كلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الرياضيات

المرحلة: الرابعة

أستاذ المادة : أ.د. عبد الرحمن سلمان جمعة

اسم المادة باللغة العربية : التحليل العقدي

اسم المادة باللغة الإنكليزية : Complex analysis

اسم الحاضرة الثامنة باللغة العربية: الدوال المثلثية والزائدية

اسم المحاضرة الثامنة باللغة الإنكليزية : Trigonometry and Hyperbolic Functions

٣-٥ الدوال المثلثية والزائدية: (*Trigonometry and Hyperbolic Functions*)

الدوال المثلثية (جيب الزاوية وجيب تمام الزاوية وظل الزاوية و... إلخ) في المتغيرات العقدية لا تلعب نفس الدور البارز كما هي الحال في الدوال الحقيقية لذلك نستطيع تعريفها بمجرد تركيبات خاصة من الدوال الأسية .

تعريف٣-٥: دالة الجيب والجيب تمام للمتغير العقدي تعرف كالآتي:

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right), \qquad \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

هذه الدوال هي دوال كلية لأنها تركيب من دوال كلية حيث أنها كما معروف لدينا

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \qquad (1)$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \qquad (2)$$

بجمع هاتين المعادلتين ينتج لنا

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2\cos z$$

ومنه

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

وكذلك عند طرح المعادلتين ينتج لنا

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z$$

إذن

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

ومنها نستطيع الحصول على كل الدوال المثلثية الأخرى.

هناك خواص لهذه الدوال تشبه الخواص في المتغيرات الحقيقية التي درست سابقاً وكذلك بعض الخواص التي تتميز بها الدوال المثلثية ذات المتغيرات العقدية عن مثيلتها في الدوال الحقيقية التي سنذكرها الان .

أ. الدالتان $\cos z$, $\sin z$ دالتان دوريتان بحيث دورة كل منهما 2π وذلك لأن

$$\sin(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz}.e^{2\pi i} - e^{-iz}.e^{-2\pi i}}{2i}$$

$$= \frac{e^{iz}(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) - e^{-iz}(\cos 2\pi - i \sin 2\pi)}{2i}$$

$$= \frac{e^{iz}(1+0) - e^{-iz}(1-0)}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z$$

وبنفس الطريقة نثبت أن

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z$$

ب. الدالتان $\sin z$, $\cos z$ دالتان تحليليتان في كل قيم z في المستوي العقدي لذلك تكون دالتان كليتان ومشتقاتهما تعطى بالعلاقة

$$\frac{d \sin z}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = \frac{i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)}{2i} = \cos z$$

وبنفس الطريقة نثبت أن

$$\frac{d \cos z}{dz} = -\sin z$$

ج. الدالة $\cos z = 0$ إذا وفقط إذا كان $z = \frac{\pi}{2} + n\pi \ , n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

وكذلك الدالة $\sin z = 0$ إذا وفقط إذا كان $z = n\pi \ , n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

د. $\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y$$

لإثبات ذلك نتبع الخطوات التالية:

$$\sin z = \sin(x + iy) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^{y}(\cos x - i \sin x)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(e^{y} - e^{-y}) \sin x + i\frac{1}{2}(e^{y} - e^{-y}) \cos x$$

$$= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

وبنفس الطريقة نثبت العلاقة الثانية .

هـ. $|sin\, z|^2 = sin^2\, x\, sinh^2\, y$.

$$|cos\, z|^2 = cos^2\, x\, sinh^2\, y$$

من هاتين العلاقتين يتبين لنا أن الدالتين $sin\, z$, $cos\, z$ دالتين غير مقيدة في المستوي العقدي بينما في الدوال الحقيقية القيمة المطلقة لـ $sin\, z$ و $cos\, z$ أقل او يساوي ١ لكل قيم x ولتوضيح ذلك سنبرهن في البداية العلاقتين أعلاه حيث

$$|sin\, z|^2 = |sin\, x\, cosh\, y + i\, cos\, x\, sinh\, y|^2$$

$$= sin^2\, x\, cosh^2\, y + cos^2\, x\, sinh^2\, y$$

$$= sin^2\, x\, (cosh^2\, y - sinh^2\, y) + sin^2\, y\, (cosh^2\, x - sinh^2\, x)$$

وبما أن $cos^2\, x + sin^2\, x = 1$ وكذلك $cosh^2\, y - sinh^2\, y = 1$

لذلك نحصل على

$$|sin\, z|^2 = sin^2\, x + sinh^2\, y$$

وبنفس الطريقة نثبت العلاقة الثانية.

الان إذا وضعنا $z = x_0 + iy$ في العلاقة الأولى ولندع $y \to \infty$ فإن

$$\lim_{y\to\infty} |sin(x_0 + iy)|^2 = sin^2\, x_0 + \lim_{y\to\infty} sinh^2\, y = \infty$$

وهذا يوضح ما ذكرناه آنفاً أن $sin\, z$ دالة غير مقيدة و ينطبق على $cos\, z$ وهذا من أهم ما يميز به الدوال المثلثية العقدية عن مثيلاتها ذات القيم الحقيقية .

والآن سنعرف الدوال المثلثية الزائدية في المستوي العقدي لأي عدد z حيث أن تعريفها كما هو في المتغيرات الحقيقية أي أن

$$sinh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad , cosh\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

وبما أن e^{-z}, e^z دوال كلية لذلك تكون $cosh\, z\, , sinh\, z$ دوال كلية أيضا ومشتقاتها تعطى بالعلاقة الآتية

$$\frac{d}{dz} sinh\, z = cosh\, z \quad , \qquad \frac{d}{dz} cosh\, z = sinh\, z$$

ومنها نستنتج تعريف بقية الدوال المثلثية الزائدية . ومن ميزات هذه الدوال عن الدوال ذات المتغيرات الحقيقية تكون الدالتان $cosh\, z\, , sinh\, z$ دالتان دوريتان دورة كل منهما هي $(2\pi i)$ حيث أن

$$sinh(z+2\pi i) = \frac{e^{z+2\pi i} - e^{-(z+2\pi i)}}{2} = \frac{e^{z}.e^{2\pi i} - e^{-z}.e^{-2\pi i}}{2}$$

$$= \frac{e^{z}(cos\, 2\pi i + i\, sin\, 2\pi i) - e^{-z}(cos\, 2\pi i - i\, sin\, 2\pi i)}{2}$$

$$= \frac{e^{z}(1+0) - e^{-z}(1-0)}{2} = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = sinh\, z$$

وكذلك بنفس الطريقة بالنسبة للدالة $cosh\, z$.

أما بقية المتطابقات المعروفة في المجال الحقيقي تصح في المجال العقدي ولكن في المجال العقدي يوجد إرتباط بين الدوال الزائدية المثلثية العقدية والحقيقية فمثلاً نلاحظ أن

أ. $sin(iz) = i\, sinh\, z \;\; , \;\; sinh(iz) = i\, sin\, z$.

ب. $cos(iz) = i\, cosh\, z \;\; , \;\; cosh(iz) = i\, cos\, z$.

ج. $tan(iz) = i\, tanh\, z \;\; , \;\; tanh(iz) = i\, tan\, z$.

وبرهان هذه الخواص تترك كتمرين للطالب.

<u>مثال٣-٨</u>: إثبت أن $sin\, \overline{z} = \overline{sin\, z}$ ومنه نستنتج ان الدالة $sin\, \overline{z}$ غير تحليلية في اي مكان

الحل: من الواضح لدينا

$$\overline{sin\, z} = sin\, x\, cosh\, y - i\, cos\, x\, sinh\, y$$

$$sin\, \overline{z} = sin\, x\, cosiy - cos\, x\, sin\;\, iy$$

وبما ان الدالة $cosiy = cosh\, y$ والدالة $sin\, iy = i\, sinh\, y$ لذلك يكون لدينا

$$sin\, \overline{z} = sin\, x\, cosh\, y - i\, cos\, x\, sinh\, y$$

وبهذا نستنتج أن $sin\, \overline{z} = \overline{sin\, z}$.

<u>٣-٦ معكوس الدوال المثلثية والزائدية</u>: (*Inverse Trigonometry and Hyperbolic*) *Functions*

الدوال العكسية المثلثية والزائدية نستطيع أن نصف حدودها باللوغارتمات ولغرض تعريف الدالة العكسية للدالة $sin\, z$ نكتب إذا كان $z = sin\, w$ فإن $w = sin^{-1}\, z$

فإذا كانت

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

فإننا سنحصل على

$$\left(e^{iw}\right)^2 - 2iz\left(e^{iw}\right) - 1 = 0$$

بحل المعادلة التربيعية أعلاه بالنسبة للمتغير e^{iw} نجد أن

$$e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$$

وبأخذ اللوغارتم لكلا الطرفين يكون لدينا

$$sin^{-1} z = -i\, log\left[iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

ومن هنا نلاحظ أن $sin^{-1} z$ دالة متعددة القيم مع عدد غير منته من القيم لكل نقطة z وبنفس الطريقة نستطيع أن نجد بقية الدوال العكسية لذلك سيكون لدينا

$$cos^{-1} z = -i\, log\left[z + i(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$tan^{-1} z = \frac{i}{2} log \frac{i + z}{i - z}$$

وكلاهما دالة متعددة القيم وهم دوال تحليلية لأنها ناتجة من تركيب دالتين تحليليتين. أما مشتقاتهم فنحصل عليها بسهولة من مشتقات اللوغارتم حيث تكون مشتقة $sin^{-1} z$, $cos^{-1} z$ كالآتي:

$$\frac{d}{dz} sin^{-1} z = \frac{-1}{(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \quad , \qquad \frac{d}{dz} cos^{-1} z = \frac{1}{(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

والتي تعتمد بالتأكيد على اختيارنا للقيم داخل الجذر التربيعي أما بالنسبة لمشتقة $tan^{-1} z$ فتأخذ الصيغة الآتية:

$$\frac{d}{dz} tan^{-1} z = \frac{1}{1 - z^2}$$

<u>مثال٣-٩:</u> جد قيمة $sin^{-1} \sqrt{5}$.

الحل: $$sin^{-1} \sqrt{5} = -i\, log\left[i\sqrt{5} + \left(1 - \left(\sqrt{5}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] = -i\, log\left(i\sqrt{5} \mp i\right)$$

$$= i\left[ln(\sqrt{5} \mp i) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right] = \frac{\pi}{2} + 2n\pi - i\, ln(\sqrt{5} \mp i)$$

حيث n عدد صحيح موجب.

الآن إذا لاحظنا أن

$$ln(\sqrt{5} - i) = ln\frac{(\sqrt{5} - i)(\sqrt{5} + i)}{(\sqrt{5} + i)} = ln\frac{1}{(\sqrt{5} + i)} = -ln(\sqrt{5} + i)$$

لذلك يمكننا أن نكتب

$$sin^{-1}\sqrt{5} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \mp i\, ln(\sqrt{5} + i)$$

حيث n عدد صحيح موجب.

الآن سنتطرق إلى الدوال الزائدية العكسية والتي تعطى بالمعادلات الآتية :

أ. $sinh^{-1} z = log\left[z + (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\right]$.

ب. $cosh^{-1} z = log\left[z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\right]$.

ج. $tanh^{-1} z = \frac{1}{z} log\frac{1+z}{1-z}$.

والمشتقات لهذه الدوال تكون بالصورة الآتية

أ. $\frac{d}{dz} sinh^{-1} z = \frac{1}{(z^2+1)^{\frac{1}{2}}}$

ب. $\frac{d}{dz} cosh^{-1} z = \frac{1}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$

ج. $\frac{d}{dz} tanh^{-1} z = \frac{1}{1-z^2}$

<u>مثال ٣-١٠:</u> جد قيمة $sinh^{-1} 2\, i$.

الحل:

$$sinh^{-1} i = log\left[2i + (-2 + 1)^{\frac{1}{2}}\right] = log(3\, i) = ln\, 3 + \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) i$$

حيث n عدد صحيح موجب.

مثال٣-١١: جد قيمة $tanh^{-1}(1+2i)$.

الحل:

$$tanh^{-1}(1+2i) = \frac{1}{2} log \frac{1+1+2i}{1-1-2i} = \frac{1}{2} log(-1+i)$$

$$= \frac{1}{4} ln2 + i\left(\frac{3}{8}+n\right)\pi \ \ ,n \in \mathbb{Z}$$

٣-٧ اسئلة الفصل الثالث

١- جد قيم $e^z = u + iv$ لكل قيم z الاتية

أ. $z = \frac{-i\pi}{3}$. ب. $z = 2 + 3\pi$.

٢- جد قيم z التي تحقق المعادلات الاتية

أ. $e^z = \sqrt{3} + i$ ب. $e^z = 1 + i$ ج. $e^z = -ie$ د. $\cosh z = 1$ هـ. $\cos z =$
$\cosh 2$ و. $Log\, z = 1 - \frac{i\pi}{4}$ ي. $2 - \cos z = 0$

٣- جد قيم كل مما ياتي

أ. $(2+i)^{1-i}$ ب. $(-1)^{\sqrt{2}}$ ج. π^{-i} د. i^i هـ. $\sin^{-1} i$ و. $\cos^{-1} 3i$ ي. $\tan^{-1} i$

٤- اثبت ان

أ. $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ ب. $e^{|z|^2} \geq \left|e^{z^2}\right|$ ج. $e^{\bar{z}}$ دالة غير تحليلية د. ze^z دالة تحليلية.

٥- جد قيمة $\log z$ لكل من القيم الاتية أ. $z = 2$ ب. $z = 2$ ج. $z = -\sqrt{3} - i$

٦- اثبت ان $|\sinh y| \leq |\sin z| \leq |\cosh y|$.

٧- اثبت ان $\sin \bar{z}$ دالة غير تحليلية.

٨- اثبت ان $\cos i\bar{z} = \overline{\cos iz}$ لكل قيم z.

٩- اذا كانت $z_1 = i + i\,, z_2 = i$ و $a = \frac{1}{2}$ ، اثبت ان $(z_1 z_2)^a \neq {z_1}^a z_2^a$.