كلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الرياضيات

المرحلة: الرابعة

أستاذ المادة : أ.د. عبد الرحمن سلمان جمعة

اسم المادة باللغة العربية : التحليل العقدي

اسم المادة باللغة الإنكليزية : Complex analysis

اسم الحاضرة الثانية عشر باللغة العربية: المتتابعات و المتسلسلات

اسم المحاضرة الثانية عشر باللغة الإنكليزية : Sequences and Series :

٥-١مقدمة

في هذا الفصل سنتطرق إلى دراسة المتسلسلات والمتتابعات للدالة التحليلية وكذلك المقارنة بين خواصها وخواصها في الدوال الحقيقية وأن هناك الكثير من التشابه بينهما وسنخصص هذا الفصل من خلال عرض النظريات التي تضمنت تمثيل الدوال التحليلية بالمتسلسلات وكذلك بعض الإختبارات الخاصة بالتقارب وايجاد منطقة التقارب بالإضافة إلى دراسة بعض المتسلسلات المهمة كتايلوروماكلورين ومتسلسلة لورانت التي تعتبر مفتاح لحل أغلب المعضلات في دراسة الدوال العقدية وتطبيقاتها.

تعريف٥-١: تكون المتتابعة $\langle z_n \rangle$ متقاربة للعدد z_0 إذا تحقق الشرط الآتي :

لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث أن $|z_n - z_0| < \varepsilon$ لكل $n > n_0$ وتكتب بالشكل $lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ وإذا لم تكن متقاربة فإنها متباعدة.

مثال٥-١: تكون المتتابعة $\langle z_n \rangle = \langle z^n \rangle$ حيث $|z| < 1$ متتابعة متقاربة أما في حالة $|z| > 1$ فإن المتتابعة تكون متباعدة.

مثال٥-٢: إثبت أن $lim_{n\to\infty} \frac{i^n}{n} = 0$.

الحل : لتكن $\varepsilon > 0$ ، نختار $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ لذلك يكون لدينا لكل $n > n_0$

$$\left|\frac{i^n}{n} - 0\right| = \left|\frac{i^n}{n}\right| = \frac{|i|^n}{n} = \frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

نظرية٥-١: لتكن $z = x + iy\,, (n = 1,2, \dots)\,, z_n = x_n + iy_n$ فإن

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \text{إذا وفقط إذا كان} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x\,,\ \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

البرهان : نفرض اولاً أن $lim_{n\to\infty} z_n = z$ لذلك لكل $\varepsilon > 0$ يوجد طبيعي n_0 بحيث ان

$$|(x_n + iy_n) - (x + iy)| < \varepsilon \qquad \forall\, n > n_0$$

ولكن

$$|x_n - x| \le |(x_n - x) + i(y_n - y)| = |(x_n + iy_n) - (x + iy)|,$$

$$|y_n - y| \le |(x_n - x) + i(y_n - y)| = |(x_n + iy_n) - (x + iy)|$$

وهذا يؤدي إلى أن

$$|x_n - x| < \varepsilon \ , \qquad |y_n - y| < \varepsilon \quad \forall\, n > n_0$$

ولبرهنة الإتجاه الآخر لنفرض أن الشرط الثاني يتحقق لذلك نفرض أن $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد n_2, n_1 اعداد طبيعية بحيث أن

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n > n_1$$

و

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n > n_2$$

ليكن $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ فإن

$$|(x_n + iy_n) - (x + iy)| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \ \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

وعليه نستنتج أن

$$|z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \forall\, n > n_0.$$

من خلال النظرية ٥-١ فإن الصيغة الآتية دائما صحيحة

$$lim\, x_n + iy_n = lim\, x_n + i\, lim\, y_n$$

<u>مثال٥-٣:</u> إثبت أن $\langle z_n \rangle = \langle \frac{n+i(n+3)}{n+1} \rangle$ متقاربة.

الحل : لنعيد كتابة المتتابعة

$$z_n = \frac{n}{n+1} + i\frac{n+3}{n+1}$$

لذلك

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} + \lim_{n\to\infty} i\frac{n+3}{n+1}$$

$$= 1 + i$$

<u>تعريف٥-٢:</u> لتكن $\langle z_n \rangle$ متتابعة عقدية عندئذٍ يسمى المجموع

$$S = z_1 + \cdots + z_n$$

بمتسلسلة عقدية لانهائية ونرمز لها بالرمز $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$

فإذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $\langle S_n \rangle$ متقاربة في S فإن المتسلسلة $\sum z_n$ متقاربة أما إذا كانت $\langle S_n \rangle$ متباعدة فإن المتسلسلة $\sum z_n$ متباعدة.

مثال٥-٤: إبحث في تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

الحل : أولاً نجد متتابعة المجاميع الجزئية

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$$

نضرب الطرفين بـ z فأن

$$zS_n = z + z^2 + \cdots + z^n$$

بالطرح نحصل على

$$S_n - zS_n = 1 - z^n$$

$$S_n(1 - z) = 1 - z^n$$

إذن

$$S_n = \frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} - \frac{z^n}{1 - z}$$

والآن نأخذ الغاية للطرفين فيكون لدينا

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - z} - \lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{1 - z}$$

وعندما $|z| < 1$ فإن

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1 - z} - 0 = \frac{1}{1 - z}$$

إذن المتسلسلة متقاربة ومجموعها هو

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z} \qquad , |z| < 1$$

نظرية٥-٢: لتكن $z_n = x_n + iy_n \quad (n = 1,2, \dots)$ ولتكن $S = x + iy$ فإن

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

إذا وفقط إذا كان $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$.

البرهان : لتكن $S_N = X_N + iY_N$ حيث

$$X_N = \sum_{n=1}^{N} x_n \quad , \qquad Y_N = \sum_{n=1}^{N} y_n$$

لذلك يكون

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

متحققة إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S$$

وبواسطة النظرية (٥-١) نجد أن $lim_{N\to\infty} X_N = X\ ,\ lim_{N\to\infty} Y_N = Y$

ولبرهنة الإتجاه الآخر ، بما أن Y_N, X_N مجاميع جزئية للمتسلسلتان

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

وبهذا ينتهي البرهان.

نلاحظ من النظرية (٥-٢) أن $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + iy_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum_{n=1}^{\infty} y_n$

عندما تكون المتسلسلتان في الطرف الأيمن متقاربة.

من الواضح إنه عند دراستنا التقارب للمتسلسلات العقدية يؤدي إلى دراسة تقارب المتسلسلات الحقيقية لهذا سنقوم بدراسة بعض الإختبارات لتقارب المتسلسلات.

٥-٢ إخـــتبار النـــسـبة: (*Ratio Test*)

لتكن $\langle z_n \rangle$ متتابعة عقدية بحيث أن

$$P = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$$

حيث P عدد حقيقي موجب فإن

أ. $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ متقاربة إذا كانت $P < 1$.

ب. $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ متباعدة إذا كانت $P > 1$.

ج. الإختبار يفشل إذا كانت $P = 1$.

<u>مثال٥-٥:</u> أدرس تقارب المتسلسلات الاتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n+2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n)^n}{n!\,(e-2i)^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n)^n}{n!\,(e)^n}$$

الحل : نجري إختبار النسبة

$$P = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(1+i)^{n+1}}{n+3} \cdot \frac{n+2}{(1+i)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}|1+i|\right) = |1+i| = \sqrt{2} > 1$$

إذن المتسلسلة متباعدة.

ايضا نجري اختبار النسبة على المتسلسلة الثانية فيكون لدينا

$$P = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n!\,(e-2i)^n(e-2i)} \cdot \frac{n!\,(e-2i)^n}{(n)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^n}{(n)^n}\left|\frac{1}{(e-2i)}\right|\right) = \frac{e}{(\sqrt{(e)^2+4})} < 1$$

اما المتسلسلة الاخيره فان هذا الاختبار سيفشل لان قيمة $P = 1$.

<u>٥-٣ إخـتبار المقارنــة:</u> (*Comparison Test*)

لتكن $\sum P_n$ متسلسلة معقدة حيث (P_n عدد حقيقي موجب) متقاربة وكانت $|z_n| \le P_n$ لكل $(n = 0,1,2,\dots)$ فإن المتسلسلة العقدية $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ متقاربة.

<u>مثال٥-٦:</u> إدرس تقارب وتباعد المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + i\sqrt{n}}{n+1}$$

الحل :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + i\sqrt{n}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

المتسلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ متقاربة حسب اختبار ليبنتز.

أما بالنسبة للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ فإننا نقارنها مع $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ فإن

$$lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}$$

إذن المتسلسلتان من نوع واحد أما متقاربتين او متباعدتين

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة لذلك يكون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ متباعدة وعليه فإن المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + i\sqrt{n}}{n+1}$$

متباعدة أيضاً.

<u>تعريف٥-٣</u>: لتكن $\langle f_n(z) \rangle$ متتابعة من الدوال العقدية معرفة على المجال المشترك D نقول أن المتتابعة $\langle f_n(z) \rangle$ متقاربة موضعياً من الدالة $f(z)$ إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد حقيقي موجب k (يعتمد على k, ε) بحيث أن

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \ \forall \ n > k$$

بالإضافة إلى ذلك فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ متقاربة موضعياً من الدالة f إذا كانت المتتابعة $\langle S_n(z) \rangle$ متقاربة موضعيا من الدالة f وان $S_n = \sum_{m=0}^{n} f_m$.

<u>تعريف٥-٤</u>: تكون المتتابعة $\langle f_n(z) \rangle$ متقاربة بانتظام على المجال المشترك D للدالة $f(z)$ إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد حقيقي موجب $k(\varepsilon)$ يعتمد على ε فقط بحيث أن لكل $z \in D$ فإن

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \ \ \forall\, n > k$$

وكذلك تكون المتسلسلة $\sum f_n$ متقاربة بانتظام على المجال المشترك D إذا كان $\langle S_n(z) \rangle$ متقاربة بانتظام على D.

نظرية٥-٣: لتكن $\langle f_n(z) \rangle$ متتابعة من الدوال العقدية المستمرة على D فإذا كانت المتتابعة متقاربة من الدالة $f(z)$ بانتظام فإن $f(z)$ مستمرة على D.

البرهان: بما أن $\langle f_n(z) \rangle$ متقاربة بانتظام من $f(z)$ فإن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $k(\varepsilon) > 0$ ولكل $z \in D$ فإن

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \ \forall\, n > k$$

وبما أن $f_n(z)$ دالة مستمرة على D فإن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $k > 0$ فإذا كان

$$|z - z_0| < k \Longrightarrow |f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \ \forall\, z_0 \in D$$

وعليه لكل $z_0 \in D$ فإن

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f_n(z) - f(z)| + |f_n(z_0) - f(z)| + |f_n(z_0) - f(z_0)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

لذلك تكون f مستمرة.

نظرية٥-٤: لتكن $\{f_n(z)\}$ متتابعة من الدوال العقدية المعرفة على D المتقاربة بانتظام من $f(z)$ وليكن C كانتور بسيط يقع في D فإن

$$\lim_{n\to\infty} \int_C f_n(z)dz = \int_C f(z)dz$$

البرهان: من التقارب المنتظم للمتتابعة $\{f_n(z)\}$ يكون لدينا ولكل $\varepsilon > 0$

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{L} \ \ \forall\, z \in D$$

ومنه

$$\left| \int_C f_n(z)dz - \int_C f(z)dz \right| = \left| \int_C \big(f_n(z) - f(z)\big)dz \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{L(C)} L(C) = \varepsilon \qquad (\text{حسب متراجحة } ML)$$

حيث $L(C)$ طول الكانتور C .

نظرية٥-٥: لتكن $\{f_n(z)\}$ متتابعة من الدوال التحليلية على D المتقاربة بانتظام من $f(z)$ عندئذٍ يكون $f(z)$ دالة تحليلية على D .

البرهان: ليكن C كانتور (منحني بسيط مغلق) يقع في D عند

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int f_n(z)dz = 0$$

حسب مبرهنة كوشي وذلك لأن $f_n(z)$ تحليلية ولذلك تكون $f(z)$ تحليلية حسب مبرهنة موريرا.

٥-٤ إختبار فراشتراس: (*M-Test*)

لتكن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ متسلسلة دوال معقدة في المجال المشترك $|f_n(z)| \le M_n \,, \forall\, n = D$ $0,1,\ldots$ لكل $z \in D$ تحقق حيث $\sum M_n$ متسلسلة حقيقية موجبة متقاربة للعدد M عندئذٍ تكـــون $\sum f_n(z)$ متقاربة بانتظام.

مثال٥-٧: إبحث في تقارب المتسلسلة الآتية:

$$\sum \frac{z^n}{n^2}$$

حيث $z \in D(0,1)$.

الحل: نلاحظ أنه ولكل $z \in D(0,1)$ فإن

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{|z|^n}{n^2} < \frac{1}{n^2}$$

لتكن $M_n = \frac{1}{n^2}$ وبما ان $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة ،إذن حسب(*M-Test*) فإن $\sum \frac{z^n}{n^2}$ متقاربة بانتظام.

مثال٥-٨: إبحث في تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n|z|}{n(n+1)}$$

الحل: حسب فيراشتراس (*M-Test*) فإن

$$\left|\frac{\cos nz}{n(n+1)}\right| \leq \frac{1}{n(n+1)} \qquad \forall\, z \in D$$

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة لذلك تكون المتسلسلة متقاربة بانتظام.

٥-٥ متسلسلة القوى : (*Power Series*)

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} C_n(z-a)^n$ هي متسلسلة عقدية غير منتهية وتسمى متسلسلة القوى حيث C_n معاملات تنتمي إلى الأعداد العقدية و a يسمى مركز متسلسلة القوى وأيضاً عدد عقدي وتحدد مناطق الإقتراب لمتسلسلة القوى بالإعتماد على معاملاتها وتعتبر حالة خاصة من متسلسلة الدوال الأساسية المهمة ولدراسة هذا النوع من المتسلسلات يجب أن نعرف كيف نحسب نصف قطر التقارب ومن خلاله نتمكن من حساب المشتقات والتكاملات حد بعد حد ومن الواضح أيضاً أنه لكل متسلسلة قوى يوجد عدد حقيقي موجب R وتكون المتسلسلة متقاربة مطلقاً إذا كان $|z-a| < R$ ومتباعدة في حالة $|z-a| > R$ أما في حالة $|z-a| = R$ فإن في هذه الحالة المتسلسلة أما تكون متقاربة أو تكون متباعدة وان R يسمى نصف قطر التقارب ويجب أن يكون وحيد فإذا كانت المتسلسلة متقاربة فقط عندما $z = a$ فإن $R = 0$. أما إذا كانت متقاربة في كل نقاط المستوي العقدي فإن $R = \infty$.

ويعطى نصف قطر التقارب R بالقانون الآتي :

$$R = \frac{1}{L} \quad \text{حيث}$$

١) $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|$ في حالة وجود الغاية

2) $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|}$ في حالة وجود الغاية

3) $L = \lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|C_n|}$ هذه الغاية دائماً موجودة

مثال٥-٩: جد نصف قطر التقارب للمتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{n+1}$$

الحل: نجد النسبة الآتية

$$\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \left|\frac{n+1}{n+2}\right|$$

لذلك فإن

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\right| = 1$$ وعليه فإن $R = 1$

مثال٥-١٠: جد نصف قطر التقارب للمتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{(z+i)^n}$$

الحل: نجد قيمة $|C_n|^{\frac{1}{n}} = n+1$

وهذا يؤدي إلى أن $(n+1) \to \infty$ عندما $n \to \infty$ لذلك باستخدام إختبار الجذر فإن نصف قطر التقارب $R = 0$ وهذا يعني أنها متقاربة فقط عندما $z = -i$.

مثال٥-١١: جد نصف قطر التقارب للمتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-3-2n}{n+1}\right)^n$$

الحل: من الواضح أن المتسلسلة متقاربة لكل نقاط المستوي z (باستخدام اختبار الجذر) لذلك فإن $R = \infty$.

مثال٥-١٢: جد نصف قطر التقارب للمتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty}(4+(-1)^n)^n(z+2)^n$$

الحل: نلاحظ أن $C_n = (4+(-1)^n)^n$

لذلك يكون لدينا $C_n = (4-1)^n = 3^n$ في حالة n فردي.

وكذلك $C_n = (4+1)^n = 5^n$ في حالة n زوجي.

وفي هذه الحالة لايمكن حساب الغاية الإعتيادية ولكن يجب أن نحسب الغاية العليا حيث

$$\lim_{n\to\infty} sup\sqrt[n]{|C_n|} = \lim_{n\to\infty} sup\sqrt[n]{5^n} = 5$$

لذلك $R = \frac{1}{5}$ والمتسلسلة متقاربة في القرص $|z+2| < \frac{1}{5}$.

الآن سنكتفي بإعطاء النظرية المهمة التالية وبدون برهان .

نظرية٥-٦: لتكن R نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى فأن

أ. $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n$ تحليلية على دائرة C مركزها α ونصف قطرها R. **ب.** إذا كان γ أي كنتور داخل الدائرة C و $g(z)$ دالة مستمرة على γ فإن

$$\int_{\gamma} g(z)S(z)dz=\int_{\gamma} g(z)\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n\,dz$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\int_{\gamma} g(z)(z-a)^n dz$$

وإذا كان $g(z)\equiv 1$ فإن

$$\int_{\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n\,dz=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\int_{\gamma}(z-a)^n dz$$

ج. $$S'(z)=\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}nC_n(z-a)^{n-1}$$

ونصف قطر التقارب للمشتقة هو أيضاً R.

نظرية٥-٧: إذا كانت $|z|<1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ متقاربة للدالة $f(z)=\frac{1}{1-z}$ أي أن

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=1+z+z^2+\cdots+z^k+\cdots=\frac{1}{1-z}$$

أما إذا كانت $|z|\geq 1$ فإن المتسلسلة متباعدة.

البرهان: نفرض أن $|z|<1$ لذلك يجب أن نبرهن أن

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1-z}$$

حيث

$$S_n=1+z+\cdots+z^{n-1} \qquad (1)$$

نضرب الطرفين بالعدد z نحصل على

$$zS_n = z + z^2 + \cdots + z^{n-1} + z^n \qquad (2)$$

بطرح (٢) من (١) ينتج $(1-z)S_n = 1 - z^n$

لذلك

$$S_n = \frac{1}{1-z} - \frac{z^n}{1-z}$$

وبما أن $|z| < 1$ فإن $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$ لذلك $S_n = \frac{1}{1-z}$

أما إذا كانت $|z| \geq 1$ فمن الواضح أن $\lim_{n\to\infty} |z^n| \neq 0$ وعليه $\sum z^n$ متباعدة.

<u>مثال٥-١٣</u>: إثبت أن

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{2^n} = 1 - i$$

الحل: لتكن $z = \frac{1-i}{2}$ لذلك يكون $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ لذلك يمكن تمثيله هذه المتسلسلة بمتسلسلة القوى وعليه يكون المجموع

$$\frac{1}{1 - \frac{1-i}{2}} = \frac{2}{2-1+i} = \frac{2}{1+i} = 1 - i$$

<u>مثال٥-١٤</u>: جد تمثيل لمتسلسلة القوى للدالة

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

الحل: بإيجاد المشتقة للدالة $\frac{1}{1-s}$ فإن

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{1-s}\right) = \frac{1}{(1-s)^2}$$

لذلك

$$f(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

$$= \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$$

وهذا يعطينا بأن الدالة f يمكن تمثيلها بمتسلسلة القوى من خلال حساب المشتقة للمتسلسلة الهندسية $\frac{1}{1-s}$.

مثال٥-١٥: جد تمثيلاً هندسياً للدالة $f(z) = Log(1+z)$.

الحل: من المعروف لدينا

$$Log\, z = \int_0^z \frac{1}{1-s} ds$$

وأن $Log(1+z)$ مجال تحليلياً يحتوي على النقطتين $0, z$ لذلك

$$Log(1+z) = \int_0^z \frac{1}{1-s} ds = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s^n\, ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1}$$

وأن مجال التقارب هو $|z| < 1$

وكذلك يمكن إيجاد تمثيل هندسيا للدالة $Log(1+z)$ كالآتي :

لتكن $s(z) = Log(1+z)$ وبما أن $lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1$

لذلك فإن نصف قطر التقارب يكون ١ وباستخدام النظرية ٥-١٤ نجد ان

$$s'(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots = (1+z)^{-1} = \frac{d}{dz} Log(1+z)$$

لذلك على الدائرة التي مركزها ٠ ونصف قطرها ١، أي ان

$$[s(z) - Log(1+z)]' = 0$$

وبما أن $s(0) - Log1 = 0$ لذلك ينتج لدينا

$$Log(1+z) = \sum (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots.$$