كلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الرياضيات

المرحلة: الرابعة

أستاذ المادة : أ.د. عبد الرحمن سلمان جمعة

اسم المادة باللغة العربية : التحليل العقدي

اسم المادة باللغة الإنكليزية : Complex analysis

اسم الحاضرة الثانية باللغة العربية: قوة العدد العقدي ونظرية ديموفيرا

اسم المحاضرة الثانية باللغة الإنكليزية : De Moivre's Theorem

١-٦ قوة العدد العقدي ونظرية ديموفيرا (De Moivre's Theorem):

ليكن n عدد صحيح موجب فإنه طبقا لحاصل الضرب يكون

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

أما إذا كان n عدد صحيح سالب فإن $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ حيث $z \neq 0$ ،العلاقة أعلاه صحيحة لكل $n \in \mathbb{Z}$ حيث

$$(\cos n\theta + i \sin n\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

وتسمى هذه الصيغة نظرية ديموافر.

وإذا كان الأس كسر فإن

$$z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{Arg\ z + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{Arg\ z + 2k\pi}{n}\right),$$

وهي الصيغة التي تعطينا جميع الجذور النونية للعدد z حيث $k = 0,1,\dots,n-1$.

مثال١-١٣: إستخدم علاقة ديموفيرا في حساب $z = \left(-1 + \sqrt{3}i\right)^{12}$

الحل: نفرض أن $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$

فان $z_1 = 2\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$$\cos\theta = \frac{-1}{2}\ ,\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن θ تقع في الربع الثاني وعليه يكون $\cos\theta = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$$\sin\theta = \sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

إذن يكون $\theta = \frac{2\pi}{3}$

وهذا يؤدي $z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right)$

وبالتالي يكون

$$z = {z_1}^{12} = \left(2\left(cos\frac{2\pi}{3} + i\,sin\frac{2\pi}{3}\right)\right)^{12}$$

وحسب علاقة ديموفيرا فإنه

$$z = 2^{12}\left(cos\frac{24\pi}{3} + i\,sin\frac{24\pi}{3}\right)$$

$$= 2^{12}(cos\,8\pi + i\,sin\,8\pi)$$

$$= 2^{12}(1 + 0i)$$

$$\Longrightarrow z = 2^{12}$$

<u>مثال ١-١٤:</u> جد الجذور الثلاثة الأولى للعدد العقدي $1 + i$.

الحل: $r = \sqrt{2}$ وأن $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$z_k = r^{\frac{1}{3}}\left(cos\frac{\theta + 2\pi k}{3} + i\,sin\frac{\theta + 2\pi k}{3}\right), k = 0,1,2$$

أذن عندما يكون لدينا $k = 0$

$$z_0 = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(cos\frac{\frac{\pi}{4}+0}{3} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{4}+0}{3}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(cos\frac{\pi}{12} + i\,sin\frac{\pi}{12}\right),$$

وعندما يكون لدينا $k = 1$

$$z_1 = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(cos\frac{9\pi}{12} + i\,sin\frac{9\pi}{12}\right),$$

وعندما $k = 2$ يكون لدينا

$$z_1 = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(cos\frac{17\pi}{12} + i\,sin\frac{17\pi}{12}\right).$$

<u>١-٧ التبولوجيا للأعداد العقدية:</u>

في هذا الفصل سنتطرق إلى بعض المفاهيم الأساسية التي تتعلق بمجموعات النقط في الفضاء العقدي وأول هذه المفاهيم هو المنحني والذي يعرف بأنه المدى للدالة المستمرة ذات القيم العقدية $z(t)$ المعرفة على الفترة المغلقة $[a,b]$ بالصيغة $z(t)=\big(x(t),y(t)\big)$ حيث $a\le t\le b$ وان $x(t),y(t)$ دوال حقيقية مستمرة.

ويكون المنحني املسا *Smooth* عندما تكون $x(t),y(t)$ دوال قابلة للاشتقاق.

وسنحدد المنحني C بالمعادلة الوسيطية $z(t)=x(t)+iy(t)$ حيث $a\le t\le b$ وان النقطة $z(a)=\big(x(a),y(a)\big)$ تسمى النقطة الإبتدائية للمنحني ، بينما النقطة

$z(b)=\big(x(b),y(b)\big)$ النقطة النهائية للمنحني.

الآن إذا كانت $z_0=x_0+iy_0$, $z_1=x_1+iy_1$ نقطتين فإن الخط الذي يربط z_0 مع z_1

هو $C: z(t)=(x_0+(x_1-x_0)t+i(y_1-y_0)t)$ حيث $0\le t\le 1$

كما موضح بالشكل (١-٤) ويمكن كتابته بالصورة الآتية:

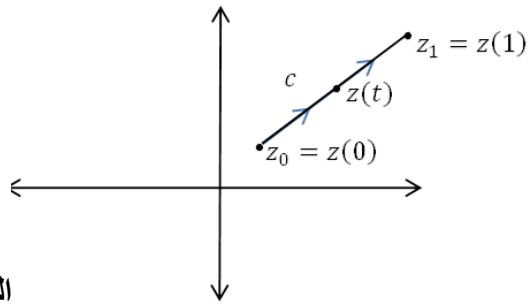
$$C: z(t)=z_0+(z_1-z_0)t,\quad 0\le t\le 1$$

بالنسبة للمنحني C – فإن المعادلة ستأخذ الشكل الآتي:

$$-C: \gamma(t)=z_0+(z_0-z_1)t,\quad 0\le t\le 1$$

ومن هنا نستطيع القول أنه إذا كان C منحني معادلته الوسيطية هي $z(t)$ فإن المعادلة الوسيطية للمنحني C – تكون

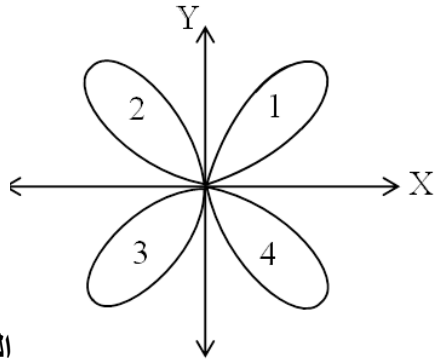
$$0\le t\le 1, z(1-t).$$



الشكل (١-٤)

وإذا كانت $z(a)=z(b)$ فان المنحني C يسمى منحني مغلق *Closed curve* .

الان دعنا ندرس المنحني الاتي $x(t)=\sin 2t\cos t$ و $y(t)=\sin 2t\sin t$ حيث $0\le t\le 2\pi$ الذي يمثل وردة بأربعة أوراق كما موضح في الشكل (١-٥).



الشكل (١-٥)

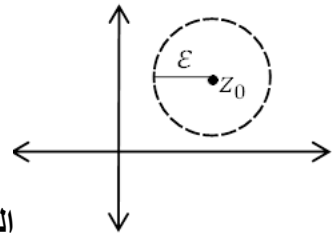
لاحظ أن t تنطلق من ٠ الى $\frac{\pi}{2}$ النقاط في الورقة (١) ومن $\frac{\pi}{2}$ الى π في الورقة (٢) وبين π و$\frac{3\pi}{2}$ في الورقة (٣) وأخيراً t بين $\frac{3\pi}{2}, 2\pi$ في الورقة (٤).

وكذلك يمكن ملاحظة أن المنحني يقطع نفسه في نقطة الأصل فقط . لذلك نسمي المنحني الذي لا يقطع نفسه بالمنحني البسيط $(Simple)$ والذي يتطلب $z(t_1) \neq z(t_2)$ عندما يكون $t_1 \neq t_2$ باستثناء إحتمالية أن يكون $t_2 = b, t_1 = a$.

الآن من المواضيع المهمة التي بصدد دراستها في هذا الفصل هي الجوار للنقطة z_0 في المستوي العقدي والتي تعرف بأنها جميع النقاط التي تحقق المتراجحة الآتية:

$$|z - z_0| < \varepsilon$$

وهذه تمثل مجموعة النقاط داخل القرص المفتوح بنصف قطر $\varepsilon > 0$ حول z_0 كما موضح في الشكل (١-٦).



الشكل (١-٦)

ويرمز له بالرمز $D_\varepsilon(z_0)$ والذي يمثل قرص الوحدة المفتوح مركزه z_0 ونصف قطره $\varepsilon > 0$ وعليه يكون

$$D_\varepsilon(z_0) = \{z: |z - z_0| < \varepsilon\}$$

وأيضا نستطيع تعريف قرص الوحدة المغلق الذي مركزه z_0 ونصف قطره ε بالصيغة

$$\overline{D}_\varepsilon(z_0) = \{z: |z - z_0| \leq \varepsilon\}$$

والقرص المثقوب بالصيغة $D^*_\varepsilon(z_0) = \{z: 0 < |z - z_0| < \varepsilon\} = D_\varepsilon(z_0) \backslash \{0\}$

تسمى النقطة z_0 نقطة داخلية *(Interior point)* للمجموعة S إذا وجد جوار لهذه النقطة يقع باكمله في S وتسمى النقطة z_0 نقطة خارجية *(Exterior point)* للمجموعة S إذا وجد جوار للنقطة z_0 تقاطعه مع المجموعة S يكون مجموعة خالية .

والنقطة التي لا تكون داخلية ولا خارجية تسمى نقطة حدودية (*Boundary point*).

مثال١-١٥: لتكن $S = \{z: |z| < a\}$ جد النقاط الداخلية والخارجية والحدودية للمجموعة S.

الحل: لتكن $z_0 \in S$ فإن $|z_0| < a$ لذلك نستطيع أن نضع $\varepsilon = a - |z_0| > 0$

إذا كانت z تقع داخل القرص $|z - z_0| < \varepsilon$ فإن

$$|z| = |z_0 + z - z_0| \leq |z_0| + |z - z_0| < |z_0| + \varepsilon = a$$

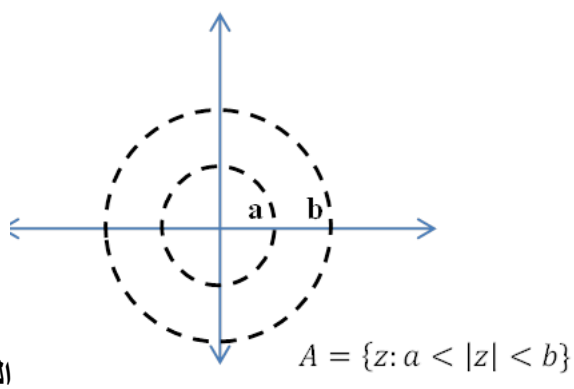
لذلك تكون النقاط الداخلية للمجموعة S هي المجموعة $\{z: |z| < a\}$.

وبنفس الطريقة يمكن إيجاد النقاط الخارجية فتكون المجموعة $\{z: |z| > a\}$.

ومن التعريف نستنتج ان النقاط الحدودية هي $\{z: |z| = a\}$.

تسمى المجموعة S مجموعة مفتوحة إذا كانت كل نقطة من نقاطها نقطة داخلية وتسمى مغلقة إذا كل نقاطها الحدودية تقع داخل S .

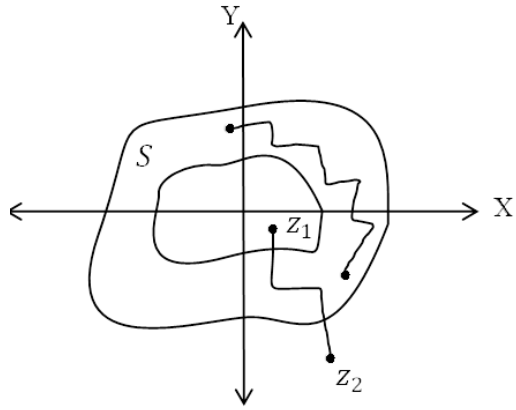
وكذلك تكون S مجموعة متصلة *(connected)* اذا لكل z_2, z_1 يوجد منحني يصل بينهما يقع بأكمله داخل S .مثال على ذلك القرص المفتوح $D = \{z: |z| < a\}$ مجموعة متصلة وأيضا الشكل الحلقي $A = \{z: a < |z| < b\}$ هو أيضا مجموعة متصلة مفتوحة لأن أي نقطتين في A فإن المنحني الذي يربطهما يقع بأكمله داخل A كما في الشكل (١-٧).



الشكل (١-٧)

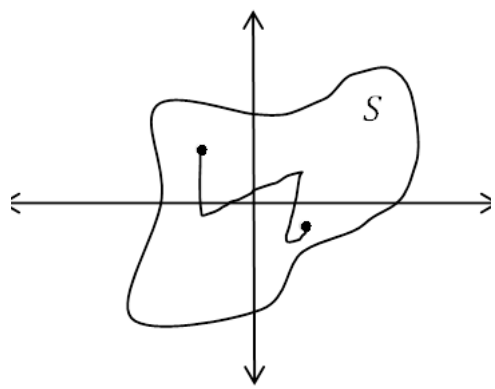
وعليه نسمي المجموعة المفتوحة المتصلة بإسم المجال (*Domain*) والمجال مع جميع نقاطه الحدودية يسمى منطقة (*Region*). ومثال على ذلك الشريط $\{z: 1 < Im\, z \leq 2\}$ والمجموعة التي تشكل من اتحاد المجال والنقاط الحدودية تسمى منطقة مغلقة ومثال على ذلك نصف المستوي $\{z: x \leq y\}$. وإذا كانت S^c (متممة المجموعة

S) متصلة فإن المجموعة S تكون متصلة اتصالاً بسيطا (*Simply connected*). اما اذا كانت S^c ليست متصلة فان S متصلة اتصالاً مضاعفاً (*Multiply connected*) كما في الشكل (١-٨) ، (١-٩)



اتصال مضاعف

الشكل(١-٨)



X

إتصال بسيط

الشكل(١-٩)

والنقطة z_0 تسمى نقطة تجمع (*Accumulation point*) للمجموعة S إذا كان كل جوار للنقطة z_0 يحتوي على الأقل نقطة واحدة من S وعليه تكون المجموعة S مغلقة اذا احتوت على كل نقاط تجمعها.

لاحظ أن نقطة الأصل هي نقطة التجمع الوحيدة للمجموعة $z_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1,2, \dots)$.

<u>مثال١-١٦</u>: جد نقط التجمع للمجموعة S حيث

$$S = \left\{(-1)^n \cdot \frac{i}{n} : n = 1,2, \dots\right\}$$

الحل: لاحظ أن $S = \left\{-i, \frac{i}{2}, \frac{-i}{3}, \frac{i}{4}, \dots\right\}$

أيضاً يمكن ملاحظة $S = S_1 \cup S_2$ حيث $S_1 = \left\{-i, \frac{-i}{3}, \frac{-i}{5}, \dots\right\}$

$$S_2 = \left\{\frac{1}{2}i, \frac{1}{4}i, \frac{1}{6}i, \dots\right\}$$

نلاحظ أن نقاط التجمع للمجموعة S للنقاط الأولى هي $-i$ والثانية i وعليه من التعريف نجد أن نقاط التجمع للمجموعة S هي $\{i, -i\}$.

١-٨ أسئلة الفصل الأول

١- تحقق من أن

أ- $\left(\sqrt{2}-i\right)-i\left(1-\sqrt{2}i\right)=-2i$.

ب- $(2,-3)(-2,1)=(-1,8)$.

ج - $-\sqrt{2}i\ ,\ \sqrt{2}i$ هما جذران للمعادلة $z^2+2=0$.

٢- إثبت أن

أ- لأي عدد عقدي z إذا كان $Im\,z>0$ فإن $Im\left(\frac{1}{z}\right)<0$.

ب-لأي عدد عقدي z فإن $Re(iz)=-Im\,z$ وأن $Im(iz)=Re\,z$.

ج-لأي عددين عقدين z_2,z_1 فإن $z\overline{z}$ عدد حقيقي.

د-لأي عدد معقدي z فإن $Im\,z\le|Im\,z|\le|z|$.

هـ-لأي عدد عقدي z فإن $|Re\,z|+|Im\,z|\le\sqrt{2}|z|$.

و-الأعداد العقدية التالية تمثل رؤوس مثلث متساوي الأضلاع

$$z_1=-1+i\ ,z_2=1+i\ ,z_3=\left(1+\sqrt{3}\right)i$$

ز- $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2-2Re(z_1\overline{z}_2)+|z_2|^2$

٣- عبر عن الأعداد التالية بالصيغة القطبية ثم بصيغة أويلر:

$$\frac{2-2i}{\sqrt{3}-i}\ ,\ \frac{1-\sqrt{3}i}{(1-i)^2}\ ,\ 2-3i\ .$$

٤- جد الجذور للأعداد العقدية الآتية:

أ. $(-8i)^{\frac{1}{3}}$ ب. $\left(8-8\sqrt{3}i\right)^{\frac{1}{4}}$ ج. $(-16)^{\frac{1}{4}}$

د. $(1+i)^{\frac{1}{3}}$ هـ. $\left(1-\sqrt{3}i\right)^{\frac{1}{5}}$ و. $(-i)^{\frac{1}{2}}$

٥- عبر عن الأعداد العقدية الآتية بالصيغة $x-iy$

أ. $e^{i\frac{\pi}{2}}$ ب. $-2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ج. $e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-i\pi}$

٦- لأي عدد عقدي فإن $arg\left(\frac{1}{z}\right)=-arg\,z$ هل $Arg\left(\frac{1}{z}\right)\neq -Arg\,z$؟

٧- أثبت أن $|z^2+2z-1|\leq 9$ حيث z نقطة تقع على محيط دائرة نصف قطرها ٢ ومركزها نقطة الأصل.

٨- جد ثلاثة حلول للمعادلة $z^{\frac{3}{2}}=4\sqrt{2}+i4\sqrt{2}$.

٩- إثبت صحة العلاقة الآتية $(-1+i)^7=-8(1+i)$.

١٠- ارسم المجموعات الآتية:

أ. $|z-2+i|\leq 1$ ب. $|z-r|=Re\,z\ ,r>0$

ج. $|z+i|^2=Im(z+2i)$ د. $(z+\overline{z})^2+(z-\overline{z})^2=4$

١١- جد المعادلة الوسيطية للخط الذي يربط نقطة الأصل مع النقطة $1+i$.

١٢- لتكن S مجموعة مفتوحة تحوي النقاط z بحيث $|z-2|<1$ او $|z|<1$ فهل S متصلة؟ ولماذا؟

١٣- جد مجموعة النقاط الحدودية والتجمع للمجموعات الآتية:

أ. $S=\left\{\frac{i}{n}:n=1,2,3,\dots\right\}$ ب. $S=\{z:Re\,z^2>0\}$

١٤- حدد المجموعات الآتية فيما إذا كانت متصلة ، منطقة ، مقيدة .

أ. $\{z:Re\,z>1\}$ ب. $\{-1<Im\,z\leq 2\}$ ج. $\{z:|z+2i|>1\}$

١٥- برهن على أنه إذا كانت المجموعة تحتوي على كل نقاط تجمعها فإنها مغلقة.