**كلية : التربية للعلوم الصرفة**

**القسم او الفرع : الرياضيات**

**المرحلة: الرابعة**

**أستاذ المادة : أ.د. عبد الرحمن سلمان جمعة**

**اسم المادة باللغة العربية : التحليل العقدي**

**اسم المادة باللغة الإنكليزية : Complex analysis**

**اسم الحاضرة العاشرة باللغة العربية: نظرية كوشي- كورسات**

**اسم المحاضرة العاشرة باللغة الإنكليزية : Cauchy-Goursat Theorem**

## ٤-٤ نظرية كوشي- كورسات: (*Cauchy-Goursat Theorem*)

في هذا الفصل سنعرض نظرية تعتبر المحور الرئيسي في نظرية الدوال ذات المتغيرات العقدية وبعض نتائجها الموسعة وذلك باستخدام عدد معين من المنطلقات الخاصة .

أما الآن لنفرض أن $C$ هو كانتور مغلق بسيط $z = z(t)$ , $a \le t \le b$ وبإتجاه عكس عقرب الساعة ولتكن الدالة $f$ تحليلية عند كل نقطة من نقاط $C$ داخل وعلى محيط $C$ لذلك سيكون لدينا

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f\big(z(t)\big)z'(t)dt$$

وإذا فرضنا أن $z(t) = x(t) + iy(t)$ , $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

فإنه و بعد إجراء التكامل على القيمة الحقيقية $t$ نستنتج

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b \big(ux'(t) - vy'(t)\big)\,dt + i\int_a^b \big(vx'(t) + uy'(t)\big)\,dt$$

ولهذا يكون بعد وضع $f(z) = u + iv$ , $dz = dx + idy$

$$\int_C f(z)dz = \int_c udx - vdy + i\int_c vdx + udy \qquad (3)$$

ومن نتائج التفاضل والتكامل فإننا نستطيع تحويل تكامل المسار(٣) إلى تكامل ثنائي باستخدام نظرية كرين والتي تنص على أنه إذا كانت الدوال الحقيقية $Q(x,y), P(x,y)$ مع مشتقاتها الجزئية الأولى مستمرة على جميع المنطقة المغلقة $R$ التـي تحوي على جميع النقاط الداخلية وعلى محيط الكانتور المغلق البسيط $C$ فإنه

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_R \big(Q_x - P_y\big)dxdy$$

وبما أن الدالة $f$ تحليلية في $R$ لذلك تكون مستمرة داخل $R$ ولهذا

$$\int_C f(z)dz = \iint_R \big(-v_x - u_y\big)dxdy + i\iint_R \big(u_x - v_y\big)dxdy$$

وحيث أن معادلتي كوشي-ريمان متحققة لذلك يكون لدينا

$$\int f(z)dz = 0$$

هذه النتيجة حصل عليها كوشي في القرن التاسع عشر وكما أسلفنا تعتبر من النتائج المهمة في التكامل العقدي.

**مثال٤-٧:** إذا كان $C$ كانتور مغلق بسيط فإن

$$\int_C e^{z^3}\, dz = 0$$

وذلك لأن الدالة تحليلية في جميع النقاط بالإضافة إلى أن $f'(z) = 3z^2e^{z^3}$ مستمرة كذلك.

وهنا تجدر الإشارة إلى أن العالم كورسات *Goursat* أول من برهن أن شرط الاستمرارية لـ $f'$ يمكن إلغاءه أي ان $f'$ لا يشترط أن تكون مستمرة للدالة التحليلية $f$ وعليه تم تنقيح النتيجة التي حصل عليها كوشي بحذف شرط الإستمراريـــة للمشتقة $f'$ وهذه النتيجة سميت نظرية كوشي-كورسات والتي سنعرضها في النظرية القادمة .

**نظرية٤-٢:** إذا كانت الدالة $f$ تحليلية على المجال المتصل البسيط $D$ و $C$ ( كانتور مغلق بسيط ) يقع داخل $D$ فان

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

**البرهان:** من نظرية كرين نجد أن

$$\int u(x,y)dx - v(x,y)dy = \iint \left(-v_x - u_y\right)dxdy = 0$$

وكذلك

$$\int_C v(x,y)dx + u(x,y)dy = \iint_D \left(u_x - v_y\right)dxdy = 0$$

لذلك ينتج لدينا

$$\int_C f\,(z)dz = \int_C (u+iv)\,(dx+idy)$$

$$= \int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_C v(x,y)dx + u(x,y)dy = 0$$

**مثال٤-٨:** ليكن $C$ منحني بسيط مغلق ، ولتكن $f(z) = e^z$ لذلك وبما ان $f$ دالة تحليلية على $D$ فإنه حسب نظرية كوشي-كورسات

$$\int_C e^z dz = 0$$

**نتيجة٤-١:** إذا كان كل من $C_2, C_1$ كانتور مغلق بسيط وبالإتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة) حيث $C_2$ يقع داخل $C_1$ والدالة $f(z)$ تحليلية على منطقة مغلقة تحتوي على $C_2, C_1$ وكل النقاط بينهما فإن

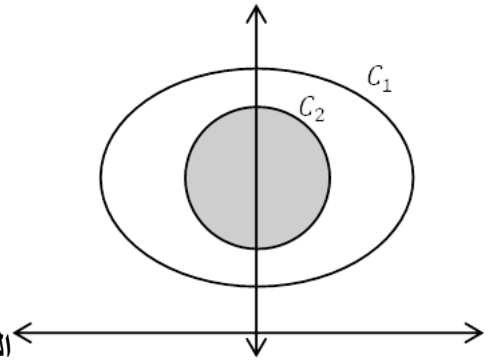
$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

وهذه النتيجة تعطينا بأنه قيمة التكامل لا تتعلق بالطريق المسلوك مادام هذا الطريق هو مغلق وبسيط والدالة تحليلية على مجال يحتويه.

**مثال٤-٩:** إحسب التكامل $\int_{C_1} \frac{dz}{z}$ حيث $C_1$ هو القطع الناقص الذي معادلته

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

**الحل:** الدالة $f(z)$ غير تحليلية عندما $z = 0$ لذلك من الممكن أن نختار $C_2$ هو الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ١ أي أن $C_2: |z| = 1$ وكما هو موضح بالشكل(٤-٣)




**الشكل(٤-٣)**

وهنا يمكن ملاحظة ما يلي:

١. المنحني $C_2$ يقع بأكمله داخل القطع الناقص $C_1$ .

٢. الدالة $f(z)$ دالة تحليلية في المنطقة الواقعة بين $C_2, C_1$ .

٣. الدالة $f(z)$ دالة تحليلية في كل نقطة من نقاط $C_2, C_1$ .

لذلك حسب النتيجة السابقة يكون لدينا

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

وبما أن $C_2: |z| = 1$ لذلك ليكن $z = e^{i\theta}$ , $dz = ie^{i\theta}d\theta$ حيث $0 \le \theta \le 2\pi$

فإن

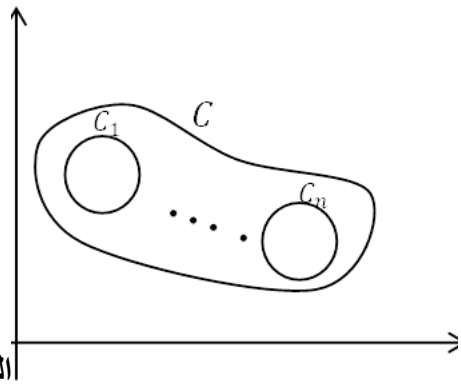
$$\int_{C_2} f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} id\theta = [i\theta]_0^{2\pi} = 2\pi i$$

ومنه يكون

$$\int_{C_1} f(z)dz = 2\pi i$$

**<u>نظرية٤-٣</u>:** ليكن $f(z)$ دالة تحليلية في المنطقة الواقعة بين المنحنيات $C_1, \dots, C_n$ والمنحني $C$ وبشرط ان تكون $C_k$ $(k = 1, \dots, n)$ غيرمتقاطعة مع بعضها وجميعها منحنيات بسيطة مغلقة وكذلك $f(z)$ تحليليـــــــة على المنحنيات $C_1, \dots, C_n$ عندئذٍ يكون

$$\int_C f(z) = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)dz = 0$$

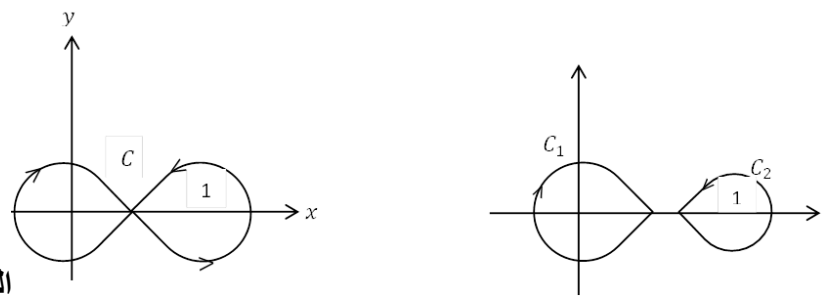



**الشكل (٤-٤)**

**<u>مثال٤-١٠</u>:** إثبت أن

$$\int_{c} \frac{z+3}{z^2-z} = 14\pi i$$

حيث $C$ كانتور كما في الشكل( ٤-٥).




**الشكل (٤-٥)**

**الحل:**

$$\int_{C} f(z)dz = -3\int_{C} \frac{1}{z}dz + 4\int_{C} \frac{1}{z-1}dz$$

لإيجاد التكامل الأول في الطرف الأيمن يكون

$$-3\int \frac{1}{z}dz = -3\int_{C_1} \frac{1}{z}dz + (-3)\int_{C_2} \frac{1}{z}dz = 3\int_{-C_1} \frac{1}{z}dz + 0 = 6\pi i$$

وبنفس الطريقة

$$4\int_{C}\frac{1}{z-1}dz = 4\int_{C_1}\frac{1}{z-1}dz + 4\int_{C_2}\frac{1}{z-1}dz = 0 + 8\pi i = 8\pi i$$

لذلك يكون الناتج

$$\int f(z)dz = 6\pi i + 8\pi i = 14\pi i$$

**<u>نظرية٤-٤:</u>** إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة بسيطة الإتصال $D$ وكان $a, z \in D$ عندئذٍ يكون

$$F(z) = \int_{a}^{z} f(u)du$$

تحليلية في المنطقة $D$ ويكون $F'(z) = f(z)$

**البرهان:** من الممكن استعمال الترميز

$$\int_{C} f(u)du = \int_{a}^{z} f(u)du$$

وليكن $C_2, C_1$ كانتورين في $D$ لهما نفس نقطة البداية $a$ والنهاية $z$ لذلك سيكون لدينا $C = C_1 - C_2$ منحني بسيط مغلق وباستخدام نظرية كوشي-كورسات ينتج لنا

$$\int_{C_1} f(u)du - \int_{C_2} f(u)du = \int_{C_1 - C_2} f(u)du = 0$$

ولبرهنة الجزء الثاني ، لتكن $z$ نقطة ثابتة وليكن $\Delta z$ صغيرة بما فيه الكفاية لذلك $z + \Delta z$ أيضاً تقع داخل $D$ وبما ان $z$ نقطة ثابتة فإن $f(z) = k$ حيث $k$ ثابت وعليه يكون

$$\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)du = \int_{z}^{z+\Delta z} kdu = k\Delta z = f(z)\Delta z$$

ومن الجهة الأخرى لدينا

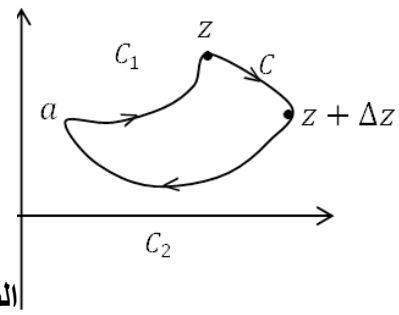
$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{a}^{z+\Delta z} f(u)du - \int_{a}^{z} f(u)du$$

$$= \int_{C_1}^{a} f(u)du - \int_{C_2}^{a} f(u)du = \int_{C} f(u)du$$

حيث $C$ كانتور يربط النقطة $z$ مع $z + \Delta z$

$C_1$ يربط $a$ مع $z$ ، $C_2$ يربط $a$ مع $z + \Delta z$

وكما موضح بالشكل( ٤-٦).




**الشكل (٤-٦)**

وبما ان $f$ دالة مستمرة عند النقطة $z$ ،إذن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أنه إذا كان

$|u - z| < \delta$ فان $|f(u) - f(z)| < \varepsilon$

ومن المعادلات اعلاه يكون لدينا $|\Delta z| < \delta$ يؤدي الى ان

$$\left|\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{C} f(u)du - \int_{C} f(z)du\right|$$

$$\leq \frac{1}{|\Delta z|}\int_{C} |f(u) - f(z)|du$$

$$< \frac{1}{|\Delta z|}\varepsilon|\Delta z| = \varepsilon$$

وعليه فالطرف الأيسر يذهب إلى الصفر عندما يكون $\Delta z \to 0$ وهذا يعني $F'(z) = f(z)$

وبهذا ينتهي البرهان .

**<u>نظرية٤-٥</u>:** إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة بسيطة الإتصال $D$ وكانت $F(z)$ هي أصل مشتقة لها عندئذٍ لأي منحني يصل بين النقطتين $b, a$ حيث $a, b \in D$ يكون

$$\int_a^b f(z)dz = F(z)|_a^b = f(b) - f(a)$$

**البرهان:** من النظرية السابقة نستنتج أن $\int_a^b f(z)dz$ مستقل عن الطريق لأن

$$F(z) = \int_a^z f(u)du$$

تحليلية ولتكن $G$ أصل مشتقة الدالة التحليلية $f$ فإن

$$G(z) - F(z) = H(z)$$

تحليلية وأن $H'(z) = 0$ لكل $z \in D$ وعليه يكون $H(z) = k$ حيث $k$ ثابت و

$G(z) = F(z) + k$ لذلك $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$

وبهذا ينتهي البرهان .

**مثال٤-١١:** إثبت أن

$$\int_1^i \sin z\, dz = \cos 1 - i \cosh 1$$

**الحل:** أصل المشتقة للدالة $f(z) = \sin z$ هي $F(z) = -\cos z$ لذلك

$$\int_1^i \sin z\, dz = -\cos i + \cos 1 = \cos 1 - i \cosh 1$$

من الواضح لدينا أن من أهم النتائج الرئيسية في نظرية الدوال العقدية هي نتيجة صيغة كوشي التكاملية والتي توضح لنا أن قيمة الدالة التحليلية من الممكن تمثيلها تكاملياً بعدد معين من المسارات المغلقة البسيطة (الكانتور) وسنلاحظ أيضاً في الفصول القادمة أهمية هذه الصيغة ببرهنة صيغة تايلور وتمثيل متسلسلات القوى التي تدخل في بناءها.

## ٤-٥ صيغة كوشي التكاملية: (*Cauchy Integral Formula*)

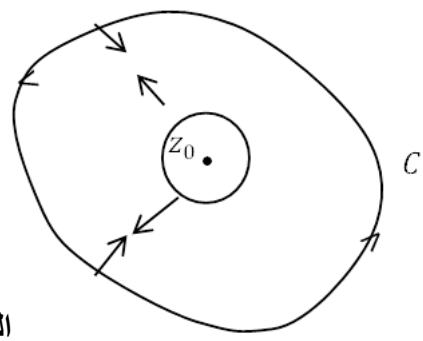
ليكن $C$ كانتور مغلق بسيط بالإتجاه الموجب ولتكن $f$ دالة تحليلية على منطقة بسيطة الإتصال $D$ تحوي $C$ ولتكن $z_0$ أي نقطة داخلية تقع داخل $C$ فإن :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

**البرهان:** الدالة $\frac{f(z)}{z-z_0}$ دالة تحليلية في $D$ ما عدا عند النقطة $z_0$ ومن نتيجة مبرهنة كوشي-كورسات بأن التكامل على المنحني $C$ هو نفسه على المنحني $C_r$

حيث

$$C_r: |z - z_0| = r$$




**الشكل (٤-٧)**

أي أن

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

من الممكن كتابة الطرف الأيمن كالآتي:

$$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = \int_{C_r} \frac{f(z_0)}{z - z_0}\,dz + \int_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz$$

$$= f(z_0)\int_{C_r} \frac{dz}{z - z_0} + \int_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz$$

$$= f(z_0)2\pi i + \int_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz$$

أما إذا أخذنا $r \to 0$ فإن المعادلة أعلاه تكون

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0)2\pi i + \lim_{r\to 0^+}\int_{C_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$$

لتكن

$$M_r = ma\,x\left\{\int |f(z)-f(z_0)| : z \in C_r\right\}$$

وبما ان $f$ دالة مستمرة ومن الواضح $M_r \to 0$ عندما $r \to 0$

لذلك نستنتج ان

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| = \frac{|f(z)-f(z_0)|}{z-z_0} \le \frac{M_r}{r}$$

إذن هذا يقابل

$$\left|\int_{C_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \le \frac{M_r}{r}L(C_r) = 2\pi M_r$$

وعليه

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{C_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = 0$$

وبهذا نستنتج أن

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

وبهذا ينتهي البرهان .

**<u>مثال٤-١٢:</u>** إحسب $\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz$ حيث $C$ دائرة $|z-2| = 3$ بالإتجاه الموجب.

**الحل:** من الواضح $f(z)=\frac{e^{z^2}}{z-6}$ دالة تحليلية وأن $z_0=0$ تقع داخل $C$ لذلك باستخدام صيغة كوشي التكاملية فإننا نستنتج

$$f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz$$

ومنه

$$\int \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz=2\pi i\left(\frac{-1}{6}\right)=\frac{-\pi i}{3}$$

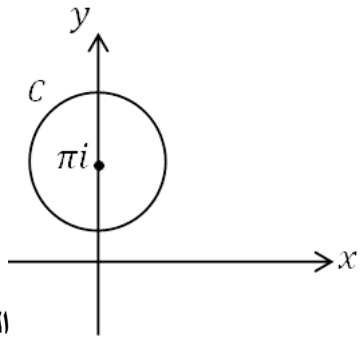
**<u>مثال٤-١٣:</u>** إحسب $\int_C \frac{z^2e^z}{z-\pi i}dz$ حيث $C: z(t)=e^{it}+\pi i$ وأن $0\le t\le 2\pi$

**الحل :** الدالة $f(z)=z^2e^z$ دالة تحليلية على المستوي العقدي $\mathbb{C}$ وأن $z_0=\pi i$ نقطة تقع داخل الكانتور $C$ كما في الرسم وحسب صيغة كوشي التكاملية فإن

$$\int_C \frac{z^2e^z}{z-\pi i}dz=2\pi i f(z_0)$$

$$=2\pi i f(\pi i)$$

$$=2\pi^3 i$$




**الشكل(٤-٨)**

ومن صيغة كوشي التكاملية يمكن أن نستنتج أنه إذا كانت الدالة تحليلية عند نقطة فإن جميع مشتقات الدالة عند تلك النقطة تكون أيضا تحليلية ولنبدأ بالنظرية الآتية .

**<u>نظرية٤-٦:</u>** لتكن الدالة $f$ تحليلية داخل وعلى الكانتور المغلق البسيط $C$ وبالإتجاه الموجب ولتكن $z$ أي نقطة داخلية للكانتور $C$ فإن

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)ds}{(s-z)^2}$$

**البرهان :** لتكن $t$ أصغر مسافة بين $z$ وجميع النقاط على $C$ ومن نظرية كوشي التكاملية نستنتج ان

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)ds}{s-z}$$

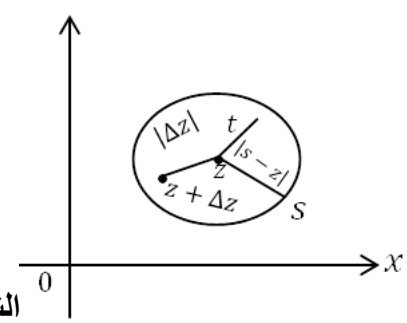
حيث $s$ نقاط على $C$.

لذلك يكون لدينا

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\frac{1}{s-z-\Delta z} - \frac{1}{s-z}\right)\frac{f(s)}{\Delta z}ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)ds}{(s-z-\Delta z)(s-z)},$$

حيث $0 < |\Delta z| < t$ ( أنظر الشكل ٤-٩)




**الشكل (٤-٩)**

إذن يصبح لدينا

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)ds}{(s-z)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Delta z f(s)ds}{(s-z-\Delta z)(s-z)^2}$$

وليكن $M$ هو أكبر قيمة للدالة $|f(s)|$ على $C$

وبما أن $|\Delta z| < t \ , \ |s - z| \geq t$

فإن

$$|s - z - \Delta z| = |(s - z) - \Delta z| \geq \big||s - z| - |\Delta z|\big| \geq t - |\Delta z| > 0$$

وعليه يكون

$$\left|\int_C \frac{\Delta z f(s) ds}{(s - z - \Delta z)(s - z)^2}\right| \leq \frac{|\Delta z| M}{(t - |\Delta z|) t^2} L$$

حيث $L$ طول الكانتور $C$

والآن بأخذ الغاية عندما $\Delta z \to 0$ نستنتج

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s) ds}{(s - z)^2} = 0$$

وبهذا ينتهي برهان النظرية.

**مثال١٤:** إحسب $\int_C \frac{e^{z^2} dz}{(z-i)^2}$ حيث $C: |z| = 3$ .

**الحل:** بتطبيق النظرية السابقة يكون لدينا

$$\int_C \frac{e^{z^2} dz}{(z - 2i)^2} = 2\pi i f'(2i)$$

حيث $f(z) = e^{z^2}$

لذلك

$$\int_C \frac{e^{z^2} dz}{(z - 2i)^2} = 2\pi i \left(4 i e^{4i^2}\right)$$

$$= -8\pi e^{-4}$$

**<u>نظرية٤-٧</u>:** لتكن $f$ دالة تحليلية في منطقة بسيطة الإتصال $D$ وإذا كانت $z$ نقطة داخلية للمنحني $C$ وليكن $C$ كانتور مغلق بسيط بالإتجاه الموجب ويقع داخل $D$

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}ds$$

**البرهان:** في حالة $n = 1$ فقد تم برهانها في النظرية السابقة.

وهنا سنستخدم نفس القيم للدالة التحليلية $f'$ ونبرهن $f''$ أي عندما $n = 2$ لإي عدد $n$ وبإستخدام الإستقراء الرياضي نستطيع البرهنة .

**<u>مثال٤-١٥</u>:** إحسب $\int_C \frac{e^{2z}}{z^n}dz$ حيث $C$ دائرة الوحدة $C: |z| = 1$

**الحل:** بإستخدام النظرية السابقة فإن

$$\int_C \frac{e^{2z}}{z^n}dz = \int_C \frac{f(z)dz}{(z-0)^{3+1}} = \frac{2\pi i}{3!}f'''(0) = \frac{8\pi i}{3}$$

**<u>نظرية٤-٨</u>:** إذا كانت $f$ دالة تحليلية عند نقطة فإن مشتقاتها من الرتبة $n$ موجودة عند تلك النقطة وتكون جميعها تحليلية.

**البرهان:** لتكن $f$ تحليلية في المنطقة $D$ ولتكن $z_0 \in D$ فإنه يوجد قرص مغلق $|z - z_0| \leq R$ محتواة في $D$ الدائرة $C$ حيث $C: |z - z_0| = R$ ممكن إستخدامها في النظرية السابقة لإثبات أن $f^n(z_0)$ موجود لكل $n$ .