كلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الرياضيات

المرحلة: الرابعة

أستاذ المادة : أ.د. عبد الرحمن سلمان جمعة

اسم المادة باللغة العربية : التحليل العقدي

اسم المادة باللغة الإنكليزية : Complex analysis

اسم الحاضرة التاسعة باللغة العربية: التكامل العقدي

اسم المحاضرة التاسعة باللغة الإنكليزية : Complex Integral

محتوى المحاضرة التاسعة

٤-١ مقدمة

في هذا الفصل سنتطرق إلى كيفية إيجاد التكاملات العقدية للدوال التحليلية والتي ترث كثيرا من خصائص حساب التفاضل والتكامل بعد أن درسنا المشتقة للدوال العقدية .للدخول في هذا الموضوع يجب أن نفهم ما معنى تكامل الدوال العقدية ذات القيم المعرفة بقيم حقيقية.

٤-٢ تكامل الدوال العقدية:

ليكن

$$f(t) = u(t) + iv(t) \quad \text{حيث} \quad a \le t \le b$$

حيث $v(t)\,,u(t)$ دوال ذات قيم حقيقية للمتغير الحقيقي t ونحن نعرف من خلال دراستنا للدوال الحقيقية أنه إذا كانت v,u دوال مستمرة على فترة ما فإنها تكون قابلة للتكامل عند المتغير t لذلك من الممكن كتابة

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

ومن الواضح أنه لحساب تكامل الدالة $f(t)$ فإننا نحسب تكامل الدوال v,u فإذا كانت

$$v'(t) = v(t)\,,u'(t) = u(t)$$

فإن

$$\int_a^b f(t)dt = u(b) - u(a) + i\big(v(b) - v(a)\big)$$

مثال٤-١: جد قيمة التكامل

$$\int_0^{2\pi} e^{it}dt$$

الحل: بما أن

$$e^{it} = \cos t + i\sin t$$

لذلك فالتعريف أعلاه سيكون

$$\int_0^{2\pi} e^{it}dt = \int_0^{2\pi} cos\, t\, dt + i\int_0^{2\pi} sin\, t\, dt$$

$$= sin\, t\Big|_0^{2\pi} + i(-cos\, t)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= i(-1+1) = 0$$

<u>مثال ٤-٢:</u> جد قيمة التكامل

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(t+it)}dt$$

الحل:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^t\, cos\, t + e^t\, sin\, t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t\, cos\, t\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t\, sin\, t\, dt$$

باستخدام طريقة التجزئة نجد

$$I = \frac{1}{2}e^t(cos\, t + i\, sin\, t) + \frac{i}{2}e^t(cos\, t + i\, sin\, t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right) + \frac{i}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right)$$

<u>مثال ٤-٣:</u> جد قيمة التكامل

$$\int_0^1 (t + it^2)^2 dt$$

الحل:

$$I = \int_0^1 (t + it^2)^2 dt = \int_0^1 (t^2 - t^4)dt + i\int_0^1 2t^3 dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5\right]_0^1 + i\left[\frac{1}{2}t^4\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{15} + \frac{1}{2}i$$

كما ذكرنا سابقاً أن التكامل العقدي له نفس الخواص التي تنطبق على التكامل الحقيقي وسنلاحظ هذا جلياً من خلال النظرية الآتية :

<u>نظرية ٤-١</u>: لتكن $f(t) = u_1(t) + iv_1(t)$, $g(t) = u_2(t) + iv_2(t)$ دوال مستمرة معرفة على الفترة $a \le t \le b$ فإن

أ. $\int_a^b \big(f(t) + g(t)\big)dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)dt$.

ب. لأي عدد حقيقي c فإن $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)dt$.

ج. إذا كان $c + id$ عدد عقدي فإن

$$\int_a^b (c + id)f(t)\,dt = (c + id)\int_a^b f(t)\,dt$$

د. $\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$.

هـ. $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt$.

و. $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \int_a^b [u_1(t)u_2(t) - v_1(t)v_2(t)]\,dt + i\int_a^b [u_1(t)v_2(t) + v_1(t)u_2(t)]\,dt$

البرهان: من الواضح أن برهان هذه الخواص يمكن إستنتاجها من التعريف مباشرةً أو باستخدام نفس أسلوب البرهان المتبع في التكامل الحقيقي لذلك ستتركها كتمرين للطالب، ولكنا هنا سنبرهن الخاصية (هـ) فقط وذلك بإعادة كتابة الدالة بالشكل القطبي فتكون

$$\int_a^b f(t)\,dt = \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| e^{\theta_0 i}$$

لذلك

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b e^{-\theta_0 i} f(t)dt$$

وكذلك

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b Re\left(e^{-\theta_0 i} f(t)\right)dt$$

وكما هو معروف لدينا من خلال خواص الأعداد العقدية أنه

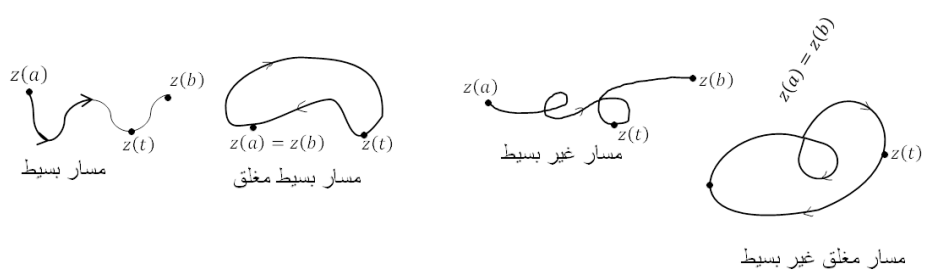
$$Re\left(e^{-\theta_0 i} f(t)\right) \le \left|e^{\theta_0 i} f(t)\right| \le |f(t)| \quad , \qquad a \le t \le b$$

اذن

$$\int_a^b Re\left(e^{-\theta_0 i} f(t)\right)dt \le \int_a^b |f(t)|\,dt$$

وبهذا يتحقق البرهان .

د الآن سنقوم بتعريف وحساب التكاملات من الصيغة $\int_c f(z)dz$ حيث f دالة ذات قيم معقدة و C مسار (منحني) في المستوي $\mathbb{C}$ وهنا سنقوم بإعادة تعاريف بعض ما تم عرضه في الفصل الأول كتعريف المسار C باستخدام مفهوم الدالة الوسيطية حيث C يسمى بسيط إذا لم يقطع نفسه بأي نقطة أي أن $z(t_1) \neq z(t_2)$ عندما يكون $t_1 \neq t_2$ و يسمى مغلق اذا كان $z(a) = z(b)$ أما إذا كانت نقطة التقاطع الوحيدة $z(a) = z(b)$ فان C يسمى مسار مغلق بسيط. وفي الشكل (٤-١) توضيح لهذه المعلومات. $\bullet z(t)$



الشكل (٤-١)

الدالة ذات القيم العقدية $z(t)$

$$C: z(t) = x(t) + iy(t) \qquad (1)$$

تكون قابلة للإشتقاق إذا كان كل من $x(t)$, $y(t)$ دوال حقيقية قابلة للإشتقاق حيث $a \le t \le b$ والمشتقة $z'(t)$ بالنسبة الى t تكون معرفة بالمعادلة

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t) \qquad a \le t \le b \qquad (2)$$

المنحني (المسار) C المعرف أعلاه يكون أملس إذا كان $z'(t)$ المعرفة أعلاه مستمرة وغير صفرية على الفترة $[a,b]$ وعليه يكون له ميل متجه غير صفري فإذا كان $x'(t_0) = 0$ فأن ميل المتجه $z'(t_0) = iy'(t_0)$ عمودياً وإذا كان $x'(t_0) \neq 0$ فإن الميل $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $z(t_0)$ يعطى بالصيغة $\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$ والزاوية الناتجة تكون بالصيغة الآتية:

$$\theta(t) = arg\big(z'(t)\big) = arg[x'(t) + iy'(t)]$$

<u>ملاحظـــة٤-١</u>: المنحني الأملس ليس له أي زوايا أو نتوء كما موضح بالشكل

$z(b)$

الشكل(٤-٢)

المنحني يسمى منحني جوردان إذا كان مستمراً ومتبايناً والمنحني الأملس يكون مساراً قابلاً للإصلاح إذا كانت $z'(t)$ موجودة في كل مكان في المجال المحدد $[a,b]$ وقابلة للتكامل بحسب مفهوم لينك أي ان

$$\int_a^b |z'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 dt}$$

واخيراً يسمى المنحني C المكون من عدد منتهٍ من المنحنيات الملساء مرتبطة بحيث أنه إذا كانت $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ منحنيات ملساء حيث C_k تتوافق من نقطة البداية C_{k+1} لكل $k = 1,2,\dots,n-1$ فإن C يسمى كانتور ويعبر عنه بالصيغة الآتية:

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

اما طول المسار (الكانتور)

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$$

$$L(\gamma) = \sum_{j=1}^{n} \big(length\ of\ \gamma_j\big) = \sum_{j=1}^{n} L\big(\gamma_j\big)$$

فإذا كانت الدالة مستمرة عند $\{\gamma\}$ فإن مسار التكامل (كانتور) للدالة f على طول المنحني γ يعرف كالآتي:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)dz$$

<u>مثال٤-٤:</u> إحسب التكامل للدالة $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ المعرفة بواسطة $f(z) = \overline{z}^2$ فوق عدد من المسارات من ٠ إلى $1 + i$.

الحل: (أ) ليكن γ_1 هو الخط الواصل من ٠ الى $1 + i$ لذلك تكون المعادلة الوسيطية هي

$$\gamma_1: z(t) = t + it \qquad 0 \le t \le 1$$

وعليه فإن $z'(t) = 1 + i$

وكذلك $f\big(z(t)\big) = (t - it)^2$

فإن التكامل يكون

$$\int_{\gamma_1} f = \int_0^1 (t - it)^2 (1 + i)dt = (1 + i)\int_0^1 (t^2 - 2it^2 - t^2)dt = \frac{2}{3}(1 - i)$$

(ب) ليكن γ_2 هو القوس للقطع المكافئ $y = x^2$ من ٠ إلى $1 + i$ لذلك فإن المعادلة الوسيطية هي

$$\gamma_2: z(t) = t + it^2 \qquad 0 \le t \le 1$$

وعليه فإن $z'(t) = 1 + 2it$

وكذلك $f\big(z(t)\big) = (t + it^2)^2 = t^2 - t^4 - 2it^3$

والتكامل يكون

$$\int_{\gamma_2} f = \int_0^1 (t^2 - t^4 - 2it^3)(1 + 2it)dt = \int_0^1 (t^2 + 3t^4 - 2it^5)dt = \frac{14}{15} - \frac{i}{3}$$

(ج) لتكن γ_3 مكونة من إتحاد الخط γ_1 من ٠ إلى ١ وكذلك γ_2 من ١ إلى $1 + i$ لذلك فإن المعادلة الوسيطية هي

$$\gamma_1: z(t) = t, \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\gamma_2: z(t) = 1 + 2it, \qquad 0 \le t \le 1$$

فإن التكامل يكون

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f = \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (1-it)^2 i dt = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} i$$

<u>مثال٤-٥:</u> لتكن $f(z) = z + \frac{1}{z}$ حيث $z \neq 0$ ولتكن γ معرفة كالآتي:

$$\gamma: z(t) = e^{\pi i t}, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

من الواضح إن γ هي منحني أملس وإن

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 \pi i \left(e^{\pi i t} + e^{-\pi i t}\right) e^{\pi i t} dt = \pi i$$

<u>٤-٣ (متراجحة ML):</u> لتكن f دالة مستمرة معرفة على مجموعة مفتوحة تحتوي على الكانتور C وأن $|f(z)| < M$ لكل $z \in C$ فإن

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML$$

حيث L طول الكانتور C.

البرهان: ليكن C منحني أملس حيث $z(t): [a,b] \to \mathbb{C}$

$$\left| \int_C f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f\left(z(t)\right) z'(t) dt \right| \leq \int_a^b \left| f\left(z(t)\right) \right| |z'(t)| dt$$

$$\leq M \int_a^b |z'(t)| dt = ML.$$

فإذا كان $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ حيث γ_1 ملساء فان

$$\left| \int_C f(z) dz \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} f(z) dz \right| < \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{C_j} f(z) dz \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} ML(C_j) = \sum_{j=1}^{n} ML(C)$$

<u>مثال٤-٦</u>: ليكن C كانتور معطى بالصيغة $z(t) = 2e^{it}\ ,\ \ 0 \leq t \leq 2\pi$ إثبت أن

$$\left|\int \frac{e^z}{z^2+1}\right| \leq \frac{4}{3}\pi e^z$$

الحل: بما أن

$$|z^2+1| \leq \left||z^2|-1\right| = |4-1| = 3 \quad \text{وأن} \quad |e^z| = e^x \leq e^z$$

فإن

$$\left|\int \frac{e^z}{z^2+1}\right| \leq \frac{e^z}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4\pi e^z}{3}$$