كلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الرياضيات

المرحلة: الرابعة

أستاذ المادة : أ.د. عبد الرحمن سلمان جمعة

اسم المادة باللغة العربية : التحليل العقدي

اسم المادة باللغة الإنكليزية : Complex analysis

اسم الحاضرة الثالثة باللغة العربية: الدوال العقدية

اسم المحاضرة الثالثة باللغة الإنكليزية : Complex Functions

٢-١ مقدمة

الدوال ذات المتغيرات العقدية طورت مفهوم الدوال القابلة للاشتقاق وتلعب الدوال التحليلية دورا مهما واساسيا في هذا المفهوم والتي تعتبر اساس دراستنا في هذا الفصل بالاضافة الى اوجه الاختلاف والتشابه بين الدوال الحقيقية والعقدية من خلال دراستنا للغايات والمفاهيم التفاضلية الاخرى والتي تشغل حيزا واسعا في التطبيقات الفيزيائية والهندسية.

تعريف٢-١: الدالة f المعرفة على المجموعة $(S \subset \mathbb{C})$ هي قاعدة الإرتباط الوحيده لكل عدد z من المجموعة S مع العدد العقدي w . المجموعة S تسمى المجال للدالة f والعدد العقدي w هو صورة العدد z بالنسبة للدالة f ومجموعة كل الصور $R = \{w = f(z): z \in S\}$ تسمى مدى الدالة f أو صورة الدالة f.

وكما هو معروف بأن العدد $z = x + iy$ لذلك فأن $w = u + iv$ حيث v, u هما الجزئين الحقيقي والخيالي للعدد w على الترتيب والتي تعتبر دوال حقيقية تعتمد على المتغيرين y, x حيث $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ لذلك تكتب الدالة $f(z)$ بالصورة التالية

$f(z) = w = u(x, y) + iv(x, y)$ وهي دالة ذات قيم معرفة على S.

ومن الجدير بالذكر هنا بأنه عند رسم الدالة العقدية فإننا لا يمكن أن نتخيل الرسم بسهولة كما هو معتاد عند رسم الدوال الحقيقية بل سيعتمد رسمنا للدالة العقدية على وصف تأثير الدالة على مجالها.

مثال٢-١: إذا كانت $f(z) = z^2$ فإن

$$f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

وهنا يكون لدينا

$$v(x, y) = 2xy \ , \qquad u(x, y) = x^2 - y^2$$

بينما في الحالة القطبية فإن

$$f(re^{i\theta}) = (re^{i\theta})^2 = r^2 e^{i2\theta} = r^2 \cos 2\theta + ir^2 \sin 2\theta$$

لذلك يكون

$$u(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta \quad v(r, \theta) = r^2 \sin 2\theta$$

ملاحظة٢-١: إذا كانت $u(x, y) = 0$ او $v(x, y) = 0$ فإن الدالة العقدية f تكون دالة ذات قيم حقيقية للمتغير العقدي.

مثال٢-٢: عبر عن الدالة $f(z) = 8x^2 + i8y^2$ بدلالة المتغيرين $z, \bar{z}$.

الحل: بما ان $Re\, z = x = \frac{z+\bar{z}}{2}\ , Im\, z = y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

فإن $f(z) = 8\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + i8\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2$

$$= 2z^2 + 4z\bar{z} + 2\bar{z}^2 - i\left(2z^2 - 4z\bar{z} + 2\bar{z}^2\right)$$

$$= (1-i)2z^2 + (4+4i)z\bar{z} + (1-i)2\bar{z}^2$$

٢-٢ الدالة المركبة متعددة القيم: (*Multiple valued complex function*)

يقال للدالة $w = f(z)$ المعرفة على المجال S بأنها دالة عقدية متعددة القيم إذا كان لكل نقطة $z \in S$ يقابلها عدة قيم $w = f(z)$.

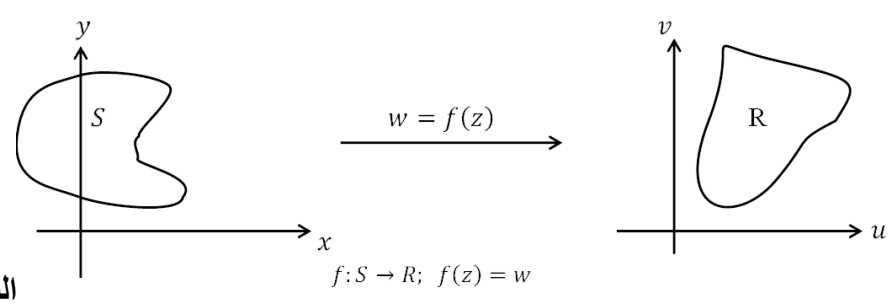
مثال٢-٣: لتكن الدالة $f(z)$ معرفة كالآتي:

$$w = f(z) = z^{\frac{1}{5}}$$

فإنها دالة خماسية القيم لأنه كل عدد $z \in S$ يوجد خمسة قيم للمتغير w.

٢-٣ التحويلات: (*Transformations*)

كما أسلفنا بأن دراسة خواص الدوال الحقيقية غالبا ما تفهم عن طريق التمثيل البياني لها ولكن عند الدوال العقدية من الصعب تمثيلها بيانيا بشكل ملائم بسبب كل من w, z تحدد بمستوي بدلاً من تحديدها على خط لذلك لمعرفة أي معلومة عن الدالة $f(z)$ يمكن تحديد مكانها بواسطة الزوج المرتب الذي يقابل النقاط $z =$, $w = (u, v)$ (x, y) ولفعل هذا نرسمها عن طريق المستوي z والمستوي w بشكل منفصل كما موضح بالشكل (٢-١).



الشكل (٢-١)

إذا كانت A مجموعة جزئية من S فإن المجموعة المعرفة كالآتي $B = \{f(z): z \in A\}$ تسمى صورة المجموعة A والدالة العقدية f تسمى تطبيقاً شاملاً من A إلى B وصورة الصورة العكسية للنقطة w هي مجموعة كل نقاط $z \in S$ بحيث أن $w = f(z)$ والصورة العكسية للنقطة w ممكن أن تكون نقطة أو مجموعة نقاط أو ليست كذلك وفي حالة حدوث أن الصورة العكسية ليست نقطة أو مجموعة نقاط فعلية تكون w لا تنتمي إلى مدى الدالة f.

u

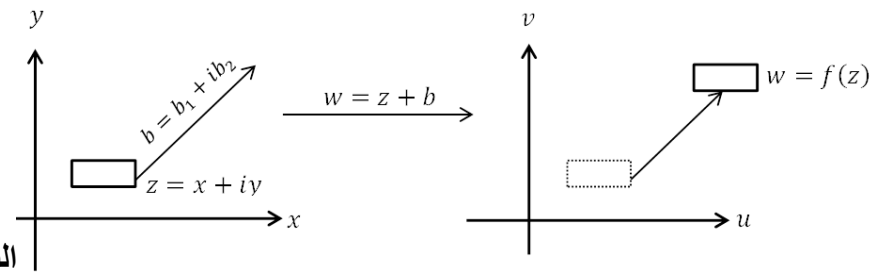
الإنتـقــال٢-١: (*Translation*)

يأخذ الصيغة $w = f(z) = z + b$ حيث b عدد معقد معرف بالشكل $b = b_1 + ib_2$. وأن تـأثير هذا على الدالة $f(z)$ هو أن صورة النقطـة (x, y) في المستوي z هي النقطـة $(x + b_1, y + b_2)$ في المستوي w لذلك صورة أي منطقة تنتقل z بنفس الكيفية لتلك المنطقة بنفس الشكل و الإتجاه فمثلاً صورة الخط المستقيم تكون خطاً مستقيـماً والدائـرة التي مركزها a ونصف قطرها r تكون دائرة مركزها $a + b$ ونصف قطرها r

أما الدالة العكسية لها فيمكن ملاحظتها كالآتي $z = f^{-1}(w) = w - b$

$$= u - b_1 + i(v - b_2)$$

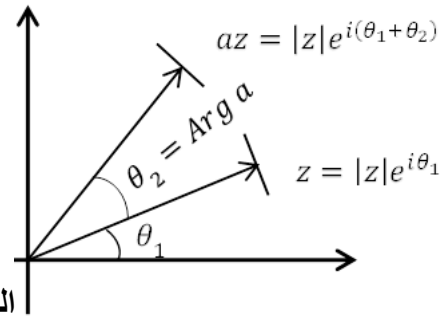
لرؤية هذا الإنتقال لاحظ الشكل (٢-٢).



الشكل (٢-٢)

الــدوران٢-٢: (*Rotational*)

يأخـذ الصـيغة $w = f(z) = az$ بحيـث أن $|a| = 1$. وأن تـأثير هـذا علـى الدالـة $f(z)$ هـو دوران عكـس عقرب الساعة بزاوية مقدارها $\theta = Arg\ a$ حول نقطة الأصل فلذلك تكون النقطـة التـي إحداثياتها (r, θ) في المستوي z تنتقل إلى النقطة $(r, \theta + \alpha)$ في المستوي w وصـورة الخـط المستقيم تكون أيضـاً مستقيماً وكذلك الدائرة ولتوضيح ذلك أنظر الشكل (٢-٣).



الشكل (٢-٣)

أما الدالة العكسية فيمكن ملاحظتها في $z = f^{-1}(w) = \overline{a}w$.

الإنعكاس٢-٣ : (*Reflexive*)

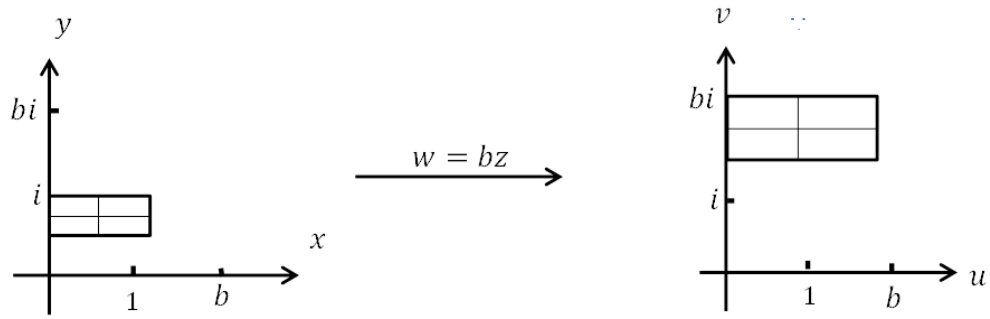
يأخذ الصيغة $w = f(z) = \overline{z}$. وان تأثير هذا على الدالة $f(z)$ هو أنه ينقل النصف العلوي من المستوي العقدي إلى النصف السفلي منه والعكس صحيح.

والدالة العكسية هي $z = f^{-1}(w) = \overline{w}$.

التكبير والإنكماش٢-٤: (*Magnification and Deflation*)

يأخذ الصيغة $w = bz\,, b > 0$. وأن تأثير هذا على الدالة $f(z)$ هو أنه النقطة ذات الإحداثيات القطبية (r, θ) في المستوي z تنتقل إلى النقطة (br, θ) في المستوي w ومن ثم فإن التحويل يمثل تكبير أو إنكماش حسب المعامل b لكونه $b > 1$ أو $b < 1$. وأيضاً تنقل المستقيم إلى مستقيم والدائرة إلى دائرة.

والدالة العكسية لها هي $z = f^{-1}(w) = \frac{1}{b}w$ ولتوضيح ذلك أنظر للشكل (٢-٤).



الشكل(٢-٤)

التحويل الخطي ٢-٥: (*Linear Transformation*)

لتكن $A = be^{i\theta}$, $B = b_1 + ib_2$ حيث $b > 0$ فإن التحويل $w = f(z) = Az + B$ هو تطبيق تقابلي(شامل ومتباين) من المستوي z الى المستويw ويسمى التحويل خطي. وهذا التحويل لو أمعنا النظر فيه لوجدنا أنه تركيب من التدوير والتكبير و الإنتقال وهذا واضح من خلال $\theta = Arg\ A$ كتدوير يتبعها تكبير بواسطة $k = |A|$ أما الإنتقال فهو من خلال المتجه $B = b_1 + ib_2$. أما التطبيق العكسي لهذا التطبيق فهو

$$z = f^{-1}(w) = \frac{1}{A}w - \frac{B}{A}$$

والتطبيق f تطبيق متباين وشامل من المستوي z الى المستوي w .

٢-٦ التحويل من نوع ($z^{\frac{1}{2}}, z^2$) :

التحويل $w = f(z) = z^2$ نستطيع تمثيله بالأحداثيات القطبية كالآتي $w = f(z) = r^2e^{i2\theta}$ حيث $-\pi < \theta \leq \pi, r > 0$ فإذا استخدمنا الإحداثيات القطبية للمستوي w، $w = \rho e^{i\emptyset}$ فإن التحويل $f(z) = z^2$

$$\emptyset = 2\theta \quad , \qquad \rho = r^2$$

أما إذا استخدمنا الإحداثيات الكارتيزية فإن التطبيق $w = z^2$ سيكون كالآتي

$$w = f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy = u + iv$$

لذلك $u = x^2 - y^2 \, , v = 2xy$

التحويل $w = z^{\frac{1}{2}}$ ممكن أن نعبر عنه بالصيغة القطبية كالآتي:

$$w = f(z) = z^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} \quad -\pi < \theta \leq \pi \ , \qquad r > 0$$

وكذلك إذا استخدمنا $w = \rho e^{i\emptyset}$ في المستوي w فإن التطبيق $w = z^{\frac{1}{2}}$ يكون $\rho = r^{\frac{1}{2}}$, $\emptyset = \frac{\theta}{2}$ وإذا استخدمنا الإحداثيات الكارتيزية سيكون

$$z = w^2 = u^2 - v^2 + i2uv$$

فإن التطبيق $z = w^2$ يعطى بالمعادلات الآتية:

$$x = u^2 - v^2, \qquad y = 2uv$$

<u>مثال ٢-٤:</u> إثبت أن الدالة $f(z) = iz$ تحول الخط $y = x + 2$ إلى $v = -u - 2$

الحل:

$$u + iv = f(z) = i(x + iy)$$

$$= -y + ix$$

لذلك نجد أن

$$u = -y$$

$$v = x$$

بتعويض قيم v, u في المعادلة $y = x + 2$ نستنتج أن

$$-u = v + 2$$

لذلك

$$v = -u - 2$$

<u>مثال ٢-٥:</u> تحت تأثير التحويل $w = iz + i$ بين أن نصف المستوي $x > 0$ يتحول إلى نصف المستوي $v > 0$.

الحل:

$$u + iv = f(z) = i(x + iy) + i$$

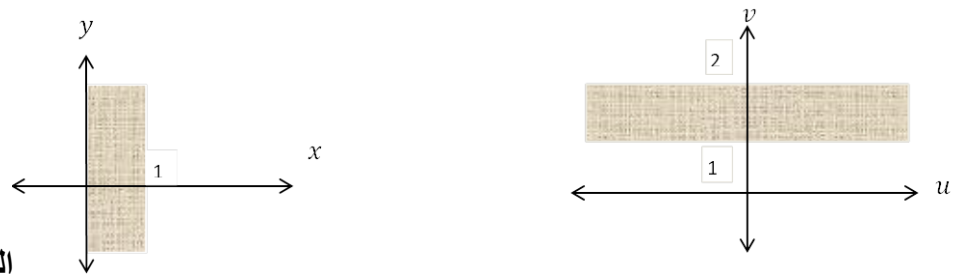
$$= ix - y + i$$

$$= i(x+1) - y = -y + i(x+1)$$

لذلك نجد أن $u = -y\,, v = x + 1$

إذن $0 < x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < v < 2$

وكما موضح بالشكل(٢-٥).



الشكل (٢-٥)

<u>مثال ٢-٦</u>: إثبت أن صورة القرص المفتوح $|z - 1 - i| < 2$ تحت تأثير التحويل $w = (1-i)z + 2i$ هو القرص المفتوح $|w + 2 - 2i| < 4$.

الحل: التحويل العكسي يعطى بالصيغة الآتية

$$z = \frac{w - 2i}{1 - i}$$

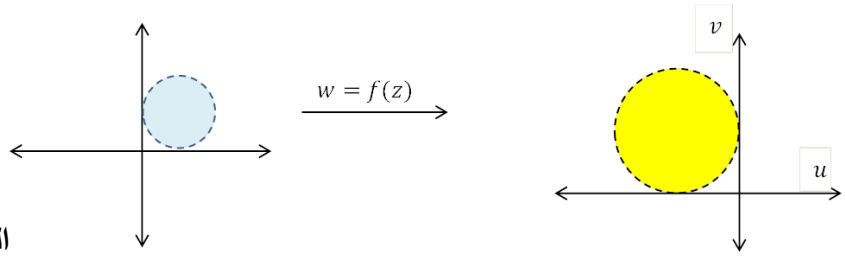
وبالتعويض يصبح لدينا

$$\left|\frac{w - 2i}{1 - i} - 1 - i\right| < 1$$

$$|w - 2i - (1+i)(1-i)| < 2$$

وبالتبسيط يكون

$$|w + 2 - 2i| < 2$$



الشكل (٢-٦)

مثال٢-٧: أوجد تمثيلاً هندسياً للدالة $w = f(z)$ المعرفة على المجال

$$D = \{z = x + i : 0 \le x \le 2\}$$

حيث $w = z^2$

الحل: لاحظ أن

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - 1) + i(2x) = u + iv$$

لذلك $u = x^2 - 1, \qquad v = 2x$

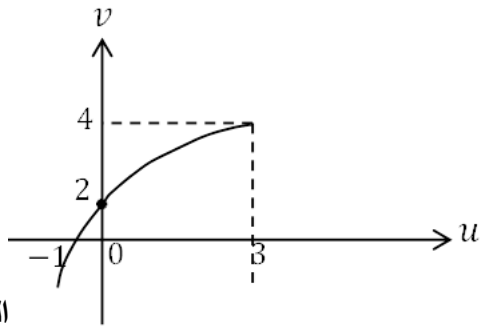
وبالتعويض عن قيمة x نحصل على

$$u = \left(\frac{v}{2}\right)^2 - 1$$

وهي معادلة قطع مكافئ في المستوي w حيث $-1 \le u \le 3$

لأن $u = x^2 - 1$ وأن $0 \le x \le 2$ وأيضاً لدينا $0 \le v \le u$

بسبب $v = 2x$ وان $0 \le x \le 2$. أنظر الشكل $(2 - 7)$.



الشكل (٢-٧)