\theta_1\,sin\,\theta_2 + sin\,\theta_1\,cos\,\theta_2)$$

$$= |z_1||z_2|(cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,sin(\theta_1 + \theta_2))$$

لذلك ستكون السعة للعدد العقدي $z_1.z_2$ هي $\theta_1 + \theta_2$ أي أن

$$arg(z_1.z_2) = arg\, z_1 + arg\, z_2$$

تعريف١-٣: تعرف صيغة أويلر (*Euler's formula*) بالشكل الآتي:

$$e^{i\theta} = cos\,\theta + i\,sin\,\theta$$

حيث θ قيمة حقيقية تقاس بالزاوية النصف القطرية. لذلك يمكن إعادة تعريف العدد العقدي المعرف بالصيغة (1) بالصيغة الآتية:

$$z = re^{i\theta} \qquad (2)$$

مثال١-٧: أكتب العدد $z = -1 - i$ بصيغة أويلر.

الحل:

$$\theta = tan^{-1}\frac{-1}{-1} = tan^{-1}\,1$$

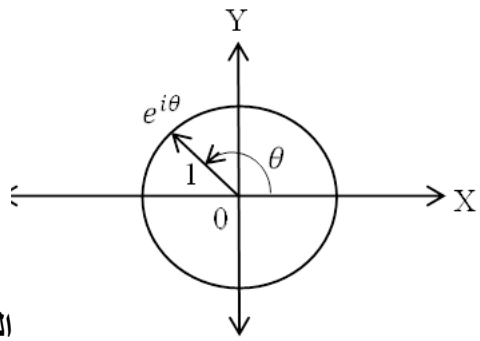
$$= \frac{-3\pi}{4} + 2n\pi \quad , n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

لذلك يكون

$$-1 - i = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{-3\pi}{4} + 2n\pi\right)}$$

ملاحظة ١-٤: إذا كان $r = 1$ في الصيغة (٢) فهذا يمثل دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها واحد وتدعى دائرة الوحدة وكما في الشكل (١-٣).



الشكل (١-٣)

مثال ١-٨: جد السعة والقيمة الأساسية للسعة واكتب صيغة أويلر للعدد العقدي

$$z = \frac{-2 - 2i}{\sqrt{3} + i}$$

الحل:

$$\theta_1 = tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$$

$$\theta_2 = tan^{-1} \frac{-2}{-2} = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi, \qquad n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

لذلك نستنتج ان

$$arg\, z = \theta = \theta_2 - \theta_1 = \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + 2n\pi$$

$$= \frac{13\pi}{12} + 2n\pi, \; n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

فتكون الصيغة القطبية للعدد

$$z = \frac{|-2-2i|}{|\sqrt{3}+i|} e^{i\left(\frac{13\pi}{12} + 2n\pi\right)}$$

ملاحظة ١-٥: $Arg(z_1 z_2) \neq Arg\, z_1 + Arg\, z_2$

مثال ١-٩: لنأخذ $z_1 = 2i$, $z_2 = -1$ فأن

$$Arg\, z_1 = \frac{\pi}{2}\ , \qquad Arg\, z_2 = \pi$$

وعليه يكون $Arg(z_1 . z_2) = (-2i) = \frac{-\pi}{2}$

بينما $Arg\, z_1 + Arg\, z_2 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

<u>مثال١-١٠:</u> جد السعة والقيمة الأساسية للسعة للعدد العقدي $-i$ ثم اكتبه بصيغة أويلر

الحل: $\theta = tan^{-1}\frac{-1}{0} = \frac{-\pi}{2} + 2n\pi \quad , n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

أما القيمة الأساسية للسعة فهي $Arg(-i) = \frac{-\pi}{2}$

$$|z| = r = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

وعليه تكون صيغة اويلر $z = e^{i\left(\frac{-\pi}{2} + 2n\pi\right)} \quad , n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$