كلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الرياضيات

المرحلة: الرابعة

أستاذ المادة : أ.د. عبد الرحمن سلمان جمعة

اسم المادة باللغة العربية : التحليل العقدي

اسم المادة باللغة الإنكليزية : Complex analysis

اسم الحاضرة السادسة باللغة العربية: الدوال التحليلية

اسم المحاضرة السادسة باللغة الإنكليزية : Analytic Functions

٢-١٠ الدوال التحليلية: (*Analytic Functions*)

تعريف٢-٦: الدالة العقدية $f(z)$ يقال انها دالة تحليلية (هلومرفية) عند النقطة $z_0 \in D$ إذا كانت قابلة للإشتقاق عند كل نقاط جوار ما للنقطة z_0 وإذا كانت تحليلية عند كل نقاط المنطقة D فإنها تكون تحليلية ضمن المنطقة D. وإذا كانت الدالة $f(z)$ تحليلية عند كل نقاط المستوي z فيقال عليها دالة كلية ***(Entire Function)***.

مثال ٢-٢٨: الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ تحليلية عند كل نقطة غير صفرية في المستوي المنتهي بينما الدالة $f(z) = |z|^2$ ليست تحليلية عند كل نقطة لأن مشتقتها موجودة فقط عندما $z = 0$ وليس في أي مكان آخر.

ومن هنا يتطرق إلى أذهاننا تعريف النقطة الشاذة التي سندرسها بشكل مفصل ووافي في الفصول القادمة لذلك سنكتفي هنا بإعطاء تعريفها حيث أن الدالة $f(z)$ إذا كانت ليست تحليلية عند النقطة z_0 عندئذٍ تسمى النقطة z_0 نقطة شاذة ***(Singular Point)***.

الآن سنعرض النظرية القادمة والتي برهانها مشابه لبرهان النظرية () لذلك سنكتفي بعرضها فقط.

نظرية٢-٩: $f(z)$ تكون دالة تحليلية في مجال D إذا وفقط إذا كان الجزء الحقيقي والتخيلي من $f(z)$ لهما مشتقات جزئية مستمرة من الرتبة الأولى وتحقق معادلتي كوشي-ريمان عند جميع نقاط D .

مثال ٢-٢٩: إثبت أن الدالة $f(z) = e^y \cos x - ie^y \sin x$ دالة كلية.

الحل: نجد المشتقات الجزئية للدالتين

$$u_x = -e^y \sin x \ , \qquad u_y = e^y \cos x$$

$$v_y = -e^y \sin x \ , \qquad v_x = -e^y \sin x$$

وهذه الدوال الحقيقية مستمرة لكل قيم z بالإضافة إلى انها تحقق معادلتي كوشي-ريمان عند كل نقاط المستوي وبالتالي تكون تحليلية عند كل نقط المستوي لذلك فهي دالة كلية .

مثال٢-٣٠: حدد النقاط التي تكون الدالة $f(z)$ تحليلية عندها حيث

$$f(z) = \bar{z}e^{-|z|^2}$$

الحل: نعيد كتابة الدالة $f(z)$ كالاتي:

$$f(z) = (x - iy)e^{-(x^2+y^2)}$$

ومنها تكون الدوال الحقيقية v, u كالآتي:

$$u(x,y) = xe^{-(x^2+y^2)} \ , \quad v(x,y) = -ye^{-(x^2+y^2)}$$

الآن نجد مشتقاتها الجزئية من الرتبة الأولى

$$u_x = e^{-(x^2+y^2)} - 2x^2e^{-(x^2+y^2)} \ , \qquad u_y = -2xye^{-(x^2+y^2)}$$

$$v_x = 2xye^{-(x^2+y^2)} \ , \qquad v_y = -e^{-(x^2+y^2)} + 2y^2e^{-(x^2+y^2)}$$

بالنظر إلى قيم المشتقات أعلاه غير أن

$$u_y = -v_x$$

بينما $u_x = v_y$ فقط عندما يكون

$$2e^{-(x^2+y^2)} - 2x^2e^{-(x^2+y^2)} - 2y^2e^{-(x^2+y^2)} = 0$$

أو

$$2e^{-(x^2+y^2)}(1 - x^2 - y^2) = 0$$

لذلك يكون لدينا $x^2 + y^2 = 1$

وبما أن جميع المشتقات الجزئية v_y, u_y, v_x, u_x مستمرة لذلك نستنتج أن $f(z)$ تحليلية فقط على الدائرة $|z| = 1$ وعند دراسة خواص الدوال التحليلية من حيث إذا كانت f, g دالتين تحليليتين فإن حاصل الجمع والطرح أيضا يكون دالة تحليلية بالإضافة غلى الضرب والقسمة بشرط في حالة القسمة يكون المقام لا يساوي صفراً. وكذلك من قاعدة السلسلة نجد ان $(f \circ g)$ أيضاً دالة تحليلية. أما النتيجة القادمة للدوال التحليلية فهي مفيدة لنا في دراستنا حيث تقول النتيجة.

<u>نظرية٢-١٠</u>: إذا كانت الدالة $f(z)$ تحليلية عند مجال D وأن $f'(z) = 0$ في هذا المجال فإن $f(z)$ تكون ثابتة.

البرهان: لتكن $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ فإذا كانت $|f(z)| = 0$ فإن $f = 0$ عكس هذا أي أن

$$|f(z)|^2 = u^2 + v^2 \equiv c \neq 0$$

بأخذ المشتقات الجزئية بالنسبة لـ x, y يكون $uu_x + vv_x = 0 \ , \ uu_y + vv_y = 0$

وبما أن الدالة تحليلية فهي تحقق معادلتي كوشي-ريمان لذلك نجد

$$uu_x - vu_y = 0 \ , \qquad vu_x + uu_y = 0$$

وعليه يكون $(x^2 + y^2)u_x = 0 \ , \quad (x^2 + y^2)u_y = 0$

وهنا نستنتج أن $u_x = u_y = 0$

وكذلك بنفس الطريقة نستنتج أن $v_x = v_y = 0$

وبالتالي تكون الدالة f دالة ثابتة.

مثال ٢-٣١: إثبت أن إذا كانت $\overline{f(z)}, f(z)$ كلاهما تحليلية عند المجال D فإن $f(z)$ يجب أن تكون ثابتة خلال المجال D .

الحل: لتكن $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

فتكتب $\overline{f(z)} = U(x,y) + iV(x,y)$

حيث $U(x,y) = u(x,y),\ V(x,y) = -v(x,y)$ (5)

وبما أن الدالة $f(z)$ تحليلية ،إذن تحقق معادلتي كوشي-ريمان في المجال D أي أن

$$u_x = v_y \ ;\ u_y = -v_x \qquad (6)$$

ومن كون الدالة $\overline{f(z)}$ تحليلية ، إذن نستنتج أن

$$U_x = V_y \ ;\ U_y = -V_x \qquad (7)$$

بالنظر للعلاقات $(6),(7)$ نجد أن

$$u_x = -v_y \ ;\ u_y = v_x \qquad (8)$$

بجمع المعادلتين$(6),(8)$ بما يقابلها نستنتج $u_x = 0$ في المجال D

وكذلك بطرح المعادلتين $(6),(8)$ بما يقابلها نجد $v_x = 0$

لذلك $f'(z) = u_x + iv_x = 0 + i0 = 0$ وبإستخدام النظرية (٢-١٠) فإن الدالة تكون ثابتة.

٢-١١ الدالة التوافقية : (*Harmonic Function*)

في هذا البند سنعرض نتيجة أخرى لمعادلتي كوشي-ريمان والتي تعتبر من المواضيع المهمة في الرياضيات التطبيقية في دراسة حركة الموائع ، الجهود الكهربائية والمغناطيسية ودرجة الحرارة الثابتة والجاذبية وهذه النتيجة يمكن استنتاجها من معادلتي كوشي-ريمان بفرض أن الدوال الحقيقية v, u قابلة للإشتقاق من الرتبة الثانية وكما يلي :

لدينا $u_x = v_y$ ومنها يكون $u_{xy} = v_{yy}$

وبنفس الطريقة $u_y = -v_x$ ومنها يكون $u_{yx} = -v_{xx}$

وبالجمع نستنتج أن $v_{xx} + v_{yy} = 0$

وبالمقابل أيضاً من معادلتي كوشي-ريمان يكون لدينا

$$v_{yx} = -u_{yy} \ , \qquad v_{xy} = u_{xx}$$

وبالطرح نستنتج أن $u_{xx} + u_{yy} = 0$

وهذه المعادلات تسمى معادلة لابلاس (***Laplace's Equation***) نسبة إلى العالم الفيزيائي . ***Laplace.***

تعريف ٢-٧: لتكن $u(x,y)$ دالة قيم حقيقية في المتغيرين الحقيقيين x,y معرفة في المجال D يقال للدالة u دالة توافقية (***Harmonic***) في المجال D إذا كانت مشتقاتها الجزئية الأولى والثانية موجودة ومستمرة وتحقق معادلة لابلاس :

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

مثال ٢-٣٢: الدالة $u(x,y) = e^{-y} \sin x$ دالة توافقية في أي مجال D لأن u_{xx}, u_{yy} موجودة ومستمرة وتحقق معادلة لابلاس ولتوضيح ذلك

$$u_x = e^{-y} \cos x \ \ , u_{xx} = -e^{-y} \sin x$$

$$u_y = -e^{-y} \sin x \ \ , u_{yy} = e^{-y} \sin x$$

الآن $u_{xx} + u_{yy} = -e^{-y} \sin x + e^{-y} \sin x = 0$

نظرية٢-١١: اذا كانت $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ دالة تحليلية في المجال D وكانت المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية لكل من v,u مستمرة فإن v,u دوال توافقية في D .

البرهان: بما أن $f(z)$ دالة تحليلية إذن تكون معادلتي كوشي-ريمان متحققة أي أن

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

فإذا قمنا باشتقاق العلاقة أعلاه بالنسبة للمتغير x نحصل على

$$u_{xx} = v_{yx}, \qquad u_{yx} = -v_{xx}$$

وبنفس الطريقة نشتق العلاقة أعلاه بالنسبة للمتغير y لنحصل على

$$u_{xy} = v_{yy}, \qquad u_{yy} = -v_{xy}$$

وبما أن جميع المشتقات الجزئية $u_{xx}, u_{yx}, v_{xy}, v_{yx}$ مستمرة، لذلك بإستخدام نظرية في التفاضل والتكامل للدوال الحقيقية التي تتحدث عن تساوي المشتقات الجزئية ، أي أن

$$u_{xy} = u_{yx} \,, \qquad v_{xy} = v_{yx}$$

لذلك ينبع من هذا أنه

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

وكذلك

$$v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0$$

وبهذا ينتهي البرهان.

تعريف٢-٨: لتكن $f = u + iv$ واذا كانت u, v دوال توافقية في المجال D ومشتقاتهم الجزئية موجودة ومستمرة وتحقق معادلتي كوشي-ريمان في D فإن v يسمى مرافق توافقي لـ u .

مثال ٢-٣٣: لتكن $u(x,y) = x^2 - y^2$ فإن $u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0$ وعليه يكون u دالة توافقية وكذلك نجد أن $v(x,y) = 2xy$ هي أيضاً دالة توافقية وكذلك $u_x = v_y = 2x$ و $u_y = -v_x = 2y$ وبالتالي يكون v مرافق توافقي للدالة u

والدالة $f(z)$ تعطى بالصورة الآتية:

$$f(z) = x^2 - y^2 + i2xy = z^2$$

نظرية٢-١٢: الدالة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تحليلية في المجال D إذا وفقط إذا كان v مرافق توافقي للدالة u .

البرهان: إذا كان v مرافق توافقي للدالة u في المجال D ،إذن باستخدام النظرية السابقة تكون f دالة تحليلية في D ولبرهنة الإتجاه الثاني اذا كانت f دالة تحليلية في D إذن يكون v, u دوال توافقية حسب النظرية السابقة بالإضافة إلى ذلك معادلتي كوشي-ريمان متحققة .

مثال٢-٣٤: إثبت أن الدالة الحقيقية $u(x,y) = ln(x^2 + y^2)$ دالة توافقية لكل الأعداد z ما عدا $z = 0$ ثم جد $f(z) = u + iv$.

الحل: في البداية نجد المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية للدالة $u(x,y)$ بالنسبة لكلا المتغيرين $y \,, x$ فيكون لدينا

$$u_x = \frac{2x}{x^2 + y^2} \;, \qquad u_{xx} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$u_y = \frac{2y}{x^2 + y^2} \;, \qquad u_{yy} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

وبالجمع نحصل على

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

إذن الدالـة u دالـة توافقيـة، ولإيجـاد المرافق التـوافقي لهـا ، نفـرض أن $v(x,y)$ هـو المرافـق التـوافقي وعليـه مـن معادلتي كوشي-ريمان نحصل على

$$u_x = v_y = \frac{2x}{x^2 + y^2} \qquad (9)$$

$$u_y = -v_x$$

وبتكامل العلاقة (9) بالنسبة للمتغير y نحصل على

$$v(x,y) = \int \frac{2x}{x^2 + y^2} dy = 2\, tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi(x)$$

حيث $\varphi(x)$ تمثل ثابت التكامل بالنسبة للمتغير y .

لذلك يجب أن نجد قيمة $\varphi(x)$ وذلك باستخدام المعادلة الثانية من معادلتي كوشي-ريمان حيث أن

$$v_x(x,y) = \frac{2}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi'(x)$$

$$= \frac{2y}{x^2 + y^2} + \varphi'(x)$$

ولكن

$$v_x = -u_y = \frac{-2y}{x^2 + y^2}$$

وبالمقارنة فإن قيمة $\varphi'(x) = 0$ لذلك تكون $\varphi(x)$ دالة ثابتة ولتكن قيمتها تساوي c لذلك يكون المرافق v معرفة كالآتي

$$v(x,y) = 2\, tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + c$$

والدالة التحليلية المقابلة هي

$$f(z) = ln(x^2 + y^2) + i\left(2\, tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + c\right)$$

ولإيجادها بدلالة z نضع $z = x$, $y = 0$ نستنتج أن

$$f(z) = ln(z^2) + ic$$

وبصورة عامة لإيجاد المرافق التوافقي لأي دالة توافقية نستخدم النظرية القادمة .

نظرية٢-١٣: ليكن $u(x,y)$ دالة توافقية عند جوار النقطة التي مركزها (x,y) فإنه يوجد مرافق توافقي $v(x,y)$ معرف على هذا الجوار وأن $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ دالة تحليلية .

البرهان: بما أن u, v دوال توافقية ، إذن تحقق معادلتي كوشي-ريمان

$$u_x = v_y \ , \qquad u_y = -v_x$$

والآن نستطيع أن نجد المرافق التوافقي $v(x,y)$ بخطوتين رئيسيتين :

الخطوة الأولى : نكامل الدالة v_y والتي استنتجناها من u_x نكاملها بالنسبة إلى y فيكون لدينا

$$v(x,y) = \int u_x(x,y)dy + c(x) \qquad (10)$$

حيث $c(x)$ دالة تعتمد على المتغير x فقط .

باشتقاق المعادلة (10) بالنسبة للمتغير x ونعوض قيمة v_x بقيمة $-u$ في الطرف الأيسر فنحصل على

$$-u(x,y) = \frac{d}{dx}\int u_x(x,y)dy + c'(x) \qquad (11)$$

أما الخطوة الرئيسية الثانية فهي إيجاد $c'(x)$ وبما أن u دالة توافقية فإن جميع حدود (11) تحذف ما عدا الحدود التي تعتمد على المتغير x ثم نكامل الدالة $c'(x)$ ذات المتغيرالمفرد لإيجاد قيمة $c(x)$ وهذه الخطوات أساسية لإيجاد $v(x,y)$ (المرافق التوافقي).

مثال٢-٣٥: عين قيم α , β التي تجعل الدالة الحقيقية $u(x,y) = \alpha x^2 y + \beta y^2 - 3y^3 + 2x^2$ توافقية. ثم جد المرافق التوافقي لها .

الحل: من معادلة لابلاس ولكون الدالة توافقية نستنتج ان

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

وبايجاد قيم u_{yy}, u_{xx} يكون لدينا

$$2\alpha y + 4 + 2\beta - 18y = 0$$

$$(2\alpha - 18)y + 4 + 2\beta = 0$$

وبالمقارنة بين الطرفين نجد ان

$$\beta = -2 \ , \alpha = 9$$

لذلك تكون الدالة الحقيقية كالاتي:

$$u(x,y) = 9x^2y - 2y^2 - 3y^3 + 2x^2$$

ولايجاد المرافق التوافقي نتبع الخطوات الواردة في النظرية ٢-١٣

وعليه نجد ان

$$v(x,y) = 9xy^2 + 4yx - 3x^3 + c$$

٢-١٢ اسئلة الفصل الثاني

١-اذا كانت $f(z) = z^2 + 2\bar{z} - Re(z)$ اوجد قيمة كل ماياتي

أ- $f(1+i)$ **ب-** $f(2i+1)$

٢- اكتب الدوال الاتية بالصيغة $w = u(x,y) + iv(x,y)$

أ- $f(z) = \bar{z}^2 + (1-i)z$ **ب-** $f(z) = \frac{z-i}{z+4}$

٣-اذا كانت $f(z) = z^{21} - 5z^7 + 9z^4$، استخدم الاحداثيات القطبية لايجاد

أ- $f(-1+i)$ **ب-** $f(1-i\sqrt{3})$

٤-عبر عن الدالة الاتية بالصيغة $\bar{z}$ ، z

$w = x^2 + y^2 - 2xy + i(x - xy)$.

٥-اوجد صورة القرص $|z-1| < 1$ عندما $w = (3+4i)z - 2 + i$.

٦-اثبت ان صورة العمود $y = 1$ هي القطع المكافئ $u = \frac{v^2}{4} - 1$ تحت تأثير التطبيق $w = z^2$.

٧- جد صورة المستقيم $x = 4$ تحت تاثير التطبيق $w = z^{\frac{1}{2}}$.

٨- احسب الغايات الاتية ان وجدت

أ- $lim_{z\to i}\frac{iz^3-1}{z+i}$ ب- $lim_{z\to 1-i}\big(x+i(2x+y)\big)$ ج- $lim_{z\to 0}\left(\frac{ln(1-z^2)}{sin^2 2z}\right)$

٩-استخدم التعريف لاثبات ان

أ- $lim_{z\to i}\frac{1}{z} = -i$ ب- $lim_{z\to 2i} z^2 = -4$

١٠-لتكن

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & if \quad z \neq i \\ 0 & if \quad z = i \end{cases}$$

باستخدام التعريف اثبت ان $lim_{z\to i} f(z) = -1$

١١- لتكن $f(z) = \frac{z^2}{|z|^2}$ اثبت ان $lim_{z\to 0} f(z)$ غير موجودة.

١٢- لتكن $f(z) = \frac{z\,Re\,z}{|z|}$ حيث $z \neq 0$ ولتكن $f(z) = 0$ اثبت ان $f(z)$ مستمرة لكل قيم z في المستوي العقدي.

١٣-اثبت ان الدالة $f(z) = |z|^2$ مستمرة بانتظام عند جميع نقاط z في المستوي العقدي.

ب- اثبت ان الدالة $f(z) = x^2 - iy^2$ مستمرة لكنها غير منتظمة الاستمرارية. في الحقل العقدي.

١٤- لتكن $f(z) = \frac{1}{z}$ ،استخدم تعريف المشتقة لاثبات ان $f'(z) = \frac{-1}{z^2}$

١٥- استخدم معادلتي كوشي ريمان لاثبات ان الدوال الاتية قابلة للاشتقاق لكل قيم z ثم استنتج $f'(z)$

أ- $f(z) = iz + 4i$ ب- $f(z) = sin\,x\,cosh\,y + i\,cos\,x\,sinh\,y$

١٦- باستخدام معادلتي كوشي ريمان ،اثبت ان الدوال الاتية غير قابلة للاشتقاق

أ- $f(z) = e^x(cos\,y - isin\,y)$ ب- $f(z) = lm\,(z)$

١٧- اثبت انه اذا كانت $\overline{f(z)}$ و $f(z)$ دالتان تحليليتان في مجال ما فان $f(z)$ دالة ثابتة.

١٨- ناقش الدالة الاتية من حيث قابليتها للاشتقاق وتحليلية

$$f(z) = (x^2 + y) + i(y^2 - x)$$

١٩- جد الدالة التحليلية $f(z)$ بايجاد المرافق التوافقي للدالة الحقيقية

أ- $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y$

ب- $u(x,y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + 2x^2 - 2y^2 + 1$

٢٠- اذاكان $v(x,y)$ مرافق توافقي للدالة $u(x,y)$ ،اثبت ان $-u(x,y)$ مرافق توافقي للدالة $v(x,y)$

٢١- اذاكان $v(x,y)$ مرافق توافقي للدالة $u(x,y)$ ،اثبت ان $h = u^2 - v^2$ دالة وافقية.

٢٢- برهن ان معادلة لابلاس تاخذ الصيغة الاتية:

$$r^2u_{rr}(r,\theta) + ru_r(r,\theta) + u_{\theta\theta}(r,\theta) = 0$$

٢٣- باستخدام الشكل القطبي لمعادلتي كوشي ريمان ،بين ان الدالة $f(z) = ln\, r + i\theta$ تحليلية في المجال

$$r > 0 \text{ و } -\pi < \theta < \pi$$