كلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الرياضيات

المرحلة: الرابعة

أستاذ المادة : أ.د. عبد الرحمن سلمان جمعة

اسم المادة باللغة العربية : التحليل العقدي

اسم المادة باللغة الإنكليزية : Complex analysis

اسم الحاضرة الرابعة عشر باللغة العربية: نظرية الرواسب

اسم المحاضرة الرابعة عشر باللغة الإنكليزية : Residue theory

٦-١مقدمة

في دراستنا السابقة تعلمنا كيف نجد قيمة التكامل من خلال ما تقوله نظرية كوشي-كورسات التي تنص على أن عند كل النقاط الداخلية وعلى كنتور مغلق بسيط C فإن قيمة التكامل للدالة حول هذا الكنتور تكون صفراً والآن يتبادر في أذهاننا هذا السؤال : ماذا لو كانت الدالة غير تحليلية عند مجموعة منتهية من النقاط داخل الكنتور C ؟ وكيف يمكن إيجاد التكامل للدالة ؟

هذا ما سوف تجيبه نظرية الرواسب(البواقي) التي نحن بصدد دراستها في هذا الفصل والتي تعتبر من النظريات المهمة في الرياضيات التطبيقية.

تعريف٦-١(الراسب *Residue*)

لتكن الدالة f لها نقطة شاذة غير زائلة z_o فإن متسلسلة لورانت تكون كالآتي :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_o)^n$$

داخل الشكل الحلقي $0 < |z - z_o| < R$.

فإن المعامل c_{-1} للحد $\frac{1}{z-z_o}$ يسمى الراسب (الباقي) للدالة f عند z_o وبالرموز يكون

$$Res[f, z] = c_{-1}$$

مثال ٦-١: متسلسلة لورانت للدالة $f(z) = e^{\frac{2}{z}}$ تكون بالصيغة الآتية:

$$f(z) = 1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{2!\, z^2} + \frac{2^3}{3!\, z^3} + \cdots$$

لذلك فإن معامل $\frac{1}{z-0}$ والذي يمثل العدد ٢ هو الراسب (الباقي) للدالة أي أن

$$Res[f, 0] = 2$$

في بعض الأحيان نواجه صعوبة في إيجاد المفكوك لدالة ما من أجل حساب الراسب (الباقي) لذلك اقتضى لنا عرض هذه النظرية التي تساعدنا في إيجاد الراسب (الباقي) عند الأقطاب للدالة.

نظرية٦-١: إذا كانت الدالة $f(z)$ لها قطب من الرتبة k عند z_o فإن

$$Res[f,z_o] = \lim_{z\to z_o} \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-z_o)^k f(z)] \qquad (1)$$

البرهان : بما أن الدالة $f(z)$ لها قطب من الرتبة k فإن متسلسلة لورانت حول النقطة z_o تعطى بالصيغة التالية:

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_o)^k} + \cdots + \frac{c_{-2}}{(z-z_o)^2} + \frac{c_{-1}}{(z-z_o)} + c_0 + c_1(z-z_o) + \cdots \qquad (2)$$

نضرب المتسلسلة بـ $(z-z_o)^k$ فإن الصيغة (2) تكون كالآتي :

$$(z-z_o)^k f(z) = c_{-k} + \cdots + c_{-2}(z-z_o)^{k-2} + c_{-1}(z-z_o)^{k-1} + c_0(z-z_o)^k + c_1(z-z_o)^{k+1} + c_2(z-z_o)^{k+2} + \cdots$$

بإجراء الإشتقاق $k-1$ من المرات بالنسبة للمتغير z نحصل على

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-z_o)^k f(z)] = (k-1)!\, c_{-1} + k!\, c_0(z-z_o) + \frac{(k+1)!}{2} c_1(z-z_o)^2 + \cdots$$

وهذا يؤدي إلى

$$\lim_{z\to z_o} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-z_o)^k f(z)] = (k-1)!\, c_{-1}$$

بالقسمة على $(k-1)!$ نحصل على قيمة الراسب للدالة $f(z)$ وكالآتي:

$$Res[f,z_o] = c_{-1} = \lim_{z\to z_o} \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-z_o)^k f(z)]$$

<u>نتيجة ٦-١:</u> إذا كان للدالة للعقدية f قطب بسيط عند z_o فإن

$$Res[f,z_o] = \lim_{z\to z_o} (z-z_o)^k f(z)$$

<u>مثال٦-٢:</u>إحسب الراسب (الباقي) للدالة $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$

الحل : الدالة $f(z)$ لها قطب من الرتبة الثانية أي أن $k = 2$ عند الصفر لذلك فإن الراسب لهذه الدالة يكون

$$Res[f,0] = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(z\frac{\sin z}{z^3}\right) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z^2\cos z - 2z\sin z}{z^4}\right)$$

وباستخدام قاعدة لوبيتال نجد قيمة الغاية وتساوي ٠ لذلك فإن

$$Res[f,0] = 0$$

مثال٦-٣: إحسب الراسب للدالة $f(z) = \frac{e^z}{\sin z}$

الحل: الدالة $f(z)$ لها قطب بسيط عند $z = \pi\ , z = 0$ لذلك فإن الراسب يمكن حسابه بالصورة الآتية:

$$Res[f,0] = \lim_{z\to 0}\left(z\frac{e^z}{\sin z}\right) = e^0\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z} = 1$$

وكذلك

$$Res[f,\pi] = \lim_{z\to\pi}((z-\pi)\frac{e^z}{\sin z}) = e^\pi\lim_{z\to\pi}\frac{z-\pi}{\sin z} = -e^\pi$$

مثال٦-٤: إحسب الراسب للدالة $f(z) = \frac{\cot z}{z^2}$

الحل: بما أن الدالة لها قطب من الرتبة ٣ عند النقطة $z = 0$ لذلك فإن الراسب لهذه الدالة هو

$$Res[f(z),0] = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[z^3\frac{\cot z}{z^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}[z\cot z] = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}[\cot z - z\csc^2 z]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}[-2\csc^2 z + 2z\csc^2 z\cot z]$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{z\cos z - \sin z}{\sin^3 z} = \lim_{z\to 0}\frac{-\sin z}{3\sin^2 z\cos z}$$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}\ \lim_{z\to 0}\frac{1}{\cos z} = -\frac{1}{3}.$$

الآن نعطي النتيجة الآتية التي من خلالها نحسب الراسب للدالة الكسرية بحيث يكون كلا البسط والمقام دالتان تحليليتان عند نقطة والمقام له قطب بسيط عند تلك النقطة .

نتيجة٦-٢: لتكن الدالة $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ فإن $P(z_o) \neq 0$ حيث $Q(z), P(z)$ تحليليتان عند z_o بحيث $Q(z)$ لها قطب بسيط عند z_o بينما

$$Res[f, z_o] = \frac{P(z_o)}{Q'(z_o)}$$

البرهان: الدالة التحليلية $Q(z)$ لها قطب بسيط عند z_o أي أن $Q'(z_o) = 0$ لذلك فإن الراسب لهذه الدالة هو

$$Res[f, z_o] = \lim_{z \to z_o} (z - z_o) \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$$= \lim_{z \to z_o} \frac{P(z)}{\left[\frac{Q(z) - Q(z_o)}{z - z_o}\right]} = \frac{P(z_o)}{Q'(z_o)}$$

مثال ٦-٥: جد الراسب للدالة $f(z) = cotz$

الحل: يمكن إعادة كتابة الدالة $f(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$ لذلك بما أن البسط والمقام دوال تحليلية وأن $\sin z$ لها قطب بسيط عند $z = n\pi$ حيث n عدد صحيح وكذلك

$$\cos n\pi \neq 0$$

لذلك فإن الراسب لكل عدد صحيح n هو

$$Res[f, n\pi] = \frac{\cos n\pi}{\sin' n\pi} = 1$$

نتيجة٦-٣: إذا كانت الدالة $f(z)$ لها قطب بسيط عند z_o وكانت $g(z)$ دالة تحليلية عند z_o فإن

$$Res[fg, z_o] = g(z_o) Res[f, z_o]$$

الآن سنعرض هذه النتيجة المهمة والمفيدة بنفس الوقت.

نتيجة ٦-٤ : لتكن $P(z)$ كثيرة حدود من الدرجة ٢ على الأكثر وإذا كان كل من a, b, c أعداد معقدة مختلفة فإن

$$f(z) = \frac{P(z)}{(z-a)(z-b)(z-c)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} + \frac{C}{z-c}$$

حيث

$$A = Res[f, a] = \frac{P(a)}{(a-b)(a-c)}$$

$$B = Res[f,b] = \frac{P(b)}{(b-a)(b-c)}$$

$$C = Res[f,c] = \frac{P(c)}{(c-a)(c-b)}$$

مثال٦-٦: إستخدم الرواسب لتجزئة الكسور للدالة $f(z)$ حيث

$$f(z) = \frac{2z+6}{z(z-1)(z-2)(z-3)}$$

الحل: نحسب الرواسب للدالة عند النقاط ٠،١،٢،٣ نحصل على

$$Res[f,0] = -1\,, \qquad Res[f,1] = 4\,, \qquad Res[f,2] = -5,\ \ Res[f,3] = 2$$

لذلك فإن

$$\frac{2z+6}{z(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{-1}{z} + \frac{4}{z-1} - \frac{5}{z-2} + \frac{2}{z-3}$$

نتيجة٦-٥: لتكن $P(z)$ كثيرة الحدود من الدرجة ٢ على الأكثر فإن

$$f(z) = \frac{P(z)}{(z-a)^2(z-b)} = \frac{A}{(z-a)^2} + \frac{B}{z-a} + \frac{C}{z-b}$$

حيث

$$A = Res[(z-a)f(z),a]\,, \qquad B = Res[f,a]\,, \qquad C = Res[f,b]$$

النظرية القادمة هي النظرية الأساسية في هذا الفصل والتي من خلالها يمكننا أن نجد قيمة التكامل لدالة لها عدد منته من النقاط الشاذة داخل المنطقة لمسار التكامل والتي تسمى نظرية كوشي للراسب (الباقي).

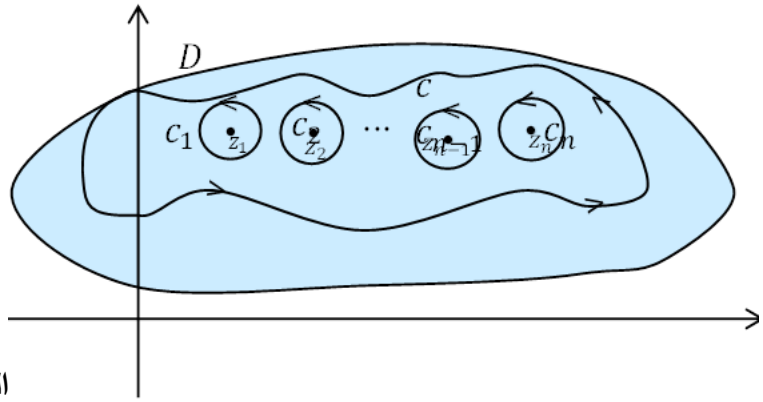
٦-٢ نظرية كوشي للرواسب: (*Cauchy Residue Theorem*)

لتكن D منطقة بسيطة الإتصال وليكن C كنتور مغلق بسيط وبالإتجاه الموجب (عكس اتجاه عقرب الساعة) يقع داخل D.

فإذا كانت الدالة f تحليلية داخل وعلى حدود الكانتور C باستثناء عدد منته من النقاط $z_1, z_2, \dots, z_n$ تقع داخل C فإن

$$\int_c f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[f,z_k] \qquad (3)$$

وكما موضح بالشكل (٦-١).



الشكل (٦-١)

البرهان: لتكن المسارات C_k حيث $k = 1, \dots, n$ دوائر بالإتجاه الموجب مركزها z_k ونصف قطرها r_k على الترتيب وكما في الشكل (٦-١)، لذلك فإن الصيغة الآتية متحققة

$$\int_c f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{c_k} f(z)dz \qquad (4)$$

حيث z_k لها متسلسلة لورانت عند $f(z)$الدالة

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z - z_k)^j$$

لذلك فإن

$$\int_{c_k} f(z)dz = \int_{c_k} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z - z_k)^j \, dz$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \int_{c_k} (z - z_k)^j \, dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i Res[f, z_k]$$

بالتعويض في (٤) نستنتج العلاقة (٣).

<u>مثال٦-٧</u>: جد قيمة التكامل

$$\int_c \frac{z-1}{z(z^2+1)} dz$$

حيث c هو المسار $|z-i|=\frac{1}{2}$ في الإتجاه الموجب.

الحل:

$$\frac{z-1}{z(z^2+1)}=\frac{z-1}{z(z-i)(z+i)}$$

$z=i$ وعليه نجد الراسب للدالة عند $z=i$ تحوي على نقطة شاذة واحدة وهي cنلاحظ أن المنطقة الداخلية للمسار

وكما يلي

$$Res[f,i]=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{z-1}{z(z-i)(z+i)}$$

$$=(-\frac{i-1}{2})$$

لذلك فإن

$$\int_c \frac{z-1}{z(z^2+1)}dz=2\pi i Res[f,i]$$

$$=2\pi i\left(-\frac{i-1}{2}\right)=\pi(i+1)$$

<u>مثال٦-٨</u>: جد قيمة التكامل $\int_c \frac{z}{z^2-1}dz$ حيث c هو المسار $|z|=\frac{3}{2}$ في الإتجاه الموجب. **الحل:**

$$\frac{z}{z^2-1}=\frac{z}{(z-1)(z+1)}$$

لذلك فإن الراسب للدالة عند $z=1, z=-1$ تحوي على نقطتين شاذتين وهي $-1,1$ cنلاحظ أن المنطقة الداخلية للمسار

هو النقطة

$$Res[f,1]=\frac{1}{2}\ ,\ \ Res[f,-1]=\frac{1}{2}$$

وعليه فإن

$$\int_c \frac{z}{z^2-1}\,dz = 2\pi i(Res[f,1] + Res[f,-1])$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 2\pi i$$

٦-٣ التكاملات المثلثية (*Trigonometric Integrals*):

في هذا النوع من التكاملات المثلثية سنرى كيف يتم الإستفادة من نظرية كوشي للرواسب تطبيقها على عدد معـــــين من التكاملات المحددة وبعضها تظهر في الفيزياء والتطبيقات الهندسية حيث من الصعب إيجاد التكاملات مباشرة لذلك نستخدم نظرية كوشي للرواسب.

ولحساب التكاملات من الصيغة

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta\,,\sin\theta)\,d\theta$$

نقوم بتحويل الدالة $F(\cos\theta\,,\sin\theta)$ إلى دالة معقدة بمتغير واحد $f(z)$ فنضع $z = e^{i\theta}$ حيث $0 \le \theta \le 2\pi$ وهذه هندسياً تمثل معادلة دائرة نصف قطرها ١ ومركزها نقطة الأصل وتكافئ $c: |z| = 1$ وكذلك نعلم أن

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

وعليه يكون $z^{-1} = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

وبالتالي نستنتج أن

$$\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}\quad,\qquad \sin\theta = \frac{z-z^{-1}}{2i}$$

أما dz فيمكن حسابها حيث

$$dz = ie^{i\theta}d\theta$$

وهذا يؤدي إلى أن $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$

ثم نعوض هذه العلاقات في التكامل المطلوب حسابه فنحصل على تكامل لدوال معقدة على دائرة الوحدة $c: |z| = 1$ ومن ثم وحسب الطرق السابقة والمعروفة لدينا يتم حساب هذا التكامل.

مثال ٦-٩: إحسب

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta}$$

الحل: حسب العلاقات أعلاه يكون لدينا

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{2-\frac{iz}{2}(z+z^{-1})} = \frac{-2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2-4z+1}$$

والدالة ولتكن

$$f(z) = \frac{1}{z^2-4z+1}$$

لها أقطاب بسيطة عند $z = 2 \mp \sqrt{3}$ ولكن نقط القيمة $z = 2-\sqrt{3}$ تقع داخل دائرة الوحدة والراسب لها هو

$$Res\left[f(z), 2-\sqrt{3}\right] = \lim_{z\to 2-\sqrt{3}} (z-i)\frac{z-\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(z-\left(2-\sqrt{3}\right)\right)\left(z+\left(2-\sqrt{3}\right)\right)}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{3}}$$

لذلك يكون التكامل حسب نظرية كوشي للرواسب كالآتي

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta} = \frac{-2}{i}2\pi i\left(\frac{-1}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

<u>مثال ٦-١٠:</u> احسب التكامل الآتي

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$$

حيث $a \neq \mp 1$

الحل:

$$I=\int_{0}^{\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$$

وبتعويض العلاقات السابقة في التكامل فإننا نحصل على

$$I=\frac{1}{2}\int_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left[1+a^2-a\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]}=\frac{i}{2a}\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z-a)\left(z-\frac{1}{z}\right)}$$

وحسب قيمة a تكون لدينا حالتين

الحالة الأولى : $|a|>1$ وفي هذه الحالة فإن هناك قطب بسيط داخل دائرة الوحدة عند النقطة $z=\frac{1}{a}$ وباستخدام نظرية الرواسب نجد أن

$$I=\frac{i}{2a}2\pi i\,Res[f(z),a]=\frac{\pi}{1-a^2}$$

والنتيجة النهائية يمكن كتابتها كالآتي

$$I=\frac{\pi}{|1-a^2|}\ ,\ \ a\neq\mp1$$

٦-٤ التكاملات المعتلة (*Improper Integrals*):

هنا سنقوم بمعرفة كيفية حساب تكاملات على فترات غير منتهية حيث إذا كانت الدالة $f(z)$ دالة مستمرة على المحور الحقيقي غير السالب $0\leq x\leq\infty$ فإن التكامل المعتل للدالة $f(z)$ على الفترة $[0,\infty)$ يعرف كالآتي:

$$\int_{0}^{\pi}f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}f(x)dx$$

وبشرط وجود الغاية سيكون التكامل أعلاه متقارب وعكسه يكون متباعد وبنفس الطريقة فإن

$$\int_{-\infty}^{0}f(x)dx=\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{0}f(x)dx$$

وإذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة لكل قيم x فإن التكامل المعتل للدالة $f(x)$ على الفترة $(-\infty,\infty)$ يعرف كالآتي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{0} f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} f(x)dx$$

بشرط الغاية لكلا الطرفين موجودة.

أما قيمة كوشي الأساسية التي يرمز لها بالرمز $P.V.$ للتكامل فتعرف كالآتي:

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx$$

بشرط وجودة الغاية .

<u>مثال ٦-١١:</u> إحسب التكامل

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-dx}{x^2+1}$$

الحل:

$$I = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{-dx}{x^2+1} = \lim_{R\to\infty}[cot^{-1}R - cot^{-1}(-R)]$$

$$= 0 - \pi = -\pi$$

<u>ملاحظة٦-١:</u> قيمة كوشي الأساسية من الممكن إيجادها حتى في التكامل الغير متقارب ومثال على ذلك

$$\int_{-R}^{R} xdx = 0 \quad \text{لكل } R$$

وهنا فإن

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty} xdx = 0$$

لكن

$$\int_{0}^{\infty} xdx = \infty$$

وعلى اية حال إذا كان التكامل المعتل موجود فإنه يساوي قيمة كوشي الأساسية $(P.V.)$ وكذلك إذا كانت الدالة $f(x)$ زوجية أي أن $f(-x) = f(x)$ لكل قيم x الحقيقية وقيمة كوشي الأساسية موجودة فإن التكامل موجود وبالتالي يكون

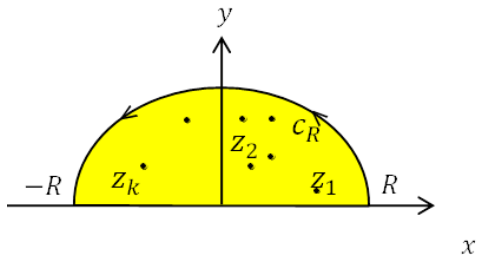
$$\frac{1}{2}P.V.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} f(x)dx.$$

النظرية القادمة ستستخدم نظرية كوشي للرواسب لإيجاد قيمة كوشي الأساسية لتكامل الدالة f على الفترة $(-\infty, \infty)$.

نظرية٦-٢: لتكن $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث $Q\,,P$ كثيرات حدود من الدرجة $n\,,m$ على الترتيب. إذا كانت $Q(x) \neq 0$ لكل قيم x الحقيقية وأن $n \geq m+2$ فإن

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res\left[\frac{P}{Q}, z_j\right]$$

حيث z_j $(j = 1, \dots, k)$ أقطاب للدالة $\frac{P}{Q}$ تقع في نصف المستوي العلوي كما في الشكل (٦-٢).



الشكل (٦-٢)

البرهان: بما أن $\frac{P}{Q}$ لها عدد منته من الأقطاب تقع داخل نصف المستوي العلوي والعدد الحقيقي R يمكن إيجاده حيث أن الأقطاب جميعها تقع في داخل الكنتور c الذي يتألف من $-R \leq x \leq R$ بالإضافة إلى c_R شبه دائرة نصف قطرها R وكما موضحة في الشكل وبالتالي فإن

$$\int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int_{c} \frac{P(z)}{Q(z)}dz - \int_{c_R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz$$

وباستخدام نظرية كوشي للرواسب فإن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res\left[\frac{P}{Q}, z_j\right] - \int_{c_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz$$

والآن إذا استطعنا إثبات أن التكامل

$$\int_{c_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \quad \text{يؤول إلى الصفر}$$

عندما $R \to \infty$ فإننا نحصل على النتيجة المطلوبة.

الآن بما أن $n \geq m + 2$ فإن درجة كثيرة الحدود $Q(z)$ أكبر من درجة $zP(z)$ وبفرض ان

$$P(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

و

$$Q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0$$

فإن

$$P(z) = z^m P_1(z)$$

حيث

$$P_1(z) = a_m + a_{m-1} z^{-1} + \cdots + a_1 z^{-m+1} + a_0 z^{-m}$$

و

$$Q(z) = z^n Q_1(z)$$

حيث

$$Q_1(z) = b_n + b_{n-1} z^{-1} + \cdots + b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n}$$

لذلك يكون لدينا

$$\frac{zP(z)}{Q(z)} = \frac{z^{m+1} P_1(z)}{z^n Q_1(z)}$$

وبما أن $P_1(z) \to a_m$ و $Q_1(z) \to b_n$ عندما $|z| \to \infty$, $m \geq n + 2$ فإن

$$\left|\frac{zP(z)}{Q(z)}\right| \to 0$$

لذلك لكل $\varepsilon > 0$ من الممكن أن نختار R أكبر بكفاية لـ $\left|\frac{zP(z)}{Q(z)}\right| < \frac{\varepsilon}{\pi}$ متى ما z تقع على c_R وبالتالي نحصل على

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| < \frac{\varepsilon}{\pi|z|} = \frac{\varepsilon}{\pi R}$$

حيث z تقع على c_R وباستخدام المتراجحة ML نحصل على

$$\left|\int_{c_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz\right| \leq \int_{c_R} \frac{\varepsilon}{\pi R} |dz| = \frac{\varepsilon}{\pi R} \pi R = \varepsilon$$

وبما أن $\varepsilon > 0$ إختياري فإن $lim_{R\to\infty} \int_{c_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0$

وأخيرا نستنتج أن

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res\left[\frac{P}{Q}, z_j\right]$$

<u>مثال٦-١٢:</u> جد

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\ sinx}{(x^2+2)^3} dz$$

الحل: نلاحظ ان شروط النظرية (٦-٢) متحققة لذلك فإن قيمة كوشي الأساسية للتكامل $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\ e^{xi}}{(x^2+2)^3} dz$ موجودة وهي

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\ e^{xi}}{(x^2+2)^3} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res[g, z_j]$$

حيث $z_1, \dots, z_k$ أقطاب للدالة

$$g(z) = \frac{z\ e^{zi}}{(z^2+2)^3}$$

الواقعة في النصف العلوي من المستوي.

وبعد حساب الراسب للدالة $g(z)$ والذي يكون كالآتي:

$$Res[g, 2i] = \frac{0.046}{e^2}$$

ومن هذا ينتج

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,sinx}{(x^2+1)^2}dx = Im\left[2\pi i\frac{0.046}{e^2}\right] = \frac{0.092\pi}{e^2}$$

مثال٦-١٣: جد

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+p^4} \quad \text{بحيث} \quad p>0$$

الحل: شروط النظرية (٦-٢) متحققة والنقاط الشاذة عند بسيطة لذلك فإن $z_1 = pe^{\frac{\pi i}{4}}$ $z_2 =$ $pe^{\frac{3\pi i}{4}}$, في نصف المستوي العلوي هي أقطاب

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+p^4} = 2\pi i\left(Res\left[\frac{1}{x^4+p^4},z_1\right]+Res\left[\frac{1}{x^4+p^4},z_2\right]\right)$$

$$= \frac{2\pi i}{2p^3}\left(-e^{\frac{\pi i}{4}}+e^{\frac{-\pi i}{4}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}p^3}$$

٥- التكامل على الكنتور المسنن: (*Indented Contour Integral*)

هنا سندرس نوع آخر من التكامل المعتل بفرض أن الدالة المتكاملة غير معرفة عند نقطة تقع في فترة التكامل فإذا كانت الدالة f مستمرة على الفترة $b < x \le c$ فإن التكامل المعتل للدالة f على الفترة $(b,c]$ يعرف كالآتي:

$$\int_b^c f(x)dx = \lim_{r\to b^+}\int_r^c f(x)dx$$

بشرط وجود الغاية.

وبنفس الحالة إذا كانت الدالة f مستمرة على الفترة $a \le x < b$ فإن التكامل المعتل للدالة f على الفترة $[a,b)$ يكون:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{R\to b^-}\int_a^R f(x)dx$$

بشرط وجود الغاية.

أما الآن إذا كانت الدالة مستمرة على كل نقاط x التي تقع في الفترة $[a,c]$ ما عدا $x=b$ حيث $a<b<c$ فإن قيمة كوشي الأساسية للدالة f ($Principle\ Value$) على الفترة $[a,c]$ تعرف كالآتي

$$P.V.\int_a^c f(x)dx = \lim_{r\to 0}\left[\int_a^{b-r} f(x)dx + \int_{b+r}^{c} f(x)dx\right]$$

بشرط وجود الغاية.

مثال٦-١٤:

$$P.V.\int_1^9 \frac{1}{x-3}dx = \lim_{r\to 0^+}\left[\int_1^{3-r} \frac{1}{x-3}dx + \int_{3+r}^{9} \frac{1}{x-3}dx\right]$$

$$= \lim_{r\to 0^+}[\ln r - \ln 2 + \ln 6 - \ln r] = \ln 3$$

في هذا البند سنقوم بتوسيع النتائج التي حصلنا عليها سابقا لتشمل الحالة التي تكون فيها للدالة المكاملة أقطاب بسيطة على محور x لذلك سنعرض كيفية إيجاد قيمة كوشي الأساسية لتكامل الدالة f على الفترة $(-\infty,\infty)$.

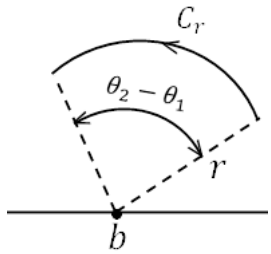
ولنبدأ بالمأخوذة الآتية.

مأخوذة٦-١: لتكن $f(z)$ لها قطب بسيط عند النقطة b على محور x إذا كان C_r كنتور معرف بالمعادلة الوسيطية

$$C_r: b + re^{i\theta}$$

حيث $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ كما في الشكل (٦-٣) فإن

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{C_r} f(z)dz = i(\theta_2-\theta_1)Res[f(z),b]$$



الشكل (٦-٣)

البرهان : متسلسلة لورانت للدالة f عند النقطة b هي

$$f(z) = \frac{Res[f,b]}{z-b} + g(z) \qquad (5)$$

حيث $g(z)$ دالة تحليلية عند b

نجري التكامل على العلاقة (٥) للطرفين وباستخدام المعادلة الوسيطية C_r فيكون

$$\int_{C_r} f(z)dz = Res[f,b]\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta + ir\int_{\theta_1}^{\theta_2} g\left(b+re^{i\theta}\right)e^{i\theta}d\theta$$

$$= i(\theta_2-\theta_1)Res[f,b] + ir\int_{\theta_1}^{\theta_2} g\left(b+re^{i\theta}\right)e^{i\theta}d\theta$$

بما أن $g(z)$ تحليلية عند النقطة b فإنه يوجد $M > 0$ بحيث أن $\left|g\left(b+re^{i\theta}\right)\right| \le M$ في جوار ما للنقطة b ومنه نستنتج

$$\lim_{r\to 0^+} ir\int_{\theta_1}^{\theta_2} g\left(b+re^{i\theta}\right)e^{i\theta}d\theta \le \lim_{r\to 0^+} r\int_{\theta_1}^{\theta_2} Md\theta$$

$$= \lim_{r\to 0^+} r(\theta_2-\theta_1)M = 0.$$

<u>نظرية٦-٣</u>: لتكن $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ دالة نسبية بحيث أنه لا يوجد صفر مشترك بينهما و $Q(z)$ لها أصفار بسيطة عند النقاط $b_1, \dots, b_\ell$ على خط الأعداد الحقيقية و $m \ge n+2$ حيث m درجة كثيرة الحدود $n\,, Q(z)$ درجة كثيرة الحدود $P(z)$ فإن

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i\sum_{j=1}^{k} Res\left[f,z_j\right] + \pi i\sum_{k=1}^{l} Res\left[f,b_k\right]$$

حيث z_j أقطاب للدالة $f(z)$ تقع داخل نصف المستوي العلوي.

<u>نظرية٦-٤</u>: لتكن الدالة النسبية $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ حيث لا يوجد صفر مشترك بين $Q(z)$ و $P(z)$ وأن $Q(z)$ لها أصفار بسيطة على خط الأعداد الحقيقية عند النقاط $b_1, \dots, b_\ell$ وأن $m \ge n+2$ حيث m درجة كثيرة الحدود $n\,, Q(z)$ درجة كثيرة الحدود $P(z)$ فإن لكل $a > 0$

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos x\,dx$$

$$=-2\pi\sum_{j=1}^{k}Im(\,Res\left[e^{iaz}f,z_j\right])-\pi\sum_{k=1}^{l}Im(\,Res\left[e^{iaz}f,b_k\right])$$

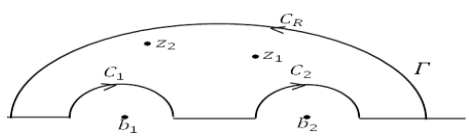
و

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin x\,dx$$

$$=2\pi\sum_{j=1}^{k}Re\,(Res\left[e^{iaz}f,z_j\right])+\pi\sum_{k=1}^{l}Re\,(Res\left[e^{iaz}f,b_k\right])$$

حيث z_j أقطاب للدالة $f(z)$ تقع داخل نصف المستوي العلوي كما في الشكل (٦-٤).

برهان نظرية (٦-٣) ، (٦-٤).



الشكل (٦-٤)

لتكن R كبيره بما فيها الكفاية لكي تقع الأقطاب للدالة f داخل شبه الدائرة $C_R: z=R\,e^{i\theta}$ حيث $0\le\theta\le\pi$ ولتكن r أصغر ما يمكن لشبه الدائرة $C_k: b_k+re^{i\theta}$ حيث $0\le\theta\le\pi$ وأن $k=1,\dots,\ell$ لكي تكون الدائرة منفصلة والأقطاب تقع داخلهم وليكن Γ كنتور مغلق وبالإتجاه الموجب مكون من $-$ حيث $k=1,\dots,\ell$ $C_k\,,C_R$ والخط الواصل بين شبه الدوائر الصغيرة هو

$$I_R=[-R,R]\setminus\bigcup_{k=1}^{\ell}(b_{k-r},b_{k+r})$$

لذلك من نظرية كوشي للرواسب نحصل على

$$2\pi i\sum Res[f,z_j]=\int_{\Gamma}f(z)dz$$

$$= \int_{C_R} f(z)dz + \int_{I_R} f(z)dz - \sum_{k=1}^{\ell} \int_{C_R} f(z)dz$$

الآن لندع $R \to \infty$ و $r \to 0^+$ إذا كانت $f(z)$ تحقق شروط النظرية ٦-٢ والمأخوذة ٦-١ فإن

$$2\pi i \sum Res[f, z_j] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - \pi i \sum_{k=1}^{\ell} Res[f, b_k]$$

لكن الدالة $f(z)$ مضروبة بواسطة e^{iaz} حيث $a > 0$ أي أن

$$2\pi i \sum Res[e^{iaz} f, z_j] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)dx - \pi i \sum_{k=1}^{\ell} Res[e^{iaz} f, b_k]$$

بمساواة الأجزاء الحقيقية والخيالية للعلاقة الأخيرة نحصل على المطلوب.

مثال٦-١٥: جد قيمة كوشي الأساسية للتكامل

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 - 1} dx$$

الحل: الدالة $f(z) = \frac{1}{z^4-1}$ لها أقطاب بسيطة عند $z_3 = i,\ z_2 = -1,\ z_1 = 1$
$z_4 = -i$, وبما أن z_4 يقع في نصف المستوي السفلي فإنه من النظرية (٦-٣) ينتج

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^3 - 8} dx = 2\pi i Res[f, z_3] + \pi i (Res[f, z_1] + Res[f,\ z_2])$$

$$= 2\pi i \frac{-1}{4i} + \pi i (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{-2}$$

مثال٦-١٦: لتكن $f(z) = \frac{z}{z^2-b^2}$ ، $b > 0$ فإن الدالة $f(x) = \frac{x}{x^2-b^2}$ لها أقطاب بسيطة عند b , $-b$
لكل $a > 0$

$$Res\left[\frac{ze^{iaz}}{z^2 - b^2}, b\right] = \frac{e^{iaz}}{2}$$

$$Res\left[\frac{ze^{iaz}}{z^2-b^2},-b\right]=\frac{e^{-iaz}}{2}$$

لذلك من النظرية (٦-٤) ينتج لنا

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos ax}{x^2-b^2}dx=-\pi Im\left(\frac{e^{iab}}{z}+\frac{e^{-iab}}{z}\right)=-\pi Im(\cos ab)=0$$

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin ax}{x^2-b^2}dx=\pi Re\left(\frac{e^{iab}}{z}+\frac{e^{-iab}}{z}\right)=\pi(\cos ab).$$