كلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الرياضيات

المرحلة: الرابعة

أستاذ المادة : أ.د. عبد الرحمن سلمان جمعة

اسم المادة باللغة العربية : التحليل العقدي

اسم المادة باللغة الإنكليزية : Complex analysis

اسم الحاضرة الثالثة عشر باللغة العربية: متسلسلة تايلور

اسم المحاضرة الثالثة عشر باللغة الإنكليزية : Taylor Series

٥-٦ متسلسلة تايلور:(*Taylor Series*)

في هذا المجال سوف نبرهن نظرية تايلور التي تعطي تمثيلاً (توسيعاً) للدالة التحليلية من خلال متسلسلة القوى غير المنتهية ولكل نقطة من نقاط الدالة التحليلية.

٥-٨ نظرية تايلور: (*Taylor Theorem*)

إذا كانت الدالة تمثيلها بالمتسلسلة $f(z)$ تحليلية داخل الدائرة C التي مركزها a ونصف قطرها R أي أن $|z-a|<R$ فإن f يمكـــــن

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n$$

المتقاربة لكل نقاط z داخل الدائرة C والمتقاربة بانتظام على $|z-a|\le r<R$ وتسمى هذه المتسلسلة بمتسلسلة تايلور للدالة $f(z)$ حول النقطة a.

البرهان: لتكن z تقع داخل الدائرة C ولتكن d المسافة بين a,z أي أن $d=|z-a|$ من الواضح أن $0\le d<R$ ، لتكن t حيث $0\le d<t<R$ ، γ دائرة بالإتجاه الموجب $|b-a|=t$. الآن لكل نقطة s على γ نعرف

$$\omega=\frac{z-s}{s-a}$$

لذلك

$$|\omega|=\frac{|z-s|}{|s-a|}=\frac{d}{t}<1$$

لذلك من المبرهنة ٥-١٥ يكون لدينا

$$\frac{1}{s-z}=\frac{1}{(s-a)-(z-a)}=\frac{1}{s-a}\frac{1}{1-\omega}=\frac{1}{s-a}\sum_{n=0}^{\infty}\omega^n$$

الذي يشبه

$$\frac{f(s)}{s-z}=\sum_{n=0}^{\infty} f(s)\frac{(z-a)^n}{(s-a)^{n+1}}$$

المنتظم في s على γ

وباستخدام صيغة كوشي التكاملية للمشتقة نحصل على

$$f(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(s)}{s-z}ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}}(z-a)^n\,ds$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}}ds\right)(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n$$

وبهذا ينتهي البرهان .

<u>ملاحظـــــة٥-١:</u> تسمى المتسلسلة حول النقطة $a=0$ بمتسلسلة ماكلورين للدالة $f(z)$ وتكتب بالشكل

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}z^n$$

وهي حالة خاصة من متسلسلة تايلور.

<u>نظرية٥-٩:</u> إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n$ متقاربة للدالة $f(z)$ عند كل النقاط الداخلية للدائرة $|z-a|=R$ فانها تكون متسلسلة تايلور الموسعة للدالة f في القوى $z-a$.

البرهان: لتكن $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n$ حيث $|z-a|<R$.

حسب فرضية النظرية دعنا نستخدم الدليل m داخل المجموع أي أن

$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m(z-a)^m$ حيث $|z-a|<R$.

من المعروف لدينا وحسب دراستنا السابقة في هذا الموضوع فإن

$$\int_C g(z)f(z)dz=\sum_{m=0}^{\infty}C_m\int_C g(z)(z-a)^m dz$$

حيث $g(z)$ أي دالة من الدوال

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \qquad (n = 0,1,2,\dots)$$

و C دائرة مركزها النقطة a ونصف قطرها أقل من R .

ومن صيغة كوشي التكاملية نجد أن

$$\int_C g(z)f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{f^n(a)}{n!}$$

إذن

$$\int_C g(z)(z-a)^m dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n-m+1}} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

ومن الواضح أن

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m \int_C g(z)(z-a)^m dz = C_n$$

وهذا ينتج لنا

$$\frac{f^n(z_0)}{n!} = C_n$$

وهذه هي متسلسلة تايلور عند النقطة a .

<u>مثال٥-١٦</u>: جد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(z) = e^z$

الحل: $f(z) = e^z, \qquad f(0) = 1$

$$f'(z) = e^z, \qquad f'(0) = 1$$

$$\vdots$$

$$f^n(z) = e^z, \qquad f^n(0) = 1$$

لذلك يكون لدينا

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

مثال٥-١٧: جد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(z)=Log(1+z)$

الحل: $f(z)=Log(1+z), \qquad f(0)=0$

$$f'(z)=\frac{1}{1+z}, \qquad f'(0)=1$$

$$f''(z)=\frac{-1}{(1+z)^2}, \qquad f''(0)=-1$$

$$\vdots$$

$$f^n(z)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+z)^n} \quad , \qquad f^n(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

لذلك تكون الدالة $Log(1+z)$ بالشكل الآتي

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{(n-1)}\frac{z^n}{n}$$

مثال٥-١٨: جد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(z)=\frac{z^2+2}{z^2-4}$ حول النقطة $a=1$

الحل: نعيد كتابة الدالة بالشكل

$$f(z)=1+\frac{6}{z^2-4}=1+\frac{6}{(z+2)(z-2)}$$

$$\frac{6}{(z+2)(z-2)}=\frac{A}{z+2}+\frac{B}{z-2}$$

نجد قيمة B,A ليكون لدينا

$$\frac{6}{(z+2)(z-2)}=\frac{-3}{2}\left(\frac{1}{z+2}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{z-2}\right)$$

إذن

$$f(z) = 1 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+2}\right)$$

وبما أن $a = 1$ لذلك نفرض أن

$$z - 1 = s$$

$$z = s - 1$$

$$f(z) = 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s-1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s+3}$$

$$= 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-(\frac{-s}{3})}\right)\right)$$

نلاحظ $\frac{1}{s-1}$ مجموع متسلسلة هندسية أساسها s بشرط $|s| < 1$ اذا وفقط اذا كان $|z-1| < 1$ أي أن منطقة التقارب هي الدائرة التي مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها ١.

وكذلك $\frac{1}{1-(\frac{-s}{3})}$ هو مجموع متسلسلة هندسية أساسها $\frac{-s}{3}$ بشرط $\left|\frac{-s}{3}\right| < 1$ اذا وفقط اذا كان $|z-1| <$ 1 أي أن منطقة التقارب هي الدائرة التي مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها ٣. وبهذا تكون متسلسلة تايلور للدالة هي

$$f(z) = z - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z+1}{3}\right)^n$$

وتكون الدالة تحليلية في الدائرة التي مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها ١.

<u>نظرية٥-١٠:</u> ليكن للدالتين g, f تمثيلاً بمتسلسلة القوى حيث

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ داخل المنطقة $|z-a| < R_1$

$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$ داخل المنطقة $|z-a| < R_2$

إذا كان $R = min\{R_1, R_2\}$, α أي ثابت عقدي فإن

$$\alpha f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha c_n (z-a)^n \ , \qquad |z-a| < R_1 \qquad (3)$$

$$f(z)+g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(c_n+b_n)(z-a)^n \quad , \qquad |z-a|<R \quad (4)$$

$$f(z)g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}t_n(z-a)^n \quad , \qquad |z-a|<R \qquad (5)$$

حيث

$$t_n=\sum_{k=0}^{n}c_k b_{n-k}$$

وهذه تسمى ضرب كوشي للمتسلسلتين g,f.

البرهان: برهان (٣) ، (٤) يترك كتمرين للطالب ، والان سوف تبرهن العبارة رقم (٥)

لتكن $h(z)=f(z)g(z)$ لذلك تكون h تحليلية داخل الدائرة $|z-a|<R$ لذلك لكل z تنتمي إلى الدائرة $|z-a|<R$ فإن

$$h'(z)=f(z)g'(z)+f'(z)g(z)$$

$$h''(z)=f''(z)g(z)+2f'(z)g'(z)+f(z)g''(z)$$

وباستخدام الإستقراء الرياضي نجد

$$h^n(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}f^k(z)g^{(n-k)}(z)$$

وهذه تسمى صيغة ليبنتز

ومن المعروف لنا بأن

$$\frac{f^k(a)}{k!}=c_k\,, \qquad \frac{g^{(n-k)}(z_o)}{(n-k)!}=b_{n-k}$$

لذلك نستنتج أن

$$\frac{h^n(a)}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(a)}{k!}\frac{g^{(n-k)}(a)}{(n-k)!}=\sum_{k=0}^{n}c_k b_{n-k}$$

مثال٥-١٩: استخدم ضرب كوشي للمتسلسلات لإثبات أن

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$$

لكل z داخل الدائرة $|z|<1$

الحل: لتكن

$$f(z)=g(z)=\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

نلاحظ أن $c_n=1=b_n$

بواسطة المعادلة (٥) في النظرية ٥-١٠ فإن

$$\frac{1}{(1-z)^2}=h(z)=f(z)g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}c_k b_{n-k}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$$

٥-٧ متسلسلة لورانت: (*Laurent series*)

هنا سنقوم بدراسة التوسيع (كتابة الدوال على شكل متسلسلة) للدوال التحليلية على المجال الحلقي والتي ينتج منها متسلسلة قوى بقوى موجبة وسالبة وهي مهمة جداً ومفيدة بدراستنا اللاحقة.

تعريف٥-٥: لتكن c_n أعداد معقدة لكل $n=0,\mp1,\mp2,\dots$ المتسلسلة غير المنتهية $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$ تسمى متسلسلة لورانت وتعرف كالآتي:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

بشرط المتسلسلة بالطرف الأيمن تكون متقاربة .

نظرية ٥-١١: لتكن $f(z)$ تحليلية في المجال الحلقي $R_1<|z-z_o|<R_2$ فإن $f(z)$ يمكن تمثيلها بمتسلسلة لورانت

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-a)^n}$$

حيث

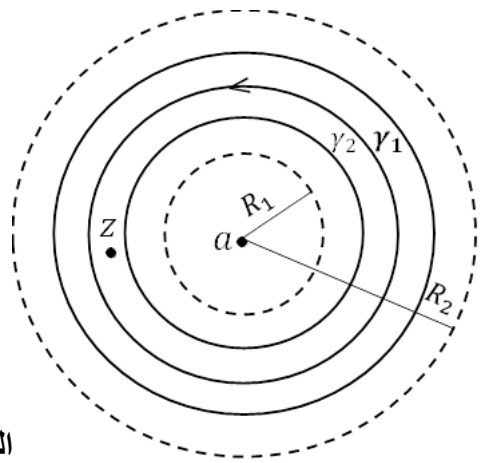
$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta\ ,\ \ n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1}\, d\zeta\ ,\ \ n = 0,1,2,\ldots$$

γ كانتور مغلق بسيط بالإتجاه الموجب حول النقطة a يقع داخل المجال الحلقي أعلاه .

المجموع الثاني لمتسلسلة لورانت يسمى الجزء الأساسي للمتسلسلة.

البرهان: نفرض γ_2, γ_1 كنتوران مغلقان بسيطان وبالإتجاه الموجب ويقعان داخل المجال الحلقي وأن النقطة z تقع خارج γ_2 وداخل γ_1 كما في الشكل (٥-١).



الشكل (٥-١)

وباستخدام صيغة كوشي التكاملية

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\gamma_1} \quad - \int_{\gamma_2} \quad\right]\frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\, d\zeta$$

لكل $\zeta \in \gamma_2$ ، $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < 1$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^n$$

لذلك يكون لدينا

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right)(z-a)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

والآن لكل $\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right|<1$ ، $\zeta\in\gamma_2$

$$\frac{1}{z-\zeta}=\frac{1}{(z-a)-(\zeta-a)}=\frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n$$

لذلك يكون لدينا

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}}d\zeta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}f(\zeta)(\zeta-a)^n\,d\zeta\right)\frac{1}{(z-a)^{n+1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}\,d\zeta\right)\frac{1}{(z-a)^{n}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-a)^n}$$

<u>مثال٥-٢٠</u> : جد متسلسلة لورانت للدالة

$$f(z)=\frac{2}{2-z-z^2}$$

في المجالات التالية : (1) $|z|<1$

$$1 < |z| < 2 \qquad (2)$$

$$|z| > 2 \qquad (3)$$

الحل:

$$f(z) = \frac{3}{(1-z)(2+z)} = \frac{\frac{2}{3}}{1-z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{z}{2}}$$

إذا كانت $|z| < 1$ فإن

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

وإذا كان $|z| > 1$ فإن

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

وإذا كان $|z| < 2$ فإن

$$\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^n}$$

وإذا كان $|z| > 2$ فإن

$$\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{z}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n-1}}{z^n}$$

لذلك يكون لدينا لكل $|z| < 1$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{2^n}\right] z^n$$

والآن لكل $1 < |z| < 2$ نحصل على

$$f(z)=\frac{2}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^n}\right)$$

أما في حالة $|z|>2$ فإننا نحصل على التمثيل الآتي

$$f(z)=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z^n}+\frac{(-1)^{n+1}2^{n-1}}{z^n}\right)$$

<u>مثال٥-٢١</u>: جد متسلسلة لورانت للمتسلسلة

$$\frac{e^{2z}}{(z-1)^3} \quad \text{حول } 1$$

الحل:

$$\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}=\frac{e^{2+2(z-1)}}{(z-1)^3}=\frac{e^2}{(z-1)^3}e^{2(z-1)}$$

$$=\frac{e^2}{(z-1)^3}\left(1+2(z-1)+\frac{[2(z-1)]^2}{2!}+\frac{[2(z-1)]^3}{3!}+\cdots\right)$$

$$=\frac{e^2}{(z-1)^3}+\frac{2e^2}{(z-1)^2}+\frac{2e^2}{(z-1)}+\frac{4e^2}{3}+\frac{2e^2}{3}(z-1)+\cdots$$

<u>مثال٥-٢٢</u>: جد متسلسلة لورانت للدالة $f(z)=\frac{1}{z^2-1}$ في الكرة المثقوبة الذي مركزها $z=i$ بقوى $(z-i)$.

الحل:

$$f(z)=\frac{1}{(z+i)(z-i)}=\frac{1}{z-i}\frac{1}{(z-i)+2i}=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1+\frac{(z-i)}{2i}}$$

$$=\frac{i}{2}\cdot\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{i}{2}\right)(z-i)}$$

$$=\frac{i}{2}\cdot\frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{i}{2}(z-i)\right]^n$$

وتكون متقاربة إذا كان

$$\left|\frac{i(z-i)}{2}\right| < 1$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^{n+1}(z-i)^{n-1}$$

$$= \frac{-\frac{i}{2}}{z-i} - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^{n+2}(z-i)^{n}$$

ومتقاربة إذا كان

$$\left|\frac{i(z-i)}{2}\right| < 1$$

$z \neq i$ أي أن $0 < |z-i| < 2$

٥-٨ النقاط الشاذة والأصفار والأقطاب: (*Poles ,Zeroes and Singular points*)

إعادة تعريف النقطة الشاذة وهي تلك النقطة التي تكون الدالة عندها غير تحليلية وتقسم إلى قسمين النقطة الشاذة المعزولة وغير المعزولة .

تعريف٥-٦: تسمى النقطة الشاذة z_o معزولة إذا وجد $\varepsilon > 0$ بحيث يكون الجوار $0 < |z - z_o| < \varepsilon$ لايحوي على نقاط شاذة أخرى غير z_o أما إذا لم يتحقق هذا فإن z_o نقطة شاذة غير معزولة بمعنى آخر تكون هناك عدد غير منته من النقاط الشاذة للدالة.

ملاحظـــة٥-٢: إذا كانت النقاط الشاذة معدودة منتهية فالنقطة الشاذة تكون معزولة *Isolated*.

مثال٥-٢٣ : الدالة

$$f(z) = \frac{z+1}{z(z^2+4)}$$

لها نقاط شاذة هي $z = 0$, $z = \mp 2i$ وهذه النقاط معزولة.

مثال٥-٢٤: الدالة

$$f(z) = \frac{1}{sin\left(\frac{1}{z}\right)}$$

لها نقاط شاذة غير معزولة ولمعرفة ذلك دعنا نجد هذه النقاط كالآتي

$$sin\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{z} = \pi n$$

وهذا يؤدي إلى أن $z_n = \frac{1}{\pi n} \quad , \quad n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

لهذا فإن $z = 0$ نقطة شاذة غير معزولة وإذا وضعنا $\frac{1}{z}$ بمكان z لحصلنا على $z_n = \pi n$ ومهما أخذنا جوار للغاية ∞ فإنه يوجد هناك نقاط شاذة لذلك لا نستطيع عزل ∞ لذلك تكون نقطة شاذة غير معزولة .

<u>تعريف٥-٧</u>: لتكن للدالة f نقطة شاذة معزولة a مع متسلسلة لورانت

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)$$

لذلك يمكن تصنيف هذه النقطة كالاتي :

أ- إذا كان $c_n = 0$ لكل $n = -1, -2, \ldots$ فإن f لها نقطة شاذة قابلة للإزالة عند a (*Removable*) .

ب- لكل k عدد صحيح موجب بحيث أن $c_{-k} \neq 0$ ، $c_n = 0$ لكل $n = -k-1, -k-2, \ldots$ من الرتبة k عند a فإن f لها قطب لكل عدد. وإذا كان $k = 1$ فإن f لها قطب بسيط (*Simple pole*).

جـ- إذا كان $c_n \neq 0$ عدد صحيح سالب غير منتهٍ n فإن f لها نقطة شاذة أساسية عند a (*Essentially*).

<u>مثال٥-٢٥</u>: لتكن $f(z)$ دالة معرفة كالآتي:

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z + 1}$$

نلاحظ أن $z = -1$ نقطة شاذة.

وإذا كتبنا

$$f(z) = \frac{(z-1)(z+1)}{z+1} = z - 1$$

فعليه تكون النقطة الشاذة $z = -1$ نقطة شاذة قابلة للإزالة .

<u>مثال٥-٢٦</u>: لتكن $f(z)$ دالة معرفة كالآتي:

$$f(z) = \frac{\cos 2z - 1}{z^2}$$

النقطة الشاذة المعزولة $z = 0$ ، متسلسلة لورانت لهذه الدالة تكون كالآتي:

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left(-\frac{4z^2}{2!} + \frac{16z^4}{4!} - \frac{64z^6}{6!} + \cdots\right)$$

$$= -2 + \frac{2z^2}{3} - \frac{64z^4}{6!} + \cdots$$

لذلك تكون النقطة الشاذة $z = 0$ قابلة للإزالة .

<u>مثال ٥-٢٧</u>: لتكن

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$$

متسلسلة لورانت لهذه الدالة هي

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + \cdots$$

لهذا تكون الدالة لها قطب من الرتبة الثانية عند $z = 0$.

<u>مثال ٥-٢٨</u>: لتكن

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$$

النقطة الشاذة $z = 0$ تكون أساسية وذلك لأن متسلسلة لورانت للدالة هي

$$e^{-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{-n}}{n!}$$

وبما أن $c_n \neq 0$ لكل $n = -1, -2, \ldots$ فإن $z = 0$ نقطة شاذة أساسية .

<u>تعريف٥-٨</u>: الدالة التحليلية $f(z)$ يقال لها تملك صفراً من الرتبة k عند النقطة a إذا كان لكل $n = 0,1, \ldots, k-1$ فإن

$$f^n(a) = 0 \text{ و } f^k(a) \neq 0$$

وإذا كان $k = 1$ فإن f لها صفراً بسيطاً.

نظرية٥-١٢: لتكن $f(z)$ دالة تحليلية عند z_o فإنه يوجد لها صفر من الدرجة (الرتبة) k إذا وفقط إذا وجدت دالة $g(z)$ عند z_o بحيث $g(z_o) \neq 0$ وتحقق

$$f(z) = (z - z_o)^k g(z)$$

البرهان : بما أن الدالة $f(z)$ تحليلية عند z_o فإنه يوجد لها متسلسلة تايلور تقترب عند z_o وهذا يعني

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_o)^n$$

وإذا كانت z_o صفر للدالة من الرتبة k فإن

$$f(z_o) = f'(z_o) = \cdots = f^{k-1}(z_o) = 0, \qquad f^k(z_o) \neq 0$$

وبالتالي تصبح المتسلسلة

$$f(z) = c_k (z - z_o)^k + c_{k+1}(z - z_o)^{k+1} + \cdots$$

$$= (z - z_o)^k \sum_{n=0}^{\infty} c_{k+n}(z - z_o)^n$$

فإذا وضعنا $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{k+n}(z - z_o)^n$ فإن

$$f(z) = (z - z_o)^k g(z)$$

الإتجاه الثاني في البرهان (يترك كتمرين للطالب).

نظرية٥-١٣: لتكن $g(z)$ دالة تحليلية عند z_o , $g(z_o) \neq 0$ ولتكن $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_o)^m}$, $m \geq 1$ فإن z_o قطب من الدرجة m للدالة $f(z)$.

(هذه النظرية توضح العلاقة بين الصفر للدالة من الدرجة m والقطب أيضاً من الدرجة m)

البرهان: لتكن $g(z)$ دالة تحليلية لذلك حسب مفكوك تايلور للدالة يكون

$$g(z) = c_. + c_1(z - z_o) + c_2(z - z_o)^2 + \cdots$$

حيث $c_. = g(z_o) \neq 0$

إذن

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_o)^m}$$

$$= \frac{c_.}{(z-z_o)^m} + \frac{c_1}{(z-z_o)^{m-1}} + \cdots + c_m + c_{m+1}(z-z_o) + \cdots$$

مثال٥-٢٩: جد أصفار وأقطاب الدالة $f(z) = \frac{\cot z}{z}$ ثم صنفها.

الحل: بما أن

$$f(z) = \frac{\cos z}{z \sin z}$$

وبفرض أن $\cos z = 0$ يؤدي إلى أن $z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

وبما أن $\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \neq 0$ وهذه تمثل $\cos'\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \neq 0$

لذلك يكون لهذه الدالة صفراً بسيطا عند النقاط $\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\,,\ n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

الآن بالنسبة للأقطاب نضع $z \sin z = 0$ وهذا يتحقق عندما تكون $z = n\pi \ , n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$ و $z = 0$ وبما أن $\cos(n\pi) \neq 0$ الذي يمثل $\sin'(n\pi) \neq 0$ لذلك تكون لهذه الدالة قطباً بسيطاً عند $z = n\pi \ , n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

بالاضافة الى ذلك فان الدالة تحليلية عند الصفر وغايتها لاتساوي صفرا عندما($z \to 0$).

مثال ٥-٣٠: جد أصفار الدالة $f(z) = \sinh\left(\frac{1}{z}\right)$.

الحل: لإيجاد أصفار هذه الدالة تكون

$$\sinh\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$

ومن العلاقة

$$\sin(iz) = i \sinh z$$

لذلك نجد أنه

$$\sin\left(\frac{i}{z}\right) = 0 \implies \frac{i}{z} = n\pi$$

وأن جذور (أصفار) هذه الدالة يكون $z_n = \frac{i}{n\pi}$, $n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

وبما أن المشتقة الأولى غير صفرية عند هذه الأصفار لذلك كلها تكون أصفار بسيطة.

نظرية٥-١٤: لتكن $f(z)$ دالة تحليلية ولها صفر من الرتبة k عند $z = z_0$ فإن $\frac{1}{f(z)}$ لها قطب من الرتبة k عند $z = z_0$ أيضاً.

البرهان: بما أن $f(z)$ لها صفر من الرتبة k عند z_0 فإن

$$f(z) = (z - z_o)^k g(z) \qquad (6)$$

حيث $g(z)$ دالة تحليلية عند z_o , $g(z_o) \neq 0$

لذلك يكون لدينا

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z - z_o)^k} \cdot \frac{1}{g(z)} \qquad (7)$$

من (٦) وبإستخدام ضرب كوشي فإن متسلسلة تايلور تكون

$$\frac{1}{g(z)} = b_0 + b_1(z - z_o) + \cdots$$

وعليه تكون

$$(a_0 + a_1(z - z_o) + \cdots)(b_0 + b_1(z - z_o) + \cdots) = 1$$

وبالتعويض في (٧) تكون

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z - z_o)^k}(b_0 + b_1(z - z_o) + \cdots)$$

حيث $b_0 \neq 0$

لذلك $\frac{1}{f}$ لها قطب من الدرجة k.

نظرية٥-١٥: إذا كان $f(z)$ لها قطب من الدرجة k عند z_o فإن $\frac{1}{f}$ لها نقطة شاذة معزولة عند z_o وإذا عرفنا $\frac{1}{f(z_o)} \neq 0$ فإن $\frac{1}{f}$ لها صفر من الدرجة k عن النقطة z_o.

البرهان: بما ان الدالة $f(z)$ لها قطب من الدرجة k عند z_o فإنه يوجد دالة تحليلية $g(z)$ عند z_o وأن $g(z_o) \neq 0$

حيث

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_o)^k} \qquad (8)$$

ومن العلاقة (٨) يمكن إيجاد مفكوك تايلور للدالة $\frac{1}{g(z)}$ كالآتي

$$\frac{1}{g(z)} = b_0 + b_1(z - z_o) + \cdots$$

لذلك تكون

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z - z_o)^k} \cdot \frac{1}{g(z)}$$

$$= (z - z_o)^k \cdot (b_0 + b_1(z - z_o) + \cdots)$$

وبالتالي يكون z_o صفراً من الرتبة k للدالة $\frac{1}{f}$ بشرط $\frac{1}{f(z_o)} \neq 0$, z_o نقطة شاذة قابلة للإزالة .

<u>نتيجة٥-١</u>: إذا كانت $f(z)$ و $g(z)$ دوال تحليلية مع أصفار من الرتبة n, m على الترتيب عند z_o فإن $\frac{f(z)}{g(z)}$ تكون كالآتي

١- إذا كان $m > n$ فإن $\frac{f(z)}{g(z)}$ لها نقطة شاذة قابلة للإزالة عند z_o وتمثل صفراً من الدرجة $m - n$ للدالة $\frac{f(z)}{g(z)}$.

٢- إذا كان $m < n$ فإن $\frac{f(z)}{g(z)}$ لها قطب من الرتبة $n - m$ عند z_o.

٣- إذا كان $m = n$ فإن $\frac{f(z)}{g(z)}$ لها نقطة شاذة قابلة للإزالة عند z_o .

ونستطيع تعريفها لذلك $\frac{f(z)}{g(z)}$ تحليلية عند z_o بواسطة

$$\lim_{z \to z_o} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_o)}{g(z_o)}$$

مثال ٥-٣١: لتكن الدالة

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\sin z}{z \cos z}$$

ومن المعروف لدينا أن $\sin z = 0$ عندما $z = n\pi$ حيث $n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

وبما أن $f'(n\pi) \neq 0$ فإن صفر الدالة f يكون بسيط وبنفس الطريقة يمكن أن نعرف بأنه $g(z) = z \cos z$ لها أصفار بسيطة عند $z = 0$ وكذلك $z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ حيث $n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$. لذلك من النتيجة السابقة فإن $\frac{f(z)}{g(z)}$ لها السلوك الآتي:

١- لها أصفار بسيطة عند $z = n\pi$, $n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$.

٢- لها أقطار بسيطة عند $z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, $n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

٣- تحليلية عند ٠ وأن $lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{g(z)}$.

٥-٩اسئلة الفصل الخامس

١-جد الغايات الاتية

أ- $lim_{n\to\infty}\frac{n^2+i2^n}{2^n}$ ب- $lim_{n\to\infty}\frac{n^2+in^3}{n^3-1}$

ج- $lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}i\right)^n$ د- $lim_{z\to 0}(\frac{1}{z}-cot\, z)$

٢- لتكن $lim_{n\to\infty} z_n = z_0$. اثبت ان $lim_{n\to\infty}\overline{z_n}=\overline{z_0}$

٣- ادرس تقارب المتسلسلات الاتية ثم جد مجموع المتسلسلة المتقاربة

أ- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4+2z)^n}$ ب- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{cos\, n\theta}{2^n}$

٤- جد نصف قطر التقارب للمتسلسلات الاتية

أ- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ب- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2n!}$ ج- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n+5)z^n}{(2n+1)}$ د- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3(z+i)^n}{(3)^n}$

٥- هل متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ متقاربة عند النقطة $z_1 = 4 - i$ ومتباعدة عند $z_2 = 2 + 3i$؟ ولماذا؟

٦- جد منطقة تقارب المتسلسلات الاتية ثم جد مجموعها

أ- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-1)^{n-1}}{z^n}$ ب- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n (z-1)^n}$

٧- جد تمثيلا لمتسلسلة القوى للدوال الاتية

أ- $f(z) = tan^{-1} z$ ب- $f(z) = cot^{-1} z$

٨- لتكن متسلسلة القوى $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ وليكم نصف قطر التقارب هو R . اثبت ان $\overline{S(\overline{z})}$ هي متسلسلة قوى ولها نصف قطر التقارب R

٩- جد متسلسلة تايلور للدوال

أ- $f(z) = \frac{1}{z-1}$ ، $(|z - i| < \sqrt{2})$

ب- $f(z) = Log\ z$ حول النقطة $z_0 = -1 + i$.

١٠- جد متسلسلة ماكلورين للدوال الاتية

ا- $f(z) = \frac{z}{z^4+9}$ ب- $f(z) = ln(1 + z)$.

١١- هل من الممكن تمثيل الدالة $f(z) = Log\ z$ بمتسلسلة ماكلورين او لورانت حول النقطة $a = 0$؟ وضح اجابتك.

١٢- جد متسلسلة لورانت للدالة $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ في الشكل الحلقي $1 < |z| < 2$.

١٣- جد متسلسلة لورانت للدالة $f(z) = \frac{cos\ iz}{z^n}$ في المناطق الاتية

ا- $0 < |z| < 1$ ب- $|z - i| > 2$

١٤- جد نتسلسلة لورانت للدالة $f(z) = \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ في المناطق الاتية

ا- $|z| < 1$ ب- $|z| > 2$ ج- $1 < |z| < 2$.

١٥- صنف النقاط الشاذة لكل من الدوال الاتية

ا- $f(z) = \frac{sin\ 2z}{z^3}$ ب- $f(z) = \frac{1}{ln\ z}$ ج- $f(z) = \frac{1-cosn(z+i)}{z(z^2+1)^2}$ د- $f(z) = \frac{sin\ z}{z^2+z}$

١٦- لتكن الدالة $f(z)$ تحليلية ولها صفرا من الدرجة m عند النقطة z_0 .اثبت ان

ا- $f'(z)$ لها صفرا من الدرجة m-1 عند النقطة z_0.

ب- $\frac{f'(z)}{f(z)}$ لها قطب بسيط عند z_0.

١٧- اذا كانت النقطة z_0 قطب من الدرجة m و n للدالة f و g على الترتيب.اثبت ان z_0 قطب من الدرجة $m+n$ للدالة $h = f.g$.

١٨- اثبت انه اذا كانت الدالة f لها نقطة شاذة زائلة عند النقطة z_0 فان $\frac{1}{f}$ لها اما نقطة شاذة زائلة او قطب بسيط عند النقطة z_0.
