كلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الرياضيات

المرحلة: الرابعة

أستاذ المادة : أ.د. عبد الرحمن سلمان جمعة

اسم المادة باللغة العربية : التحليل العقدي

اسم المادة باللغة الإنكليزية : Complex analysis

اسم الحاضرة الرابعة باللغة العربية: الغايات والاستمرارية

اسم المحاضرة الرابعة باللغة الإنكليزية : Limits and Continuous

٢-٤ الغايات والاستمرارية : (*Limits and Continuous*)

تعريف٢-٢ : لتكن الدالة المركبة f معرفة على كل نقاط الجوار للنقطة z_0 ماعدا z_0 ذاتها فإن غاية الدالة $f(z)$ عندما z تقترب من z_0 هي العدد w_0 أو بعبارة اخرى

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$$

وتحليلياً يكون التعريف مكافئ للتعريف الآتي :

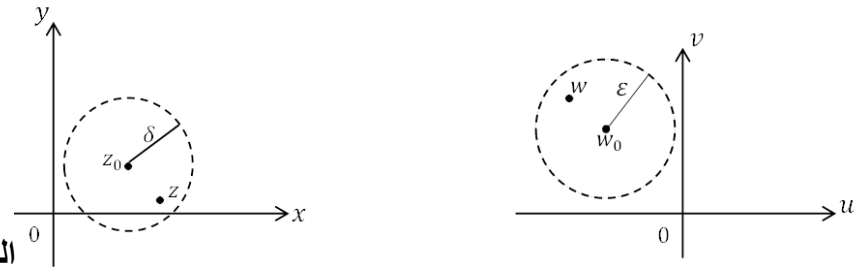
لكل عدد موجب ε يوجد عدد موجب δ بحيث أن

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon$$

متى ما كانت

$$.\, 0 < |z - z_0| < \delta$$

وهندسياً يكون أن لأي جوار ε , $|w - w_0| < \varepsilon$ للنقطة w_0 يوجد جوار لـ δ $0 < |z - z_0| <$, δ للنقطة z_0 بحيث أن كل نقطة z التي تكون صورتها w تقع داخل الجوار ε كما في الشكل (٢-٨).



الشكل (٢-٨)

وهنا جدير بالذكر أنه عند دراسة الغايات في الدوال المركبة يجب أن يكون لدينا الدقة بالتمييز بينها وبين الدوال الحقيقية حيث أن في الدوال الحقيقية الجوار δ يمثل فترة مركزها x_0 ونصف قطرها δ بينما في الدوال المركبة فإن الجوار δ يمثل قرص مركزه z_0 ونصف قطره δ وهذا ينطبق على جوار ε في الجملة $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ وهذه الملاحظة تفقد فكرتي النهاية من اليمين واليسار حيث الإقتراب للنقطة x_0 يكون أما من اليمين أو اليسار فقط. أما في الدوال المركبة حيث أن الجوار هو قرص مركزه z_0 ونصف قطره δ فإن الإقتراب يكون عبر مسارات لانهائية . u

ملاحظة٢-٢: الغاية للدالة $f(z)$ إن وجدت فإنها تكون وحيدة ولبرهنة هذه الملاحظة . لنفرض أن

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \qquad \text{و} \qquad \lim_{z\to z_0} f(z) = w_1$$

لذلك لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta_1, \delta_0 > 0$ بحيث أن

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon$$

عندما يكون $0 < |z - z_0| < \delta_0$

و

$$|f(z) - w_1| < \varepsilon$$

عندما يكون $0 < |z - z_0| < \delta_1$

وعليه يكون

$$|w_1 - w_0| = |(f(z) - w_0) - (f(z) - w_1)|$$

$$\leq |f(z) - w_0| + |f(z) - w_1| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

ولكن $|w_1 - w_0|$ عدد غير سالب، ε عدد يمكن اختياره كأصغر ما يمكن لذلك $w_1 = w_0$ أو $|w_1 - w_0| = 0$.

مثال٢-٨: جد الغاية للدالة $f(z) = \frac{z^2-4}{z-2}$ عندما $z \to 2$ باستخدام التعريف .

الحل: لاحظ أن الدالة غير معرفة عند $z = 2$ لذلك يمكن استخدام فكرة التحليل البسيط كالآتي:

$$f(z) = \frac{(z+2)(z-2)}{z-2} = z + 2$$

إذن يكون باعتبار $\varepsilon > 0$ نختار $\delta = \varepsilon$

يكون $0 < |z - 2| < \delta$

يؤدي إلى $|f(z) - f(z_0)| = |z + 2 - 4| = |z - 2| < \varepsilon$

إذن $\lim_{z \to 2} f(z) = 4$

مثال٢-٩: إثبت ان $lim_{z \to i} z^2 = -1$.

الحل: لتكن $\varepsilon > 0$ يجب أن نجد $\delta > 0$ بحيث يكون $0 < |z - i| < \delta$ يقابل $|z^2 + 1| < \varepsilon$. الآن نعيد كتابة

$$|z^2 + 1| = |z - i||z + i| < \delta|z + i|$$

إذا اخترنا $\delta < 1$ فإن $|z+i|$ يكون مقيدا بالعدد ٣ وهذا يعني أنه لأي $\delta < max\left\{\frac{\varepsilon}{3}, 1\right\}$ فإن في هذه الحالة يكون

$$0 < |z-i| < \delta$$

يؤدي إلى $\delta < \varepsilon \quad |z^2+1| < \varepsilon$

وهذا يؤدي إلى أن

$$\lim_{z \to i} z^2 = -1$$

<u>مثال٢-١٠:</u> إثبت انه إذا كان

$$f(z) = \frac{i\bar{z}}{2}$$

المعرفة على القرص $|z| < 2$ فإن

$$\lim_{z \to 2} f(z) = i$$

الحل: لاحظ أن العدد ٢ يقع على حدود القرص $|z| < 2$ وأيضاً عندما z تقع في القرص $|z| < 2$ فإن

$$|f(z) - i| = \left|\frac{i\bar{z}}{2} - i\right| = \left|\frac{z-2}{2}\right|$$

لذلك لأي z ، أي عدد $\delta > 0$ فإن

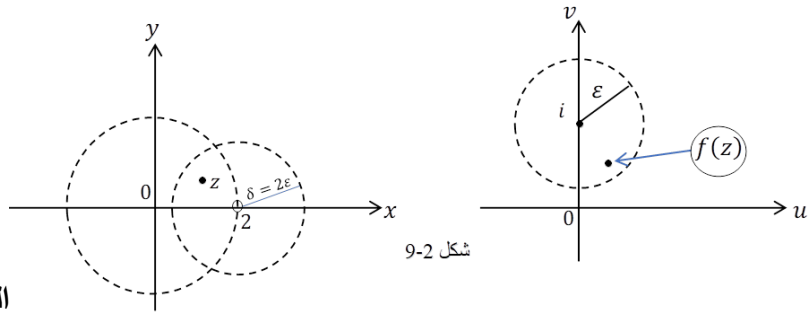
$$|f(z) - i| < \varepsilon$$

عندما يكون

$$0 < |z-2| < 2\varepsilon$$

لذلك نختار $\delta = 2\varepsilon$ أصغر ما يمكن وكما موضح بالشكل (٢-٩).

u



شكل 2-9

الشكل (٢-٩)

<u>مثال٢-١١:</u> إثبت إن الغاية للدالة $f(z) = \frac{\overline{z}}{z}$ عندما $z \to 0$ غير موجودة.

الحل: لبرهنة ذلك دعنا نجد الغاية $z \to 0$ على الاحداثي الحقيقي x والتخيلي y.

في الحالة الأولى لتكن $z = x \in \mathbb{R}$ إذن

$$\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z} = \lim_{x\to 0}\frac{\overline{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$$

في الحالة الثانية لتكن $z = iy,\ y \in \mathbb{R}$ فإن

$$\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z} = \lim_{y\to 0}\frac{\overline{iy}}{iy} = \lim_{y\to 0}\frac{iy}{iy} = -1$$

لذلك سنحصل على قيمتين مختلفتين للغاية تعتمد على إتجاه التقارب من الصفر لذلك هذا يؤدي إلى ان الغاية غير موجودة .

<u>تعريف ٢-٣:</u> عندما تكون النقطة ∞ (المالانهاية) مع حقل الأعداد العقدية عندئذٍ يطلق عليه حقل الأعداد العقدية الموسعة.

وهنا سندرس الغاية ومفهومها للدوال العقدية عندما يقترب المتغير z من المالانهاية (∞) ومن تعريف الغاية سابقاً سنقوم بتغيير بسيط لجوار النقاط w_0 , z_0 بجوارات ∞ والنظرية الآتية ستبين كيف يتم هذا.

<u>نظرية ٢-١:</u> لتكن z_0 نقطة في المستوي z , w_0 نقطة في المستوي w فإن :

أ. $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)} = 0$

ب. $\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$

ج. $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{z\to 0} \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = 0$

البرهان:

أ. لتكن $lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ لذلك لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن

$$|f(z)| > \frac{1}{\varepsilon}$$

عندما $0 < |z - z_0| < \delta$

وهذا يعني $w = f(z)$ تقع داخل الجوار $|w| > \frac{1}{\varepsilon}$ للنقطة ∞ متى ما كانت z تقع داخل الجوار $0 < |z - z_0| < \delta$

وعليه يكون $\left|\frac{1}{f(z)} - 0\right| < \varepsilon$ عندما $0 < |z - z_0| < \delta$

لذلك يكون $lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$

ب. لتكن $lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$ لذلك لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن عندما $|z| > \frac{1}{\delta}$ يكون $|f(z) - w_0| < \varepsilon$. ضع $\frac{1}{z}$ محل z لذلك $\left|f\left(\frac{1}{z}\right) - w_0\right| < \varepsilon$

عندما $0 < |z - 0| < \delta$ وهو المطلوب.

الحالات الاخرى تترك تمرين للطالب.

<u>مثال ٢-١٢:</u> جد قيمة مايلي :

$$\lim_{z\to -1} \frac{iz - 2}{z + 1}$$

الحل: بما أن $lim_{z\to -1} \frac{z+1}{iz-2} = 0$ لذلك يكون حسب النظرية ٢-١ أعلاه

$$\lim_{z\to -1} \frac{iz - 2}{z + 1} = \infty$$

<u>مثال ٢-١٣:</u> إثبت ان $lim_{z\to\infty} \frac{3z+i}{z+2} = 3$.

الحل:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\left(\frac{3}{z}\right)+i}{\left(\frac{1}{z}\right)+2}=\lim_{z\to\infty}\frac{3+iz}{1+2z}=3$$

لذلك بواسطة النظرية ٢-١ أعلاه يكون

$$\lim_{z\to\infty}\frac{3z+i}{z+2}=3$$

<u>مثال٢-١٤:</u> إثبت أن $\lim_{z\to\infty}\frac{2z^5-1}{z^4+1}=\infty$.

الحل:

بما أن

$$\lim_{z\to 0}\frac{\left(\frac{1}{z^4}\right)-1}{\left(\frac{2}{z^5}\right)+1}=\lim_{z\to 0}\frac{z(1-z^4)}{2+z^5}=0$$

لذلك بواسطة نظرية ٢-١ يكون

$$\lim_{z\to\infty}\frac{2z^5-1}{z^4+1}=\infty$$

<u>نظرية ٢-٢:</u> لتكن $w=f(z)=u+iv$ دالة عقدية حيث w معرف بجوار النقطة $z_0=x_0+iy_0$ ما عدا z_0 ذاتها .

وليكن $w_0=u_0+iv_0$ حيث $u_0=u_0(x_0,y_0)$, $v_0=v_0(x_0,y_0)$ عندئذٍ يكون

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=w_0$$

إذا وفقط إذا كان

$$\begin{cases}\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(x,y)=u_0\\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(x,y)=v_0\end{cases}\qquad (1)$$

و

البرهان: نفرض (1) صحيحة لذلك لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta_1>0$, $\delta_2>0$ بحيث أن

إذا كان $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta_1$ فإن $|u-u_0|<\frac{\varepsilon}{2}$

و $0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta_2$ فإن $|v-v_0| < \frac{\varepsilon}{2}$

فإذا فرضنا أن δ أصغر من δ_1 , δ_2 فبما أن

$$|(u+iv)-(u_0-iv_0)\ | = |(u-u_0)+i(v-v_0)| \le |u-u_0|+|v-v_0|$$

و

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = |(x-x_0)+i(y-y_0)| = |(x+iy)-(x_0+iy_0)|$$

فلذلك إذا كان

$$0 < |(x+iy)-(x_0+iy_0)| < \delta$$

فإن

$$|(u+iv)-(u_0-iv_0)\ | < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وهذا يبرهن أن

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$$

ولبرهنة الإتجاه المعاكس نفرض أن

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$$

فمن التعريف يكون لدينا أن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن

$$|z-z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z)-w_0| < \varepsilon$$

ومن تعريف مقياس العدد العقدي فإنه

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \ \Longrightarrow |f(z)-w_0| < \varepsilon$$

وبما أن

$$|u(x,y)-w_0| = |Re\ (f(z)-w_0| \le |f(z)-w_0|$$

$$|v(x,y)-w_0| = |Im\ (f(z)-w_0| \le |f(z)-w_0|$$

ومن العلاقتين أعلاه نستنتج أن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \ \Longrightarrow\ |u(x,y)-u_0| < \varepsilon,$$

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \implies |v(x,y) - v_0| < \varepsilon$$

وهذا مكافئ للعلاقة (1).

مثال٢-١٥: أوجد نهاية الدالة العقدية

$$f(z) = \frac{x}{x^4+y^4} + i\,\frac{2x^2 - yx}{y^4+1}$$

عندما $z \to 1 - i$

الحل: من الدالة $f(z)$ نستطيع أن نلاحظ أن

$$u(x,y) = \frac{x}{x^4+y^4}\ , v(x,y) = \frac{2x^2 - yx}{y^4+1}$$

لذلك

$$\left.\begin{matrix} x_0 = 1 \\ y_0 = -1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow z_0 = 1 - i$$

والآن يكون

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x}{x^4+y^4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{2x^2 - yx}{y^4+1} = \frac{1}{2}$$

إذن يكون $u_0 = \frac{1}{2}\ ,\quad v_0 = \frac{1}{2}$ وبالتالي حسب النظرية

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 = u_0 + iv_0$$

$$\lim_{z\to 1+i} f(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

نـــظريـــة٢-٣: ليكن g, f دالتين لهما نهايتين عند النقطة z_0 فإذا كانت

$$\lim_{z\to z_0} g(z) = w_0 \quad , \quad \lim_{z\to z_0} f(z) = w_1$$

فإن

1. $\lim_{z\to z_0} [f(z) \mp g(z)] = w_0 \mp w_1$
2. $\lim_{z\to z_0} [f(z)g(z)] = w_0 w_1$

3. $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_0}{w_1}$

البرهان: يترك تمرين للطالب

<u>تعريف ٢-٤ الاستمرارية:</u> (***The continuity***)

ليكن $f(z)$ دالة عقدية معرفة على المجال D الذي يحوي z_0 ، يقال أن الدالة f مستمرة عند النقطة z_0 إذا كان

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z)$$

وبعبارة أخرى الدالة f مستمرة عند النقطة z_0 إذا تحقق الشرط الآتي :

لكل $z \in D , \varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن

$|z - z_0| < \delta$ يؤدي إلى $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

<u>نظريـــة٢-٤:</u> إذا كان g, f دالتين مستمرتين عند النقطة z_0 التي تنتمي للمجال المشترك D فإن:

أ. الدالة $(\alpha f + \beta g)$ مستمرة عند z_0.

ب. الدالة $f.g$ مستمرة في النقطة z_0.

ج. الدالة f/g مستمرة في النقطة z_0 بشرط $g \neq 0$.

البرهان يترك تمرين للطالب.

<u>نظرية٢-٥:</u> إذا كانت f مستمرة عند النقطة z_0 والدالة g مستمرة عند النقطة $f(z_0)$ فإن $g \circ f$ مستمرة عند النقطة z_0.

البرهان: من تعريف الإستمرارية للدالة g عند النقطة $f(z_0)$ فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث

$$|w - f(z_0)| < \delta_1 \Rightarrow \left|g(w) - g\big(f(z_0)\big)\right| < \varepsilon$$

وكذلك بما أن f مستمرة عند النقطة z_0 فإنه لكل $\varepsilon_1 > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon_1$$

وبفرض ان $w = f(z)$ ، $\delta_1 = \varepsilon_1$ نستنتج أن

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon_1 \Rightarrow \left|g(w) - g\big(f(z_0)\big)\right| < \varepsilon$$

وبهذا أثبتنا أن $g \circ f$ مستمرة عند النقطة z_0.

وهنا من الجدير بالملاحظة أننا نقول للدالة $f(z)$ مستمرة في النقطة $z_0 = x_0 + iy_0$ إذا كان $u(x,y)\,,v(x,y)$ مستمرة عند (x_0, y_0).

مثال٢-١٧: الدالة الآتية $f = \sin x + ie^{2xy}$ مستمرة وذلك لأن $u(x,y) = \sin x$ و $v(x,y) = e^{2xy}$ مستمرة لجميع قيم x, y الحقيقية.

ملاحظة٢-٣: إذا كانت f مستمرة على المجال D فهي تكون بالضرورة مستمرة عند x باعتبار y ثابت وكذلك مستمرة عند y باعتبار x ثابت والعكس غير صحيح أي أن الإستمرارية للمتغير x عند z_0 وكذلك للمتغير y عند z_0 لايؤدي بالضرورة إلى الإستمرارية بالنسبة للمتغير z عند z_0 وفيما يلي مثال يوضح هذه الحالة.

مثال ٢-١٨: لتكن

$$f(z) = f(x+iy) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 - y^2} & , \ z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$$

فإذا فرضنا أن الدالة بالنسبة إلى x باعتبار y غير موجود وكذلك العكس نجد أن

$$f\big(x + i(0)\big) = \varphi(x) = \frac{0 \cdot (2x)}{x^2} = 0 \qquad , x \neq 0$$

إذا كانت $\varphi(x)$ مستمرة عند $(0,0)$ حيث

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \varphi(x) = 0 = f(0) = \varphi(0)$$

وأيضاً بالنسبة إلى y فإن

$$f(0 + iy) = \psi(y) = \frac{0 \cdot (2y)}{-y^2} = 0 \qquad , y \neq 0$$

$$\lim_{\substack{y \to 1 \\ x \to 0}} \psi(y) = 0 = f(0) = \varphi(0)$$

أي أن $\psi(y)$ مستمرة عند $(0,0)$.

ولكن إذا اعتبرنا أن $z = (x + iy) \to 0$ عن طريق المسار $y = my$

$$f(z) = \frac{2mx^2}{x^2 - m^2x^2} = \frac{m}{1 - m^2} \quad , z \neq 0$$

لذلك $lim_{z\to 0} f(z)$ تعتمد على طريقة وصول z الى الصفر لذلك تكون الغاية غير موجودة وبالتالي $f(z)$ غير مستمرة عند $z \neq 0$.

٢-٥ الإستمرارية المنتظمة : (*Uniform Continuity*)

تعريف٢-٤: إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يمكن إيجاد $\delta > 0$ بحيث أن $|z_1 - z_2| < \delta$ فإن $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ حيث z_2, z_1 أي نقطتين اختياريتين ضمن المجال .

لاحظ في هذا التعريف أن اختيار δ يعتمد على ε ولا يعتمد على z_2, z_1 فقط.

مثال ٢-١٩: إثبت أن $f(z) = z^2$ منتظمة الإستمرارية في المنطقة $|z| < 1$ لكنها غير منتظمة الاستمرارية في الحقل $\mathbb{C}$.

الحل: ليكن z_2, z_1 أي نقطتين في المجال $|z| < 1$ لذلك إذا كان

$$|f(z_1) - f(z_2)| = |z_1^2 - z_2^2| = |z_1 - z_2||z_1 + z_2|$$

$$\leq |z_1 - z_2|(|z_1| - |z_2|) < 2|z_1 - z_2| \qquad (|z| < 1)$$

$$|z_1 - z_2| < \delta \to |f(z_1) - f(z_2)| < 2\delta$$

الآن ليكن $\varepsilon > 0$ فنضع $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ لذلك يكون لدينا

$$|z_1 - z_2| < \delta \to |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$$

وهو المطلوب من النظرية .

مثال ٢-٢٠: إثبت أن الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ غير منتظمة الإستمرارية في المنطقة $0 < |z| < 1$.

الحل: ليكن $\varepsilon > 0$ ولتكن $0 < \delta < 1$ و z_2, z_1 عددين في المجال $|z| < 1$ حيث $z_1 = \delta$، $z_2 = \frac{\delta}{1+\varepsilon}$. نلاحظ أن

$$|z_1 - z_2| = \left|\delta - \frac{\delta}{1+\varepsilon}\right| < \delta$$

بينما

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \left|\frac{1}{\delta} - \frac{1+\varepsilon}{\delta}\right| = \left|\frac{\varepsilon}{\delta}\right| > \varepsilon$$

لذلك من التعريف نجد أن الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ غير منتظمة الإستمرارية في المجال $0 < |z| < 1$. الآن سنعطي بعض الحقائق المهمة بدون برهان.

<u>ملاحظـة٢-٤</u>: إن الدالة منتظمة الإستمرارية تكون مستمرة والعكس غير صحيح ، أما إذا كانت الدالـة مستمرة في مجال مغلق فإنها تكون منتظمة الإستمرارية.