كلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الرياضيات

المرحلة: الرابعة

أستاذ المادة : أ.د. عبد الرحمن سلمان جمعة

اسم المادة باللغة العربية : التحليل العقدي

اسم المادة باللغة الإنكليزية : Complex analysis

اسم الحاضرة الخامسة باللغة العربية: الدوال القابلة للإشتقاق

اسم المحاضرة الخامسة باللغة الإنكليزية : Differentiable functions

٢-٦ الدوال القابلة للإشتقاق: (*Differentiable functions*)

تعريف٢-٥: لتكن f دالة عقدية معرفة على كل نقاط الجوار للنقطة z_0 فإن مشتقة الدالة f عند z_0 تكتب بالشكل $f'(z_0)$ وتعرف بالمعادلة

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \qquad (2)$$

بشرط أن الغاية موجودة.

ونقول الدالة f قابلة للإشتقاق عند النقطة z_0 إذا تحقق الشرط أعلاه فإذا وضعنا $\Delta z = z - z_0$ في المعادلة(2) فإن $f'(z_0)$ يمكن إعادة صياغتها بالصورة

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

الآن لتكن $w = f(z)$, $\Delta w = f(z) - f(z_0)$ فإن الرمز $\frac{dw}{dz}$ للمشتقة يكون معرفاً كالآتي

$$f'(z_0) = \frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

مثال ٢-٢١: لتكن $f(z) = z^4$ إستخدم التعريف لإيجاد $f'(z)$.

الحل:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{z^4 - {z_0}^4}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0)(z^2 + {z_0}^2)}{z - z_0} = 4{z_0}^3$$

وبشكل عام فإن الصيغة النهائية للمشتقة بعد إسقاط z_0 تكون $f'(z) = 4z^3$ ومن الجدير بالذكر هنا أن خواص مشتقات الدوال العقدية هي نفسها خواص مشتقات الدوال الحقيقية بالإضافة عند حساب الغاية فيجب أن ننتبه للقيم العقدية Δz حيث الغاية لهذه القيمة لاتعتمد على مسار $\Delta z \longrightarrow 0$ فإذا وجدنا مسارين مختلفين لهذه الغاية فإن الدالة العقدية تكون غير قابلة للإشتقاق وتوضيح ذلك في المثال الآتي:

مثال ٢-٢٢: إذا كانت الدالة $f(z) = \overline{z}$ ، اثبت أنها غير قابلة للإشتقاق .

الحل:

ندرس الغاية لمسارين مختلفين للنقطة ، فإذا كان الإقتراب الأول للنقطة z_0 على طول الخط الموازي للمحور الحقيقي فإن $z = x + iy_0$ ، وعليه يكون

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x+iy_0) \to (x_0+iy_0)} \frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{(x + iy_0) - (x_0 + iy_0)}$$

$$= \lim_{(x+iy_0) \to (x_0+iy_0)} \frac{(x - iy_0) - (x_0 - iy_0)}{(x - x_0) + i(y_0 - y_0)}$$

$$= \lim_{(x+iy_0) \to (x_0+iy_0)} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

أما إذا كان الإقتراب للنقطة z_0 على طول الخط الموازي للمحور التخيلي y فإن $z = x_0 + iy$ وعليه يكون

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x+iy_0) \to (x_0+iy_0)} \frac{f(x_0 + iy) - f(x_0 + iy_0)}{(x_0 + iy) - (x_0 + iy_0)}$$

$$= \lim_{(x+iy_0) \to (x_0+iy_0)} \frac{(x_0 - iy) - (x_0 - iy_0)}{(x_0 - x_0) + i(y - y_0)}$$

$$= \lim_{(x+iy_0) \to (x_0+iy_0)} \frac{-i(y - y_0)}{i(y - y_0)} = -1$$

ومن أعلاه نجد أن $f(z) = \overline{z}$ غير قابلة للإشتقاق لإختلاف قيمة الغاية.

<u>مثال ٢-٢٣:</u> لتكن الدالة العقدية المعرفة بدلالة القيم الحقيقية كالآتي $f(z) = |z|^2$ إثبت أن المشتقة موجودة فقط عند الصفر وليس في أي مكان آخر.

الحل:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{|z + \Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)\left(\overline{z} + \overline{\Delta z}\right) - z\overline{z}}{\Delta z} \qquad (3)$$

$$= \overline{z} + \overline{\Delta z} + z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

وكما في المثال أعلاه وبنفس الإتجاهات إلى النقطة ٠ يكون لدينا $\overline{\Delta z} = -\Delta z, \overline{\Delta z} =$ Δz على الترتيب وعليه عندما يكون $\Delta z = (\Delta x, 0)$ فإن

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \overline{z} + \Delta z + z$$

وعندما $\Delta z = (0, \Delta y)$

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \overline{z} - \Delta z - z$$

وهنا إذا كانت الغاية موجودة ووحيدة عندما $\Delta z \longrightarrow 0$ فإن

$$\overline{z} + z = \overline{z} - z$$

وعليه فإن $\frac{dw}{dz}$ غير موجودة عند $z \neq 0$ ولإثبات أن $\frac{dw}{dz}$ موجودة فإنه من العبارة (3)

$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \overline{\Delta z}$ وعندما $z = 0$ ونستنتج أن $\frac{dw}{dz}$ موجودة.

بينما هذه الدالة مستمرة عند كل نقاط المستوي لذلك الإستمرارية للدالة عند نقطة لا تؤدي إلى قابلية الإشتقاق للدالة بينما إذا كانت الدالة قابلة للإشتقاق عند نقطة فإنها مستمرة عند تلك النقطة ولبرهنة ذلك نفرض أن الدالة $f(z)$ قابلة للإشتقاق عند z_0 ونكتب هذا رياضياً كالآتي:

$$\lim_{z \to z_0} \left(f(z) - f(z_0)\right) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \to z_0} (z - z_0)$$

$$= f'(z_0) \cdot 0 = 0$$

ومن هذا نجد أن

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

وهذا تعريف مكافئ للإستمرارية للدالة f عند نقطة z_0 .

<u>٢-٧ خواص الدوال القابلة للإشتقاق :</u>

سنعرض هنا قواعد الدوال القابلة للإشتقاق والتي تعتبر غير مختلفة عن خواصها في الدوال الحقيقية شكلاً وسنترك البرهان تمريناً للطالب.

نظرية ٢-٦: لتكن كل من g, f دوال قابلة للإشتقاق عند النقطة z ، فإن

1. $\left(cf(z)\right)' = cf'(z)$
2. $(f \mp g)'(z) = f'(z) \mp g'(z)$
3. $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{\left(g(z)\right)^2} \quad , \qquad g(z) \neq 0$
5. $(f \circ g)'(z) = f'\left(g(z)\right)g'(z)$
6. إذا كانت $f(z) = c$ فإن $f'(z) = 0$
7. إذا كانت $f(z) = z^n$ فإن $f'(z) = nz^{n-1}$

٢-٨ معادلتي كوشي – ريمان: (*Cauchy-Riemann's Equations*)

في هذا البند نحصل على زوج من المعادلات ذات المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدوال الحقيقية v, u للدالة العقدية القابلة للإشتقاق عند z_0 والتي تكون بالشكل الآتي:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

وهذا الزوج من المعادلات أكتشف سابقاً من قبل العالم الرياضي الفرنسي *A.L. Cauchy* والعالم الألماني *G.F. Riemann*.

ونبدأ بوضع

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \,, \Delta z = \Delta x + i\,\Delta y \;, \qquad z_0 = x_0 + iy_0$$

$$= [u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)]$$

$$+ i[v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]$$

لنفرض أن المشتقة $f'(z_0)$ تعطى بالصورة الآتية:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \qquad (4)$$

موجودة ، لذلك يكون لدينا

$$f'(z_0) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left(Re\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) + i \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left(Im\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)$$

ومن خلال ما ورد أعلاه فإن $(\Delta x,\Delta y)$ تذهب إلى $(0,0)$ بأي طريقة نختاره وبصورة خاصة إذا كان الأقتراب إلى $(0,0)$ أفقياً خلال النقطة $(\Delta x, 0)$ فإن $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ تصبح

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0)}{\Delta x} + i\frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

لذلك

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left(Re\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} = u_x(x_0, y_0)$$

ويكون

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left(Im\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} = v_x(x_0, y_0)$$

حيث أن v_x, u_x هي المشتقات الجزئية الأولية بالنسبة للمتغير x عند النقطة (x_0, y_0) وبالتعويض في (4) نستنتج أن

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

والآن وبنفس الطريقة بإمكاننا أن ندع $\Delta z \longrightarrow 0$ عمودياً خلال النقطة $(0,\Delta y)$ فإن $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ تصبح

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\,\Delta y} + i\frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\,\Delta y}$$

$$= v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) - i\frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

لذلك يكون

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left(Re\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} = v_y(x_0, y_0)$$

وأيضاً يكون

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left(Im\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{\Delta y}=-u_y(x_0,y_0)$$

حيث أن v_y, u_y هي المشتقات الجزئية الأولية بالنسبة للمتغير y عند النقطة (x_0,y_0) وبالتعويض في (4) نستنتج أن

$$f'(z_0)=v_y(x_0,y_0)+iu_y(x_0,y_0)$$

$$=-i\left[u_y(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)\right]$$

ومن قيم المشتقة $f'(z_0)$ في كلتا الحالتين نستنتج أن

$$u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)\ ,\qquad u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0)$$

وهما معادلتي كوشي وريمان (***Cauchy-Riemann Equations***).

ومن الممكن تلخيص النتائج التي حصلنا عليها أعلاه كالآتي من خلال إعطاء الشرط الضروري لتحقيق معادلتي كوشي ريمان .

<u>نظرية٢-٧:</u> لتكن $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $f'(z_0)$ موجودة عند النقطة $z_0=x_0+iy_0$ فإن المشتقات الجزئية الأولى للدوال v,u موجودة عند النقطة (x_0,y_0) وتحقق معادلتي كوشي – ريمان

$$u_x=v_y\ ,u_y=-v_x$$

والدالة $f'(z_0)$ يمكن كتابتها بالصورة

$$f'(z_0)=u_x+iv_x$$

<u>مثال ٢-٢٤:</u> لتكن $f(z)=z^4$ إثبت انها تحقق معادلتي كوشي-ريمان .

الحل: نعيد كتابة الدالة $f(z)$ القابلة للإشتقاق بدلالة $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ لذلك يكون لدينا

$$f(z)=x^4+y^4-6x^2y^2+4i(x^3y-xy^3)$$

إذن

$$v(x,y)=4(x^3y-xy^3),\qquad u(x,y)=x^4+y^4-6x^2y^2$$

الآن نجد كل من $v_y\ ,v_x\ ,u_y\ ,u_x$

$$u_x=4x^3-12xy^2\ ,\qquad v_x=4(3x^2y-y^3)$$

$$u_y=4y^3-12x^2y,\qquad v_y=4(x^3-3xy^2)$$

نلاحظ أن معادلتي كوشي-ريمان متحققة حيث أن

$$u_x = v_y \quad , u_y = -v_x$$

الآن نعطي الشرط الكافي لكي تكون الدالة قابلة للإشتقاق من خلال النظرية الاتية حيث أن الدالة التي تحقق كوشي-ريمان ليس بالضرورة أن تكون قابلة للإشتقاق.

<u>نظرية٢-٨:</u> لتكن الدالة $f(z)$ معرفة كالآتي:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

خلال جوار النقطة $z_0 = (x_0, y_0)$ ونفرض أن

أ. المشتقات الجزئية الأولى للدوال v, u موجودة عند كل نقطة من نقاط الجوار.

ب. المشتقات الجزئية الأولى للدوال v, u أيضاً مستمرة عند (x_0, y_0) وتحقق معادلتي كوشي-ريمان

$$u_x = v_y \, , u_y = -v_x$$

عند (x_0, y_0) ، فإن الدالة $f(z)$ قابلة للإشتقاق عند (x_0, y_0) وقيمة المشتقة عندئذٍ هي

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

البرهان: ليكن الشرطان الأول والثاني متحققان ولتكن $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$ حيث $0 < |\Delta z| < \varepsilon$

بالإضافة $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$

$$= \Delta u + i \Delta v$$

حيث

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)$$

$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)$$

وعليه يكون لدينا

$$\Delta u = u_x(x_0, y_0) \Delta x + u_y(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

$$\Delta v = v_x(x_0, y_0) \Delta x + v_y(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y$$

حيث $\varepsilon_i \to 0 \quad (i = 1,2,3,4)$

عندما $(\Delta x, \Delta y) \longrightarrow (0,0)$

بالتعويض عن قيم $\Delta v, \Delta u$ في المعادلة نحصل على

$$\Delta w = u_x(x_0, y_0)\,\Delta x + u_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y +$$

$$i\left[v_x(x_0, y_0)\,\Delta x + v_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_3\,\Delta x + \varepsilon_4\,\Delta y\right]$$

ومن معادلتي كوشي-ريمان حيث

$$u_x = v_y\,, u_y = -v_x$$

لذلك يكون

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}$$

ولكن $|\Delta y| < |\Delta z|\,, |\Delta y| < |\Delta z|$ هذا يؤدي الى

$$\frac{\Delta y}{\Delta z} \le 1, \qquad \frac{\Delta x}{\Delta z} \le 1$$

ونستنتج أن

$$\left|(\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| \le |\varepsilon_1 + i\varepsilon_3| \le |\varepsilon_1| + |\varepsilon_3|,$$

$$\left|(\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \le |\varepsilon_2 + i\varepsilon_4| \le |\varepsilon_2| + |\varepsilon_4|$$

وهذا يعني أن الطرف الأيمن لكلا المتغيرين يذهبان للصفر كما المتغير $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$ يقترب من الصفر لذلك تكون الدالة $f'(z_0)$ موجودة.

<u>مثال ٢-٢٥</u>: اثبت ان الدالة $f(z) = e^{2xy}\,[cos(y^2 - x^2) + i\,sin(y^2 - x^2)]$ قابلة للإشتقاق عند كل نقاط z.

الحل:

$$u(x, y) = e^{2xy}\,cos(y^2 - x^2)\ \ , \qquad v(x, y) = e^{2xy}\,sin(y^2 - x^2)$$

$$u_x = v_y = 2ye^{2xy}\,cos(\,y^2 - x^2) + \,2xe^{2xy}\,sin(\,y^2 - x^2)$$

$$u_y = -v_x = 2xe^{2xy}\,cos(\,y^2 - x^2) - \,2ye^{2xy}\,sin(\,y^2 - x^2)$$

نستنتج من ذلك أن معادلتي كوشي-ريمان متحققة بالإضافة إلى إن u_x , u_y , v_x , v_y جميعها دوال مستمرة لكل قيم (x, y) ولذلك تكون الدالة $f(z)$ قابلة للإشتقاق ولحساب المشتقة نستطيع كتابة

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2e^{2xy}[y\,cos(y^2 - x^2) + x\,sin(y^2 - x^2)] +$$

$$2e^{2xy}[y\sin(y^2 - x^2) + x\cos(y^2 - x^2)]$$

مثال٢-٢٦: الدالة $f(z) = x^2 + 2xy + i(y^2 + 2xy)$ قابلة للإشتقاق على النقاط التي تقع على المستقيم $x = -y$ فقط.

الحل: لإثبات ذلك نلاحظ أن

$$u(x, y) = x^2 + 2xy \ , \qquad v(x, y) = y^2 + 2xy$$

وبحساب المشتقات الجزئية يكون لدينا

$$u_x(x, y) = 2x + 2y \ , \qquad v_y(x, y) = 2y + 2x$$

$$u_y(x, y) = 2x \ , \qquad v_x(x, y) = 2y$$

المشتقات الجزئية أعلاه مستمرة ومعادلتي كوشي-ريمان تكون متحققة فقط إذا كان $2x = -2y$ أي أن

$$u_y(x, y) = -v_x(x, y)$$

وهذا مكافئ إلى أن $x + y = 0$ وعليه تكون كوشي-ريمان متحققة إذا كان $x = -y$ وبناءً على النظرية السابقة فإن f قابلة للإشتقاق فقط عند النقاط التي تقع على المستقيم $x = -y$.

٢-٩ معادلتي كوشي-ريمان بالصيغة القطبية:

عند استخدام الإحداثيات القطبية (r, θ) فإن الدالة $f(z)$ تكتب بالصورة الآتية.

$$f(z) = f\left(re^{i\theta}\right) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

حيث v, u دوال حقيقية والنظرية الآتية توضح لنا كيفية كتابة معادلتي كوشي-ريمان بالشكل القطبي وبرهانها يترك كتمرين للطالب.

٢-٣٢ نظرية: لتكن $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ دالة مستمرة معرفة على جوار النقطة $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ فإذا كانت المشتقات الجزئية u_x , u_y , v_x , v_y مستمرة عند النقطة (r_0, θ_0) ومعادلتي كوشي-ريمان

$$u_r(r_0, \theta_0) = \frac{1}{r_0} v_\theta(r_0, \theta_0) \ , \qquad v_r(r_0, \theta_0) = \frac{-1}{r_0} u_\theta(r_0, \theta_0)$$

متحققة فإن الدالة f قابلة للإشتقاق عند z_0 ومشتقتها $f'(z_0)$ تكتب بإحدى الصيغ الآتية

$$f'(z_0) = e^{-i\theta_0}[u_r + iv_r]$$

أو

$$f'(z_0) = \frac{1}{r_0} e^{-i\theta_0}[v_\theta - iu_\theta]$$

مثال٢-٢٨: لتكن الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ حيث $z \neq 0$ أكتب $f(z)$ بإستخدام معادلتي كوشي-ريمان بالصيغة القطبية وإثبت أنها قابلة للإشتقاق لكل قيم z الغير صفرية.

الحل:

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

$$= \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) \qquad (z \neq 0)$$

بما أن

$$u(r,\theta) = \frac{\cos\theta}{r} \quad , \qquad v(r,\theta) = \frac{-i\sin\theta}{r}$$

الآن نكتب معادلتي كوشي-ريمان بالصيغة القطبية كالآتي:

$$ru_r = -\frac{\cos\theta}{r} = v_\theta \ , \quad u_\theta = \frac{-i\sin\theta}{r} = -rv_r$$

وبما أنها متحققة ، لذلك فالدالة $f(z)$ قابلة للإشتقاق عند $z \neq 0$ وبالإعتماد على النظرية السابقة نجد أن

$$f'(z) = -e^{i\theta}\frac{e^{-i\theta}}{r^2} = \frac{-1}{(re^{i\theta})^2} = -\frac{1}{z^2}.$$