كلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الرياضيات

المرحلة: الرابعة

أستاذ المادة : أ.د. عبد الرحمن سلمان جمعة

اسم المادة باللغة العربية : التحليل العقدي

اسم المادة باللغة الإنكليزية : Complex analysis

اسم الحاضرة السابعة باللغة العربية: الدوال الأولية

اسم المحاضرة السابعة باللغة الإنكليزية : Elementary Functions

محتوى المحاضرة السابعة

٣-١ مقدمة

في هذا الفصل سنقوم بدراسة مختلف الدوال الأولية التي تمت دراستها في التفاضل والتكامل المألوفة لدى الطالب وتعريف ما يقابلها في الدوال العقدية كتعريف الدوال التحليلية للمتغيرات العقدية بصورة عامة وبفرض ان $z = x + 0i$ والدالـــة تقلص هذه الدوال التحليلية ذات المتـــغير العقدي إلى دوال أولية حقيقية، وسنبدأ هذا الفصل من خلال دراسة الحدوديات من الدرجة n والدالة الاسية العقدية التي من خلالها سنقوم بتطوير الدوال الأولية الأخرى.

٣-٢ الحدوديات من الدرجة n : (*Polynomials of degree n*)

لتكن الدالة

$$w = f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$

حيث a_i $(i = 0, \dots, n)$ ثوابت حقيقية.

n عدد صحيح موجب يسمى درجة الحدودية والدالة $f(z)$ تعد من أبسط الدوال العقدية وهي دالة تحليلية (مستمرة وقابلة للإشتقاق) في جميع نقاط المستوي العقدي.

٣-٣ الدالة الأسية: (*Exponential Function*)

لتعريف هذه الدالة علينا الرجوع إلى مفاهيم من التفاضل والتكامل وبالأخص الدالة الأسية ذات المتغيرات الحقيقية ودالة الجيب والجيب تمام الحقيقية وبالتالي نستطيع أن نكتب

$$e^{it} = \cos t - i \sin t$$

تعريف٣-١: تعرف الدالة الأسية $exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ للعنصر $z = x + iy$

كالآتي:

$$exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x e^{iy}$$

وعادة تكتب بالشكل e^z. من التعريف نرى أن e^z يمكن أن تقلص للدالة الأسية الإعتيادية عندما $y = 0$.

سنعطي الان بعض خواص الدالة الأسية :

أ. الدالة الأسية $exp(z)$ دالة كلية وأن $exp(z) \neq 0$.

ب. مشتقة الدالة الأسية $exp(z)$ هي $exp(z)$.

ج. إذا كان z_1, z_2 عددان عقديان فأن $exp(z_1 + z_2) = exp(z_1) \cdot exp(z_2)$.

د. إذا كان z_1, z_2 عددان عقديان فإن $exp(z_1 - z_2) = exp(z_1)/exp(z_2)$.

هـ. إذا كان $z = x + iy$

فأن

$$|e^z| = |exp(z)| = |exp(x + iy)|$$

$$= |exp(x) \cdot exp(iy)| = |exp(x)| \cdot |exp(iy)|$$

$$= |exp(x)| \cdot |exp(iy)| = |exp(x)| \cdot |exp(\cos y - i \sin y)|$$

$$= |exp(x)| \cdot |1| = e^x$$

والدالة الأسية دالة دورية من مضاعفات $(2\pi i)$ أي أن

$$e^{z+2\pi ki} = e^z e^{2\pi ki} = e^z(\cos 2\pi k + i \sin 2\pi k)$$

$$= e^z(1 + 0) = e^z$$

<u>مثال ٣-١:</u> جد جميع القيم $z = x + iy$ بحيث ان $e^z = 1 + i$.

الحل: نكتب المعادلة $e^z = 1 + i$ بالصيغة الآتية:

$$e^x e^{iy} = \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}}$$

وهذا يؤدي إلى أن

$$e^x = \sqrt{2}\ , \quad y = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots)$$

وبما أن $ln(e^x) = x$ إذن سيكون لدينا

$$x = ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ ln\, 2$$

و

$$y = \left(2n + \frac{1}{4}\right)\pi \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots)$$

لذلك ينتج لدينا

$$z = \frac{1}{2}\ ln\, 2 + \left(2n + \frac{1}{4}\right)\pi i \qquad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots).$$

٣-٤ الدالة اللوغارتمية: (*The Logarithmic Function*)

من أهم الدوافع لتعريف الدالة اللوغارتمية هو حل المعادلة $e^w = z$ للمتغير w حيث z أي عدد عقدي غير صفري وهذه المعادلة لها عدد غير منتهي من الحلول لأن الدالة e^w ليست دالة متباينة (واحد-إلى-واحد) ومعكوسها هو الدالة اللوغارتمية متعددة القيم لذلك سنهتم بصورة خاصة بتعريف فروع اللوغارتم الذي يكون واحد-الى-واحد.

تعريف٣-٢: لتكن $z \neq 0$ فإن الدالة اللوغارتمية $log\, z$ هي معكوس الدالة الأسية، أي أن $log\, z = w$ إذا وفقط إذا كان $z = e^w$.

وبهذه الحالة فإن $(z \neq 0)$ $log\, z = ln|z| + i(arg\, z)$، حيث $ln|z|$ هو اللوغارتم الطبيعي للعدد الموجب $|z|$.

تعريف٣-٣: لتكن $z \neq 0$ فإن القيمة الرئيسية (الأساسية) للوغارتم تعرف كالآتي:

$$Log(z) = ln|z| + i\, Arg(z)\ , \qquad (|z| > 0\ , -\pi < Arg(z) \leq \pi\ )$$

نلاحظ أن $Log(z)$ دالة ذات قيمة واحدة وأن منطلق (مجال) هذه الدالة هي كل الأعداد العقدية غير الصفرية في المستوي العقدي z ومداها هو الشريط الأفقي $-\pi < Im\ (w) \leq \pi$ في المستوي العقدي w . وكذلك نلاحظ من التعريفين السابقين أن قيمة $log\, z$ تكون كالآتي:

$$log\, z = Log(z) + 2n\pi i \qquad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots)$$

ويمكن كتابة الدالة اللوغارتمية بالشكل القطبي وكما يلي :

$$log\, z = ln\, r + i(\theta + 2n\pi)\ , z = re^{i\theta}\ \ , n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$$

مثال٣-٢: إذا كان $z = -1 - \sqrt{3}i$ فجد $log\, z$.

الحل: من المعروف سابقاً أننا نستطيع إيجاد قيمة $|z|$ والسعة الزاوية للعدد لذلك يكون

$r = 2\ ,\ \theta = \frac{-2\pi}{3}$ ، وعليه يكون

$$log\, z = ln\, 2 + i\left(-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right)$$

$$= ln\, 2 + 2\left(n - \frac{1}{3}\right)\pi i \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots).$$

نظرية٣-١:

أ. الدالة $log\, z$ دالة غير مستمرة عند كل نقط z التي تحقق الشرطين

$$Im\, z = 0 \ , \ Re\, z \leq 0$$

ب. الدالة $log\, z$ قابلة للإشتقاق عند كل النقط التي لا تقع على الشعاع $\theta = \pi$ ، $r = 0$

البرهان:

أ. لإيجاد غاية الدالة $log\, z$ عندما تقترب $z \to z_0$ حيث

$$Im\, z = 0 \ , \qquad Re\, z \leq 0$$

تقع على الشعاع $\theta = \pi$ حيث يؤخذ المسار الأول عند إقتراب z من z_0 من النصف الأعلى للمستوي والثاني من النصف الأسفل للمستوي العقدي فعند أخذ المسار الأول سنحصل على

$$\lim_{z \to z_0} log\, z = \lim_{(r,\theta) \to (r_0,\pi)} (ln\, r + \theta i)$$

$$= ln\, r_0 + \pi i$$

أما المسار الثاني فستكون الغاية كالآتي :

$$\lim_{z \to z_0} log\, z = \lim_{(r,\theta) \to (r_0,\pi)} (ln\, r + \theta i)$$

$$= ln\, r_0 - \pi i$$

وعليه ستكون الغاية غير موجودة عند كل نقاط z التي تحقق $Im\, z = 0 \ , \ Re\, z \leq 0$ ولهذا ليست قابلة للإشتقاق (وليست تحليلية).

ب. بما أن $log\, z = ln\, r + \theta i$

فإن $v(r,\theta) = \theta \ , \ u(r,\theta) = ln\, r$

وعند استخدامنا معادلتي كوشي-ريمان حيث أن الدالة تحقق معادلتي كوشي-ريمان عند كل نقطة لاتقع على الشعاع $\theta = \pi$ ، نجد ان

$$u_r = \frac{1}{r} \ , u_\theta = 0 \ , v_r = 0 \ , v_\theta = 1$$

وهذه المشتقات الجزئية مستمرة عند كل نقطة z_0 بحيث أن

$$\theta = arg\, z \neq \pi$$

وكذلك تحقق معادلتي كوشي-ريمان أي أن الدالة $log\, z$ قابلة للإشتقاق عند كل $z \neq 0$ التي لا تقع على الشعاع $\theta = \pi$ وان مشتقاتها هي

$$\frac{d}{dz}(\log z) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{z} \quad (r = |z| > 0\,, -\pi < Arg\, z < \pi).$$

ملاحظة٣-١: عند استخدام فروع دالة اللوغارتم فإن بعض الخصائص لايمكن دائماً إن تؤخذ من دالة اللوغارتم التي دُرِست في التفاضل والتكامل ولتوضيح ذلك لدينا المثال الآتي .

مثال٣-٣:

$$Log(i^3) = Log(-i) = ln\,1 - i\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}i$$

$$3Logi = 3\left(ln\,1 + i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}i$$

وهنا نجد أن $Log(i^3) \neq 3Logi$.

نظرية٣-٢: إذا كان $z_2\,, z_1$ عددين عقدين غير صفريين فإن

أ. $log(z_1.z_2) = log\,z_1 + log\,z_2$

ب. $log(z_1/z_2) = log\,z_1 - log\,z_2$

ج. $log\left(\frac{1}{z}\right) = -\,log\,z$

سنبرهن الخاصية (أ) أما البقية فتترك كتمرين للطالب.

البرهان: من تعريف دالة اللوغاريتم يكون لدينا

$$\begin{aligned} log(z_1.z_2) &= ln|z_1||z_2| + i\,arg(z_1z_2) \\ &= ln|z_1| + ln|z_2| + i\,arg(z_1) + i\,arg(z_2) \\ &= ln|z_1| + i\,arg(z_1) + ln|z_2| + i\,arg(z_2) \\ &= log\,z_1 + log\,z_2 \end{aligned}$$

وهنا يجب ملاحظة إن الخاصية (١) ، (٢) في النظرية أعلاه تتحقق بصورة عامة عند دالة $Log(z)$ ومثال على ذلك.

مثال٣-٤: لتكن $z_1 = -\sqrt{3} + i\ ,\ z_2 = -1 + i\sqrt{3}$ فإن $z_1.z_2 = -4i$

ولإيجاد القيمة الرئيسية لدالة اللوغاريتم فإننا نجد أن

$$Log(z_1.z_2) = Log(-4i) = ln\,4 - \frac{i\pi}{2}$$

$$Log(z_1) + Log(z_2) = Log\left(-\sqrt{3} + i\right) + Log\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$$

$$= ln\,2 - \frac{i5\pi}{6} + ln\,2 + \frac{i2\pi}{3} = ln\,4 + \frac{i3\pi}{2}$$

لذلك بصورة عامة فإن $Log(z_1.z_2) \neq Log\,z_1 + Log\,z_2$

<u>تعريف٣-٤:</u> (الاسس العقدية)

ليكن $z \neq 0$ وأن c عدد عقدي نعرف z^c بواسطة المعادلة الآتية:

$$z^c = exp(c\,log(z)) = e^{c\,log(z)}$$

حيث $log(z)$ دالة اللوغارتم متعدد القيم لذلك الدالة z^c ستكون بصورة عامة ذات قيم متعددة والدالة f التي تعطى بالصورة الآتية

$$f(z) = e^{c\,log(z)}$$

تسمى الفرع الرئيسي للدالة z^c .

<u>مثال٣-٥:</u> جد قيمة i^{-2i}.

الحل : من التعريف فإن $i^{-2i} = e^{-2i\,log\,i}$

ولكن $log\,i = ln\,i + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$

$$= \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

لذلك يكون لدينا

$$i^{-2i} = e^{(4n+1)\pi}.$$

<u>ملاحظـــــة٣-٢:</u> بما أن الدالة الأسية لها الخاصية $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$ لذلك نستطيع أن نكتب

$$\frac{1}{z^c} = \frac{1}{e^{c\,log(z)}} = e^{-c\,log(z)} = z^{-c}$$

لذلك وفقا لهذه الملاحظة وبالعودة إلى المثال أعلاه نجد أن

$$i^{-2i} = \frac{1}{i^{2i}} = e^{\left((4n+1)\pi\right)}$$

ولإيجاد مشتقة الدالة $f(z) = e^{c\,log(z)}$ باستخدام قاعدة السلسلة يكون لدينا

$$f'(z) = \frac{c}{z} e^{c\,log(z)}$$

وعليه تكون مشتقة z^c كما يلي

$$\frac{d}{dz} z^c = \frac{c}{z} z^c$$

وهذه متحققة إذا كان z^c هي القيمة الأساسية وعندما z تقع في المجال $-\pi < Arg\ z < \pi$ $|z| > 0,$ حيث c عدد عقدي.

<u>مثال٣-٦</u>: القيمة الرئيسية للدالة $(-i)^i$ هي

$$e^{i\,log(-i)} = e^{i\left(ln\,1 - i\frac{\pi}{2}\right)} = e^{\frac{\pi}{2}}$$

<u>مثال٣-٧</u>: الفرع الرئيسي للدالة $z^{\frac{2}{3}}$ يمكن كتابته بالصورة الآتية:

$$e^{\frac{2}{3} log\,z} = e^{\frac{2}{3} ln\,r + \frac{2}{3} i\theta} = \sqrt[3]{r^2}\, e^{\frac{2i\theta}{3}}$$

لذلك القيمة الرئيسية للدالة $z^{\frac{2}{3}}$ هي

$$\sqrt[3]{r^2}\ cos\frac{2\theta}{3} + i\sqrt[3]{r^2}\ sin\frac{2\theta}{3}$$

والدالة تحليلية في المجال $-\pi < \theta < \pi\ , r > 0$.