المرحلة الثانية

اقتصاد

رياض احمد الدليمي

٤٨

الاحصاء

المحاضرة (١)

الفصل الرابع
الانحدار الخطي المتعدد
Multiple Linear Regression

1-4: الانحدار الخطي المتعدد

Multiple Linear Regression

تناولنا في الانحدار الخطي البسيط العلاقة بين المتغير التابع (Y_i) ومتغير مستقل واحد هو (X_i). ولكن في الواقع هناك العديد من الدراسات التي تتطلب وضع المتغير التابع (Y_i) دالة لأكثر من متغير مستقل، فمثلاً الطلب على سلعة معينة يعتبر دالة للسعر والدخل ويمكن إضافة متغيرات أخرى مثل أسعار السلع البديلة وأسعار السلع المكملة ... الخ .

وكذلك الحال بالنسبة لتحليل دالة الإنتاج التي تعتبر الإنتاج (Q) دالة للعمل (L) ورأس المال (K). مثل هذه الدراسات يمكن تحليلها بواسطة الانحدار الخطي المتعدد الذي يعتبر امتداد لنموذج الانحدار الخطي البسيط.

ويوضح الانحدار الخطي المتعدد العلاقة الخطية بين المتغير التابع (Y_i) وعدة متغيرات مستقلة $(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ وصيغته العامة هي:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 \ldots\ldots B_n X_n + U_i \ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث إن :

(Y_i) : المتغير التابع.

$(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$: متغيرات مستقلة.

B_0 : معلمة الحد الثابت.

B_1 : معامل الانحدار الجزئي لـ(Y_i) على (X_i) بافتراض ثبات بقية المتغيرات المستقلة وتمثل مقدار التغير في (Y_i) عند زيادة (X_i) بمقدار وحدة واحدة بافتراض ثبات بقية المتغيرات المستقلة.

(U_i) : قيمة الخطأ العشوائي.

إن المعادلة (1) تدعى متعدد لأنها تحتوي على أكثر من متغير مستقل وإنها خطية لان كل معلمة وكل متغير مستقل هما من الدرجة الأولى أي إن لهما أساً يساوي الواحد الصحيح، ويمكن إعادة كتابة المعادلة (1) بصيغة المصفوفات وكما يلي:

$$Y = X\beta + e$$

حيث إن:

Y : متجه عمودي لقيم المتغير التابع (Y_i) ومن الدرجة $(n \times 1)$.

صنجح بي الحالك

نقوة

X : مصفوفة المتغيرات المستقلة ومن الدرجة $n \times (k+1)$.

β : متجه عمودي لمعالم النموذج ومن الدرجة $(k+1) \times 1$.

ϵ : متجه الخطأ العشوائي ومن الدرجة $(n \times 1)$.

2-4 : طرق احتساب معالم الانحدار المتعدد

Methods of Calculating the Parameters of Multiple Regression

هنالك عدة طرق لاحتساب معالم الانحدار المتعدد منها:

1-2-4 : طريقة المصفوفات : *Matrices Method*

بغية تقدير معادلة الانحدار المتعدد لا بد من التوسع في طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية لنموذج الانحدار المتعدد وسنفترض إن نموذج الانحدار يحتوي على متغيرين مستقلين وعينة من ثلاث مشاهدات فقط .ويمكن احتساب قيمة معاملات الانحدار المتعدد (B_1, B_2) وفق الخطوات التالية:

1- نجد المصفوفة $X'X$ حيث إن:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} \\ 1 & X_{21} & X_{22} \\ 1 & X_{31} & X_{31} \end{bmatrix} \qquad X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X_{11} & X_{21} & X_{31} \\ X_{12} & X_{22} & X_{32} \end{bmatrix}$$

ومنها يمكن القول :

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \sum X_1 & \sum X_2 \\ \sum X_1 & \sum X_1^2 & \sum X_1 X_2 \\ \sum X_2 & \sum X_1 X_2 & \sum X_2^2 \end{bmatrix}$$

2- نجد المصفوفة $(X'X)^{-1}$ حيث إن:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{|X'X|} adj(X'X)$$

$|X'X|$:هو محدد المصفوفة الثلاثية والذي يمكن احتسابه باستخدام طريقة الأسهم

$adj(X'X)$: المرافقة الثنائية للمصفوفة $X'X$.

2- إيجاد المتجه $X'Y$ حيث إن:

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum X_1 Y \\ \sum X_2 Y \end{bmatrix}$$

4- إيجاد مصفوفة معاملات الانحدار b حيث إن:

$$b = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

مثال 4 - 1 :

توفرت لديك المعلومات التالية :

Y_i	X_1	X_2
10	7	3
2	4	6
3	1	7
15	12	16

المطلوب: إيجاد قيم معاملات الانحدار والمعادلة التقديرية للنموذج ؟

الحل : أ- نقوم بعمل الحسابات اللازمة :

Y	X_1	X_2	X_1X_2	X_1^2	X_2^2	X_1Y	X_2Y
10	7	3	21	49	9	70	30
2	4	6	24	16	36	8	12
3	1	7	7	1	49	3	21
15	12	16	52	66	94	81	63

ب - إيجاد قيمة : $X'X$

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \sum X_1 & \sum X_2 \\ \sum X_1 & \sum X_1^2 & \sum X_1 X_2 \\ \sum X_2 & \sum X_1 X_2 & \sum X_2^2 \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 16 \\ 12 & 66 & 52 \\ 16 & 52 & 94 \end{bmatrix}$$

ج- إيجاد معكوس $X'X$

أولاً: نجد المحدد بطريقة الأسهم وكما يلي :

$$X'X = \left|\begin{matrix} 3 & 12 & 16 \\ 12 & 66 & 52 \\ 16 & 52 & 94 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 12 \\ 12 & 66 \\ 16 & 52 \end{matrix}$$

$$X'X = 3(66)(94)+12(52)(16)+16(12)(52)- \{16(66)(16)+3(52)(52)+12(12)(94)\} = 36$$

ثانياً: نجد المرافقة الثنائية $Adj\ (X'X)$ وكما يلي :

٤

$$C = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 66 & 52 \\ 52 & 94 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 12 & 52 \\ 16 & 94 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 12 & 66 \\ 16 & 52 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 12 & 16 \\ 52 & 94 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 16 & 94 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 16 & 52 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 12 & 16 \\ 66 & 52 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 12 & 52 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 12 & 66 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$adj(X'X) = \begin{bmatrix} 3500 & -296 & -432 \\ -296 & 26 & 36 \\ -432 & 36 & 54 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{|36|}\begin{bmatrix} 3500 & -296 & -432 \\ -296 & 26 & 36 \\ -432 & 36 & 54 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum X_1 Y \\ \sum X_2 Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 81 \\ 63 \end{bmatrix}$$

$$b = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

$$adj(X'X) = \frac{1}{|36|}\begin{bmatrix} 3500 & -296 & -432 \\ -296 & 26 & 36 \\ -432 & 36 & 54 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 \\ 81 \\ 63 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.33 \\ -1.83 \\ -4.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

إذن المعادلة التقديرية هي:

$$\hat{Y}_i = 36.33 - 1.83X_{1i} - 4.5X_{2i}$$

4-2-2: احتساب معاملات الانحدار باستخدام المصفوفة بالانحراف

Regression Coefficients Calculated by using Deviation Matrix

يمكن اعتماد أسلوب المصفوفة بالانحراف لاحتساب معاملات الإنحدار المتعدد $\hat{a}, \hat{b}_1, \hat{b}_2$ وسنفترض نموذج يحتوي على متغيرين مستقلين (X_1, X_2):

$$Y_i = b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i} + e_i$$

$$\bar{Y} = b_0 + b_1 \bar{X}_1 + b_2 \bar{X}_2$$

بالطرح ينتج:

$$Y_i - \bar{Y} = b_1(X_{1i} - \bar{X}_1) + b_2(X_{2i} - \bar{X}_2) + e_i$$

ويمكن كتابتها بصيغة الانحرافات كما يلي:

$$y_i = b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + e_i$$

وبعد إجراء عدة عمليات رياضية نتوصل إلى مجموعة من المصفوفات بالصيغ الانحرافية وكما يلي:

$$X'X = \begin{bmatrix} \sum x_1^{\ 2} & \sum x_1 x_2 \\ \sum x_1 x_2 & \sum x_2^{\ 2} \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum x_1 y \\ \sum x_2 y \end{bmatrix} \qquad bj = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

وبتطبيق نفس الصيغة العامة المعتمدة في أسلوب الانحدار الخطي البسيط في إيجاد قيم المعلمات المقدرة وهي:

$$b = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

$$b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X}_1 - b_2 \bar{X}_2$$

مثال 4 - 2:

توفرت لدى باحث البيانات التالية وبصيغ انحرافية :

$\sum x_1 x_2 = 8 \qquad \bar{Y} = 11 \qquad n = 23 \qquad \bar{X}_2 = 5$

$\sum x_2^{\ 2} = 12 \qquad \sum x_1 y = 10 \qquad \bar{X}_1 = 10$

$\sum x_1^{\ 2} = 12 \qquad \sum x_2 y = 8 \qquad \sum x_1^{\ 2} = 12$

المطلوب: إيجاد المعادلة التقديرية ؟

الحل :

أولاً- نجد قيمة المصفوفة $X'X$:

$$= \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$$

ثانياً - إيجاد معكوس المصفوفة $X'X$ اي المصفوفة $(X'X)^{-1}$:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{|X'X|}.adj(X'X)$$

$$.adj(X'X) = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{|80|}\begin{bmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}$$

ثالثاً- نجد قيمة المصفوفة $X'Y$:

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum x_1 y \\ \sum x_2 y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

رابعاً- الآن نجد قيمة المتجه b الخاص بالمعلمات المقدرة b_1, b_2 :

$$b = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

$$b = \frac{1}{|80|}\begin{bmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{80}\begin{bmatrix} 56 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

أما معلمة حد التقاطع $\hat{b}_0$ أو $\hat{a}$ فنجدها وفق الصيغة التالية :

$$b_0 = \overline{Y} - \hat{b}_1 \overline{X}_1 - \hat{b}_2 \overline{X}_2$$

$$b_0 = 11 - 0.7(10) - 0.2(5) = 3$$

إذن المعادلة التقديرية هي:

$$\hat{Y}_i = 3 + 0.7 X_{1i} + 0.2 X_{2i}$$

4-3: العلاقة بين المجاميع الحقيقية والمجاميع الإنحرافية

The Relationship between the Real Groups and the Deviation Groups

يمكن الاستفادة من بعض القوانين في تحويل المجاميع الحقيقية إلى مجاميع إنحرافية وكما يلي:

$$\sum y_i^2 = \sum Y_i^2 - \frac{\left(\sum Y_i\right)^2}{n}$$

$$\sum x_i y_i = \sum X_i Y_i - \frac{\left(\sum X_i\right)\left(\sum Y_i\right)}{n}$$

$$\sum x_i x_2 = \sum X_1 X_2 - \frac{\left(\sum X_1\right)\left(\sum X_2\right)}{n}$$

4 -4 معامل تحديد الارتباط المعدل

Adjusted R Square

عند دراسة الانحدار البسيط تم توضيح أهمية معامل التحديد R^2 ولكن في حالة الانحدار المتعدد يمكن إيجاد قيمة معامل تحديد الارتباط R^2 باستخدام الصيغة التالية:

$$R^2 = \frac{\hat{b}X'Y}{Y'Y} = \frac{\hat{b}_1 \sum x_1 y_1 + \hat{b}_2 \sum x_2 y_2 + \dots\dots\dots + b^n \sum x_n y_n}{\sum y_i^2}$$

ويلاحظ من الصيغة أعلاه أن قيمة معامل التحديد R^2 تزداد بشكل طبيعي كلما أضيف متغيرا مستقلاً جديداً إذ أن قيمة R^2 عند دراسة علاقة المتغير بمتغيرين ستكون أكبر منها عند استبعاد أحدهما، وهذا لا يساعد على معرفة ما إذا كان هذا المتغير الإضافي قد أفاد في التحليل أم لا، وذلك لان قيمة البسط في الصيغة أعلاه تزداد بمقدار $\hat{b}\sum x_i y_i$ كلما أضيف متغير مستقل جديد الى النموذج مع بقاء المقام $\sum y_i^2$ ثابتاً، لذلك يتم اللجوء في نماذج الانحدار المتعدد الى معامل التحديد المصحح أو

المعدل *Adjusted R Square*، والذي يرمز له بـ $\overline{R^2}$ حيث يأخذ في الاعتبار عدد المتغيرات المستقلة الداخلة في النموذج، ، أي انه في نموذج الانحدار البسيط تكون:

$$R^2 = \overline{R^2}$$

أما في نموذج الانحدار المتعدد فتكون:

$$\overline{R^2} = 1 - \frac{n-1}{n-k}\left(1 - R^2\right)$$

مثال 4 - 3:

افرض بأن لدينا معادلة انحدار خطي بسيط لعينة من 20 مشاهدة لمتغيرين (متغير مستقل ومتغير تابع) وأن معامل التحديد R^2 لها كان 0.85 برهن $R^2 = \overline{R^2}$.

الحل :

$$\overline{R^2} = 1 - \frac{n-1}{n-k}\left(1 - R^2\right)$$

$$\overline{R^2} = 1 - \frac{20-1}{20-1}\left(1 - 0.85\right)$$

$$\overline{R^2} = 0.85$$

وهذا يدل على أن $R^2 = \overline{R^2}$ في معادلة الانحدار الخطي البسيط.

مثال 4 – 4

افرض بأن لدينا معادلة انحدار خطي متعدد لعينة من 20 مشاهدة لثلاث متغيرات (متغيرين مستقلين ومتغير تابع) وأن معامل التحديد R^2 لها كان 0.85 أوجد قيمة معامل التحديد المعدل $\overline{R^2}$.

الحل :

$$\overline{R^2} = 1 - \frac{n-1}{n-k}\left(1 - R^2\right)$$

$$\overline{R^2} = 1 - \frac{20-1}{20-2}(1-0.85)$$

$$\overline{R^2} = 0.841$$

وهذا ما يبرهن أن معامل التحديد المعدل أقل من معامل التحديد في حالة الانحدار الخطي المتعدد.

مثال 4 – 5:

توفرت لدى باحث المعلومات التالية وبالصيغ الحقيقية:

$$\sum Y_i^2 = 34124 \qquad n = 10 \qquad \sum X_1 Y_i = 11216$$

$$\sum X_1^2 = 3816 \qquad \sum Y_i = 570 \qquad \sum X_2^2 = 1944$$

$$\sum X_1 = 180 \qquad \sum X_2 Y_i = 7740 \qquad \sum X_2 = 120$$

$$\sum X_1 X_2 = 2684$$

المطلوب :تقدير معالم الانحدار المتعدد للنموذج أعلاه.

الحل:

أولاً- نجد المجاميع الانحرافية من المجاميع الحقيقية وكما يلي:

$$\sum x_1^2 = \sum X_1^2 - \frac{\left(\sum X_1\right)^2}{n} = 3816 - \frac{(180)^2}{10} = 576$$

$$\sum y_i^2 = \sum Y_i^2 - \frac{\left(\sum Y_i\right)^2}{n} = 34124 - \frac{(570)^2}{10} = 1634$$

$$\sum x_2^2 = \sum X_2^2 - \frac{\left(\sum X_2\right)^2}{n} = 1944 - \frac{(120)^2}{10} = 504$$

$$\sum x_1 x_2 = \sum X_1 X_2 - \frac{(\sum X_1)(\sum X_2)}{n} = 2684 - \frac{(180)(120)}{10} = 524$$

$$\sum x_1 y_i = \sum X_1 Y_i - \frac{(\sum X_1)(\sum Y_i)}{n} = 11216 - \frac{(180)(570)}{10} = 956$$

$$\sum x_2 y_i = \sum X_2 Y_i - \frac{(\sum X_2)(\sum Y_i)}{n} = 7740 - \frac{(120)(570)}{10} = 900$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{570}{10} = 57$$

$$\overline{X}_1 = \frac{\sum X_1}{n} = \frac{180}{10} = 18$$

$$\overline{X}_2 = \frac{\sum X_2}{n} = \frac{120}{10} = 12$$

ثانيا" - نجد المصفوفة $X'X$:

$$X'X = \begin{bmatrix} \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 \\ \sum x_1 x_2 & \sum x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 576 & 524 \\ 524 & 504 \end{bmatrix}$$

ثالثا" - إيجاد معكوس المصفوفة $X'X$ أي المصفوفة $(X'X)^{-1}$:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{|X'X|} . adj(X'X)$$

$$|X'X| = [(576)(504) - (524)(524)] = |15728|$$

$$.adj(X'X) = \begin{bmatrix} 504 & -524 \\ -524 & 576 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{|15728|}\begin{bmatrix} 504 & -524 \\ -524 & 576 \end{bmatrix}$$

رابعاً: نجد المصفوفة $X'Y$:

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum x_1 y \\ \sum x_2 y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 956 \\ 900 \end{bmatrix}$$

خامساً- الآن نجد قيمة المتجه b الخاص بالمعلمات المقدرة b_1, b_2 :

$$b = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

$$b = \frac{1}{15728}\begin{bmatrix} 504 & -524 \\ -524 & 576 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 956 \\ 900 \end{bmatrix} = \frac{1}{15728}\begin{bmatrix} 10224 \\ 17456 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.65 \\ 1.11 \end{bmatrix}$$

أما معلمة حد التقاطع â فنجدها وفق الصيغة التالية :

$$b_0 = \overline{Y} - b_1\overline{X}_1 - b_2\overline{X}_2$$

$$b_0 = 57 - 0.65(18) - 1.11(12) = 31.98$$

إذن المعادلة التقديرية هي :

$$\widehat{Y}_i = 31.98 + 0.65X_{1i} + 1.11X_{2i}$$

4-4 :تباين خطأ العينة Se^2 Variation for Sample error

ابتداءاً قد يكون من المناسب التعريف ببعض المصفوفات وعلى النحو التالي:

$$Y'Y = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \sum Y_i^2$$

$$e'e = \begin{bmatrix} e & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \sum e_i^2$$

$$b'X'Y = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum x_1 y \\ \sum x_2 y \end{bmatrix} = b_1 \sum x_1 y + b_2 \sum x_2 y$$

حيث إن:

$$e'e = Y'Y - b'X'Y = \sum y^2 - \left[b_1 \sum x_1 y + b_2 \sum x_2 y\right]$$

و عليه يأخذ تباين خطأ العينة Se^2 الصيغة التالية:

$$Se^2 = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{\sum e_i^2}{n-k-1}$$

مثال 4 - 6:

جد تباين خطأ العينة للمثال السابق؟ .

الحل :

نجد أولاً: $\sum e_i^2$ أو $e'e$

$$e'e = Y'Y - b'X'Y = \sum y^2 - \left[b_1 \sum x_1 y + b_2 \sum x_2 y\right]$$

$$e'e = 1634 - \left[0.65(956) - 1.11(900) = 13.6\right]$$

ثم نطبق الصيغة العامة لإيجاد تباين خطأ العينة $Se2$ وكما مبين أدناه:

$$Se^2 = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{\sum e_i^2}{n-k-1} = \frac{13.6}{10-2-1} = 1.94$$

4– 5: تطبيقات على الحاسوب

Applications on The Computer

أفضت التطورات الحديثة في المجالات الإحصائية الى استخدام الكثير من البرامج الإحصائية التي تسهل على الباحث الوصول الى ذات النتائج التي تم التوصل إليها بالطرق التي مر ذكرها آنفا، وبالأخص تلك البرامج التي تتوافق مع أنظمة النوافذ *Windows* في الحاسوب الشخصي والتي من بينها :

1. برنامج منيتاب ***Minitab***
2. برنامج ***SPSS*** (Statistical Package For Social Sciences)

ولتوضيح كيفية استخدام تلك البرامج في إطار موضوع الانحدار الخطي المتعدد سيتم حل المثال التالي:

مثال 4 – 6:

البيانات التالية تمثل الاستيرادات لإحدى الدول كمتغير تابع Y والدخل القومي لذلك البلد (X_1) وأسعار تلك الاستيرادات (X_2) كمتغيرين تابعين ولمدة 12 سنة متتالية والمطلوب:

تقدير معالم العلاقة بين المتغيرات أعلاه باستخدام البرامج الإحصائية:

1- برنامج **منيتاب *Minitab***

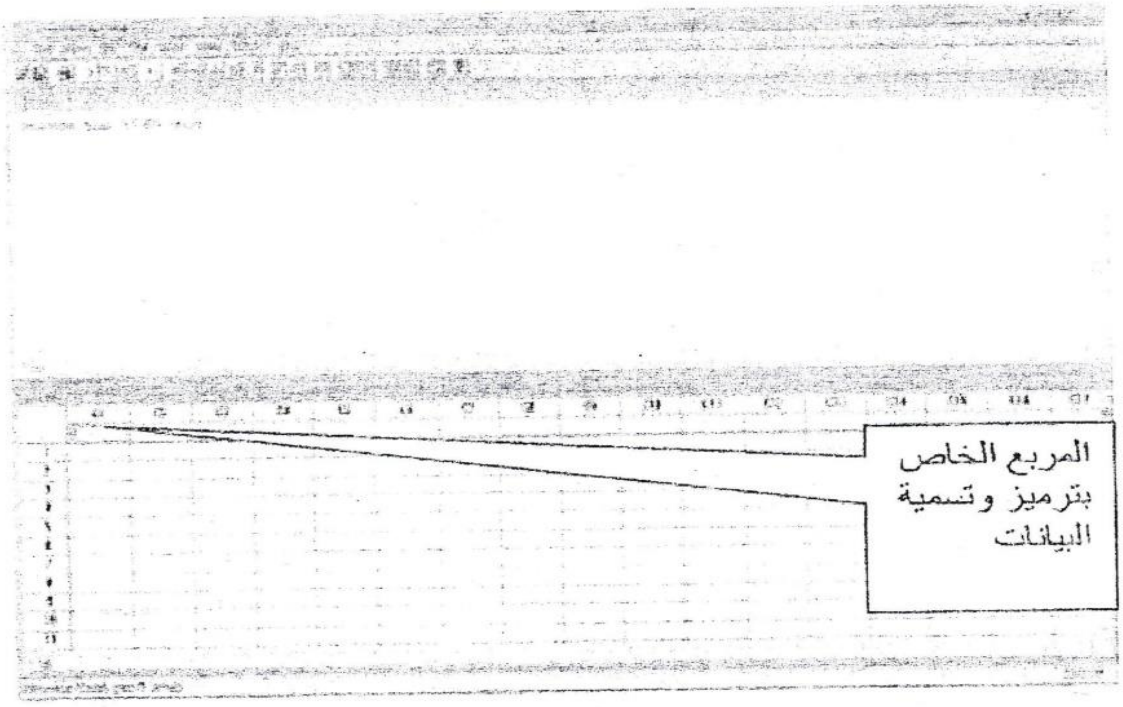
2- **برنامج *SPSS***

Y	X_1	X_2
70	67	80
79	87	67
56	67	88
67	98	79
56	69	88
66	79	79
55	66	88
66	77	78
65	66	78
70	77	70
72	89	69
76	92	67

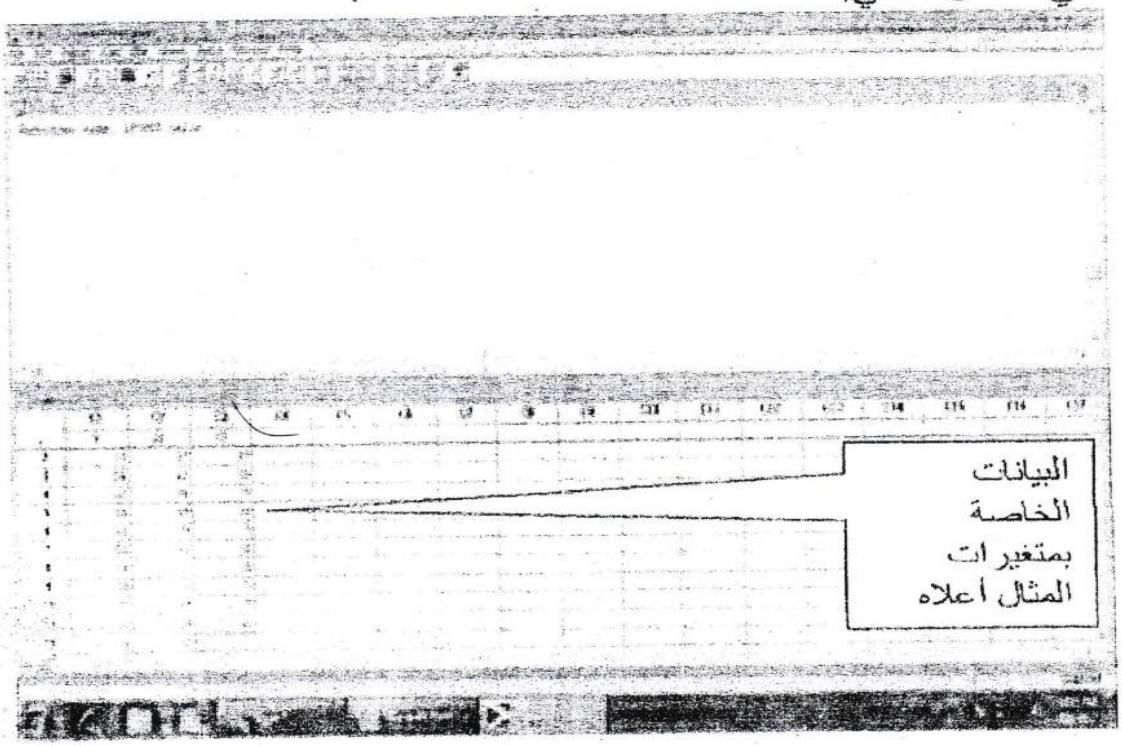
1- الحل باستخدام برنامج منيتاب *Minitab*

وهو من البرامج الاحصائية المبسطة وواسعة الاستخدام ويهتم بالتحليلات الاحصائية البسيطة والمعقدة، ويمتاز بسهولة استخدامه خاصة وان ادخال البيانات يشابه الى حد بعيد طريقة ادخالها باستخدام برنامج *SPSS* وتتثمل خطوات الحل بما يلي:

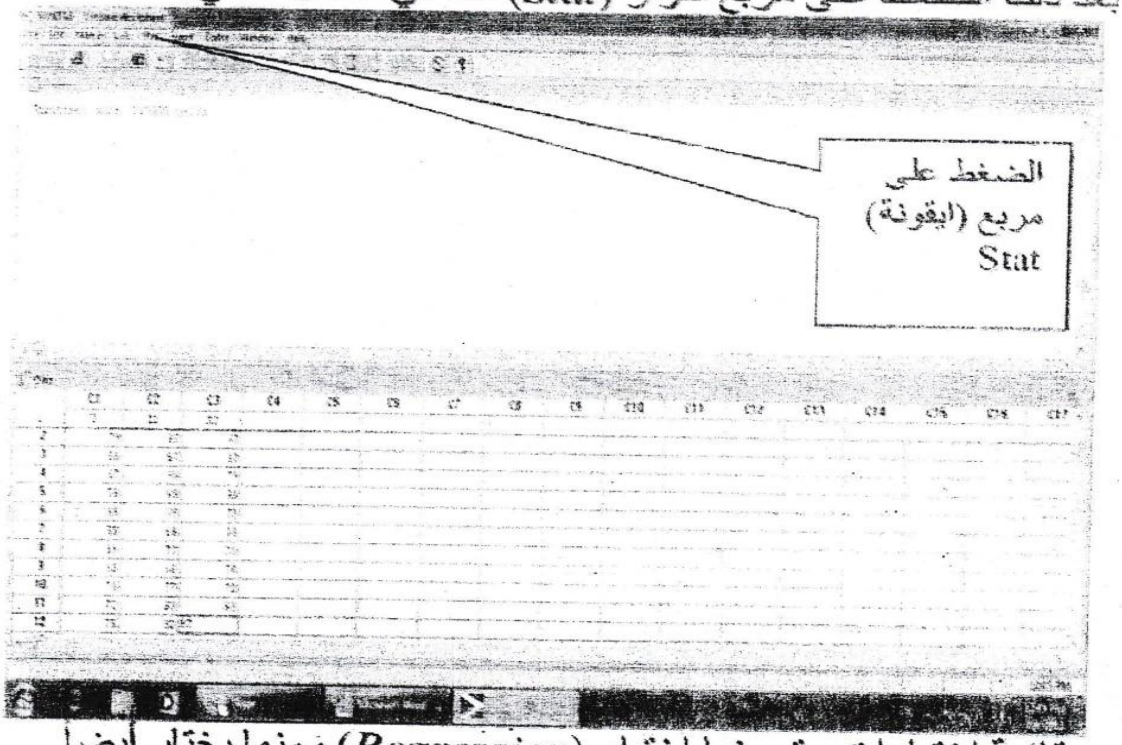
- يتم الدخول الى برنامج منيتاب من خلال الضغط على البرنامج المفترض تحميله على واجهة الحاسبة (*Desktop*) مثلا حيث يتم فتح شاشة البيانات كما في الشكل التالي :



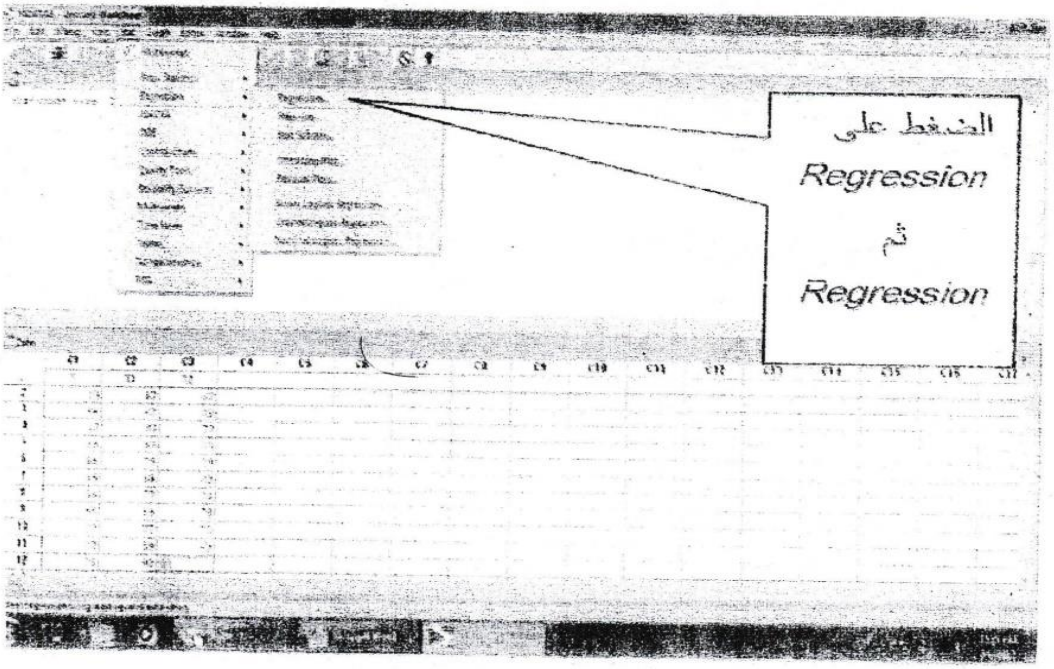
- يتم إدخال البيانات الخاصة بالاستيرادات واسعارها وكذلك قيم الدخل القومي وكما في الشكل التالي:



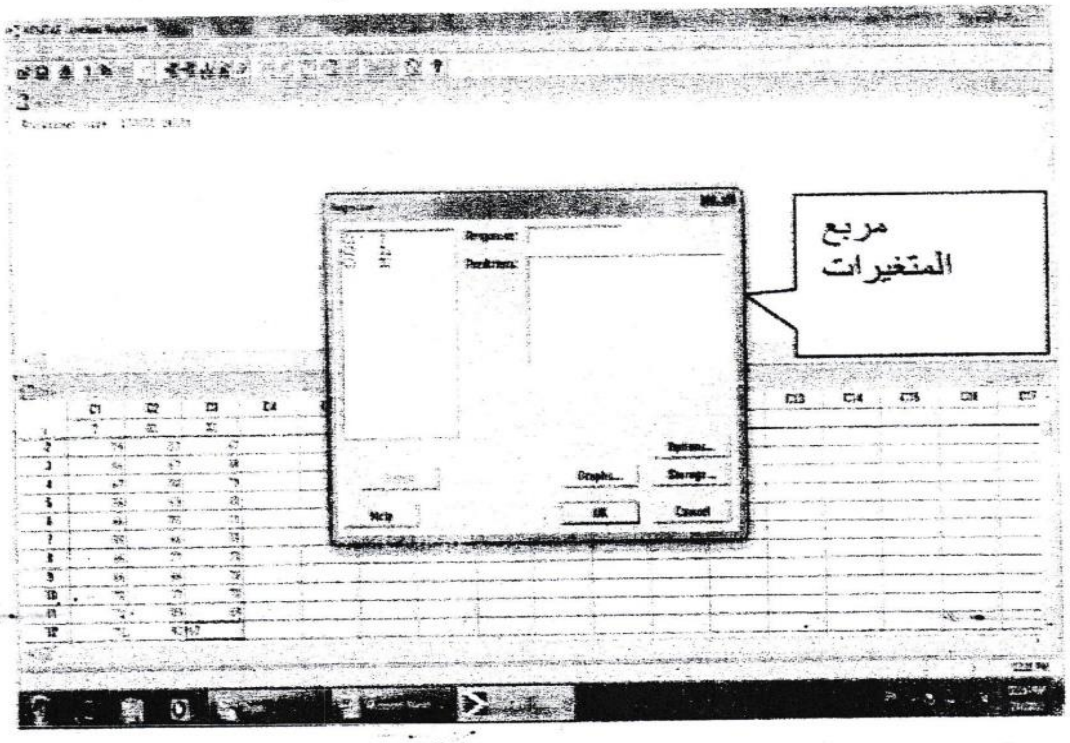
- يتم بعد ذلك الضغط على مربع حوار (*Stat*) كما في الشكل التالي:



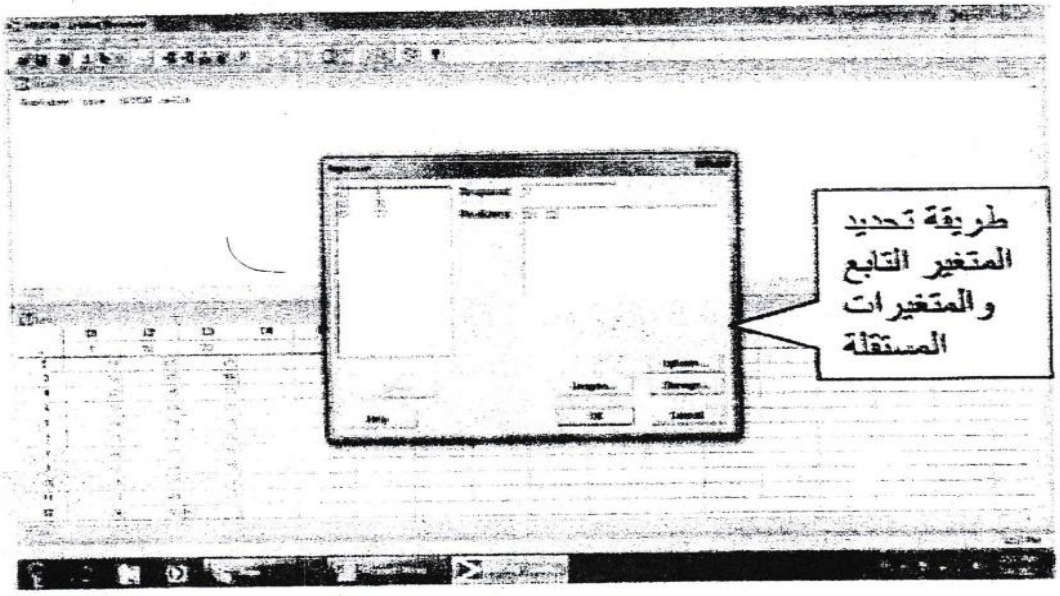
حيث تظهر قائمة اختيارات يتم منها اختيار (*Regression*) ومنها يختار أيضا (*Regression*) المؤشرة في المستطيل المجاور وكما هو موضح في الشكل أدناه:



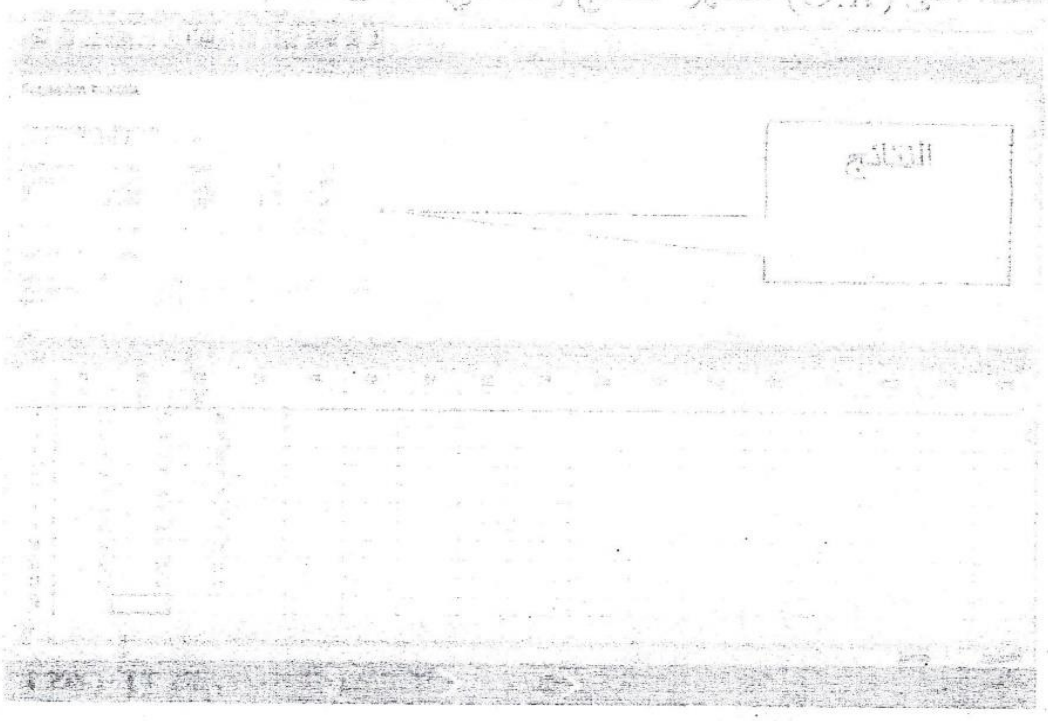
- بعد ذلك تظهر لنا شاشة مربع حوار يتضمن كيفية نقل المتغيرات الى خانة المتغير التابع وخانة المتغير المستقل كما في الشكل التالي:



- يضغط مرتين متتاليتين على المتغير التابع (Y) ثم نفس الشيء على المتغيرين المستقلين (X_1, X_2) فيظهر الشكل التالي:



يتم الضغط على (O.K) فتظهر النتائج وكما في الشكل أدناه:



- يتم نسخ النتائج من الشكل السابق ولصقها أدناه:

$$Y = 133 + 0.0333\,X1 - 0.891\,X2$$

Predictor	Coef	StDev	T	P
Constant	133.00	17.17	7.75	0.000
X1	0.03330	0.09901	0.34	0.744
X2	-0.8906	0.1415	-6.29	0.000

S = 2.747 R-Sq = 0.89 R-Sq(adj) = 0.87

Analysis of Variance

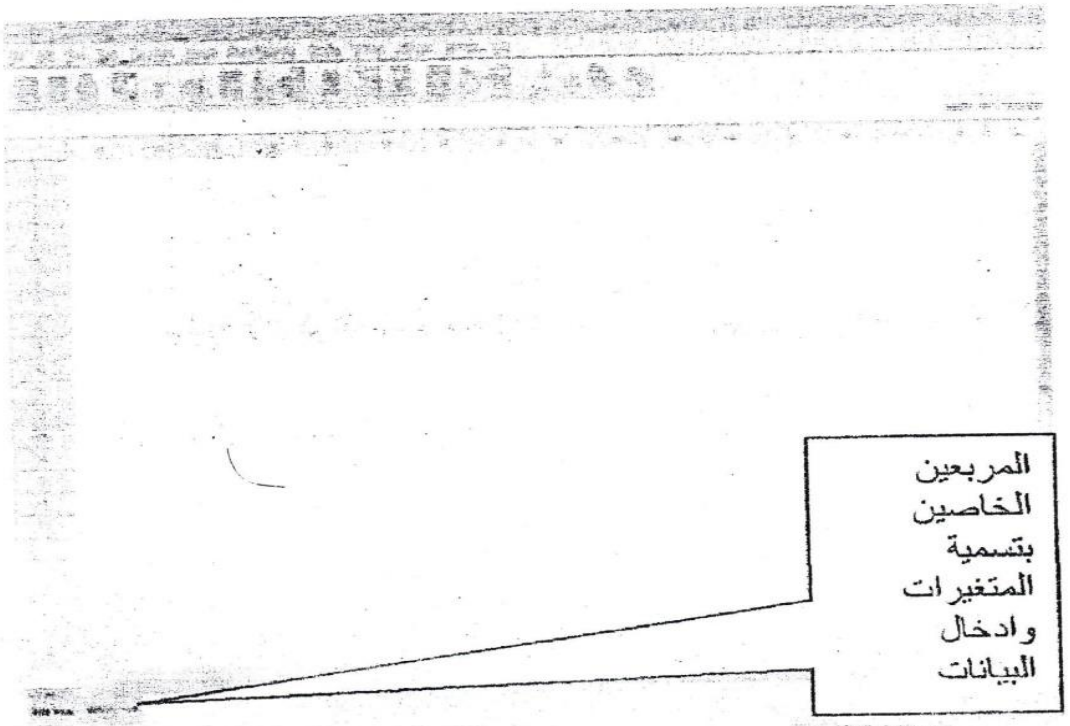
Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	2	589.07	294.53	39.02	0.000
Error	9	67.93	7.55		
Total	11	657.00			

Source	DF	Seq SS
X1	1	290.15
X2	1	298.91

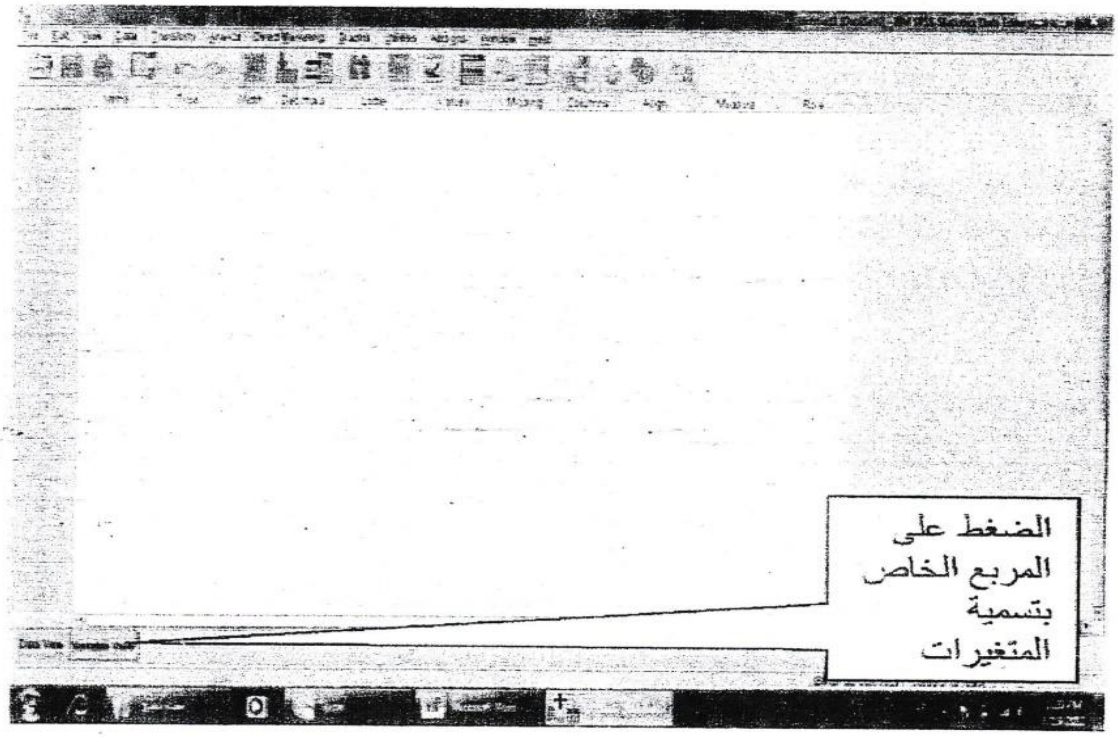
2-الحل باستخدام برنامج *SPSS*: (Statistical Package For Social Sciences)

وهو من البرامج الاحصائية واسعة الاستخدام ويهتم بالتحليلات الاحصائية البسيطة والمعقدة والتي يهمنا منها ما يتعلق بالإحصاء الاقتصادي، مشيرين هنا الى أن استخدامه يتطلب معرفة والمام من الباحثين عن كيفية استخدامه، لذا فان حلنا للمثال السابق باستخدام البرنامج أعلاه مباشرة دون الدخول في التفاصيل الدقيقة للبرنامج يأتي انطلاقا من ذلك، اضافة الى شيوع استخدام هذا البرنامج بين الباحثين وتوفر العديد من المصادر التي تشرح كيفية استخدامه، يعاضد ذلك أن البرنامج يخضع لتعديلات مستمرة وعلى شكل إصدارات متسلسلة والتي وصلت لغاية الان أكثر من 19 اصدار، وعليه فان خطوات الحل باستخدام النسخة الاحدث من البرنامج (النسخة 19) تتضمن ما يلي:

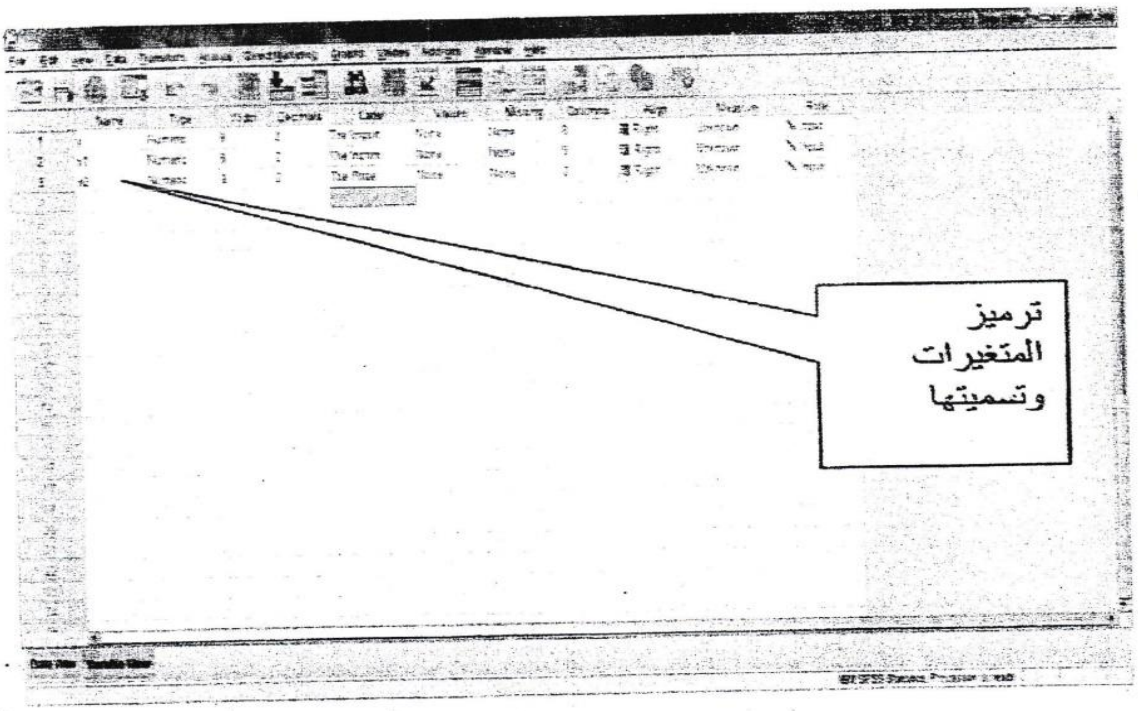
- يتم الدخول الى برنامج *SPSS* من خلال الضغط على البرنامج المفترض تحميله على واجهة الحاسبة (*Desktop*) مثلا حيث يتم فتح شاشة البيانات، ويلاحظ فيها مربعين اسفل الشاشة هما (*Data View*) و(*Variable View*) كما في الشكل التالي :



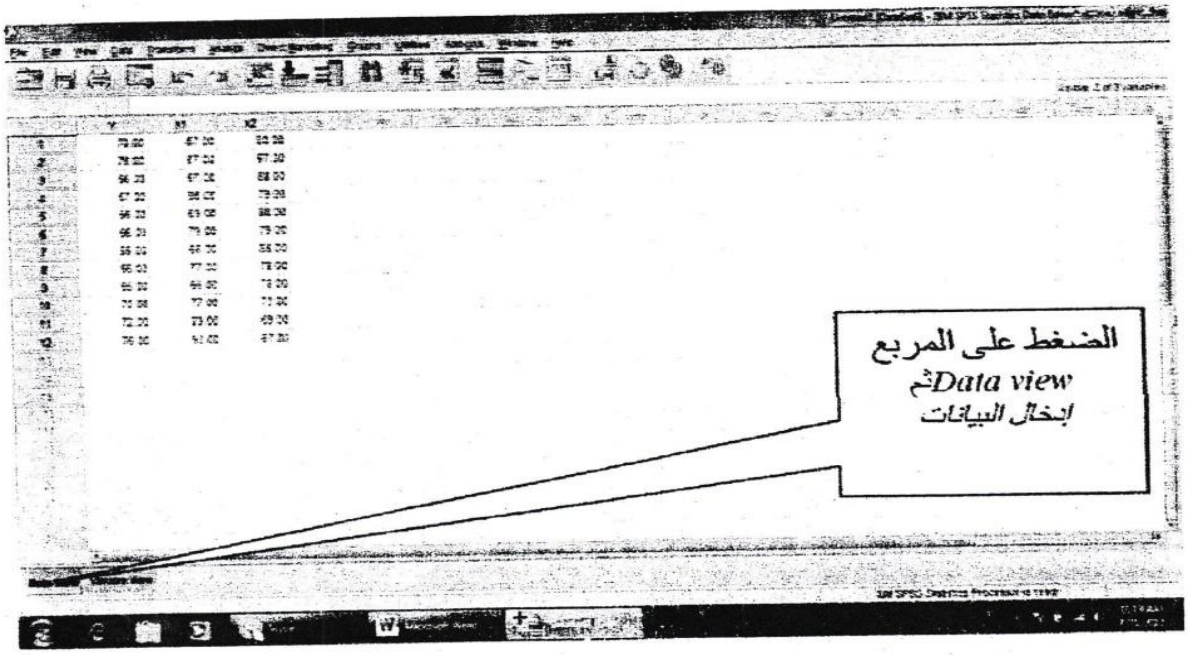
- يتم أولا الضغط على المربع (*Variable View*) والخاص بترميز وتسمية المتغيرات فتظهر الواجهة التالية والتي تحتوي على شريط افقي فيه مجموعة من الخانات تمثل تسمية وترميز البيانات وشريط عمودي مرتب وفق تسلسل رقمي يمثل عدد المتغيرات، والشريط الافقي يكون فيه مربعات أو خانات على راس أعمدة تمثل معلومات عن المتغير المراد إدخاله يقابل كل مستطيل فيها المتغير المحدد مسبقا ويتم فيها ادخال المعلومات عن المتغير حسب الحاجة وان ترك ادخال البيانات التعريفية لا يؤثر على النتائج النهائية :



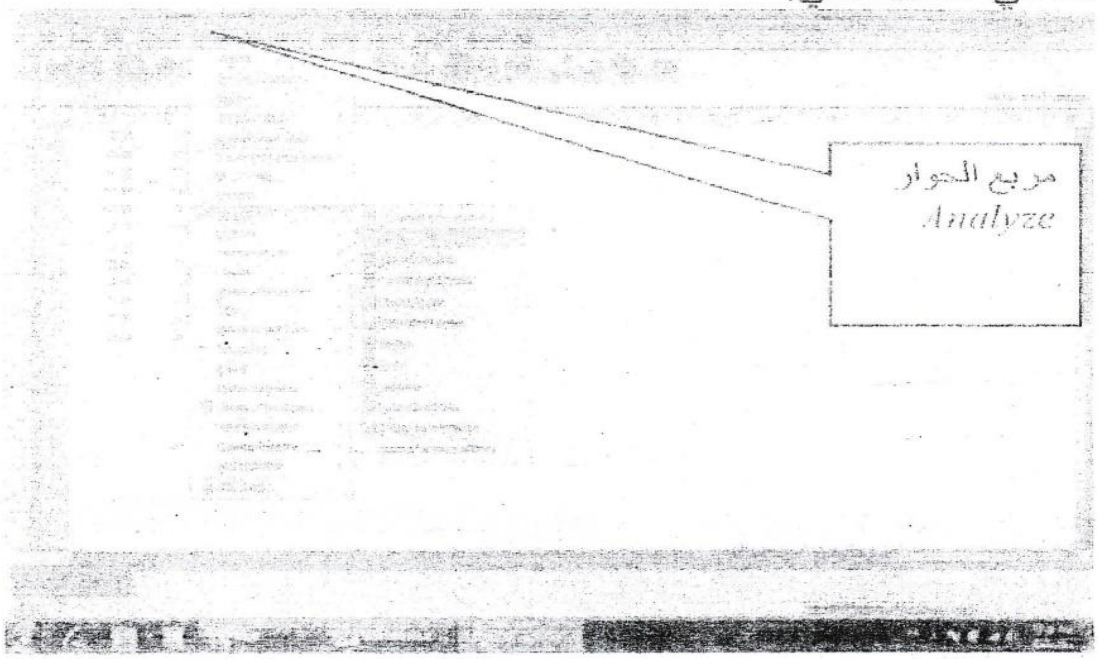
- يتم إدخال المتغيرات وكما في الشكل التالي:



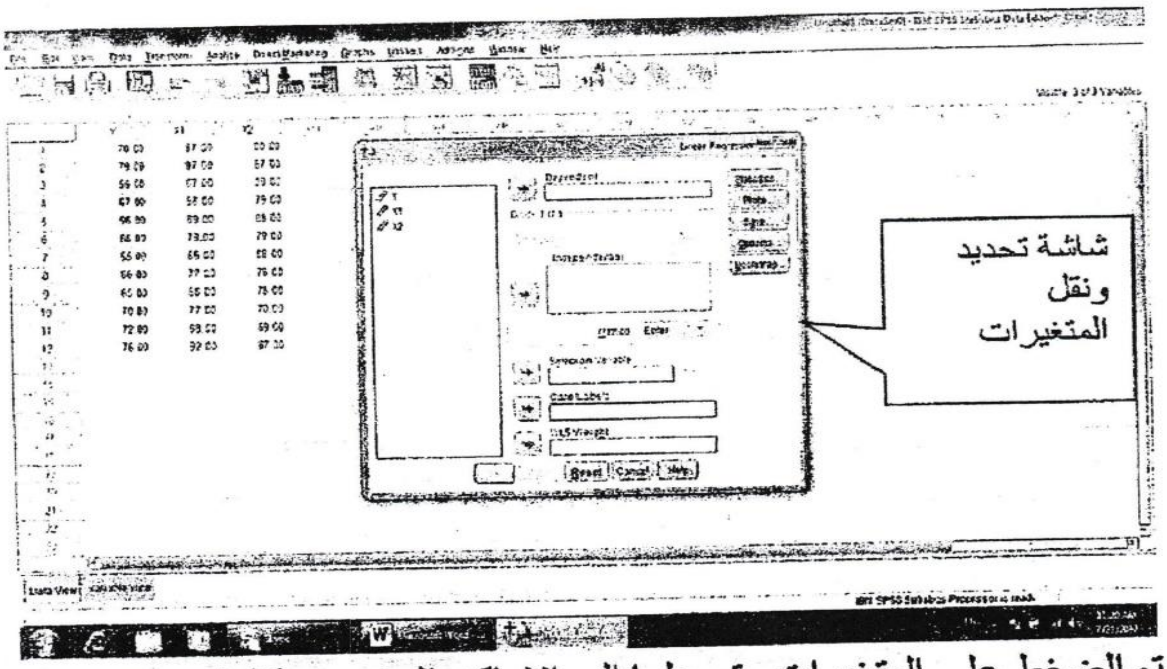
- يتم الضغط على المربع (*Data View*) فيظهر مربع الحوار الخاص بإدخال البيانات الرقمية الخاصة بالمتغيرات الثلاث وعملية الادخال تتم أما بطريقة النسخ من جدول معين أو الادخال المباشر وكما في الشكل التالي:



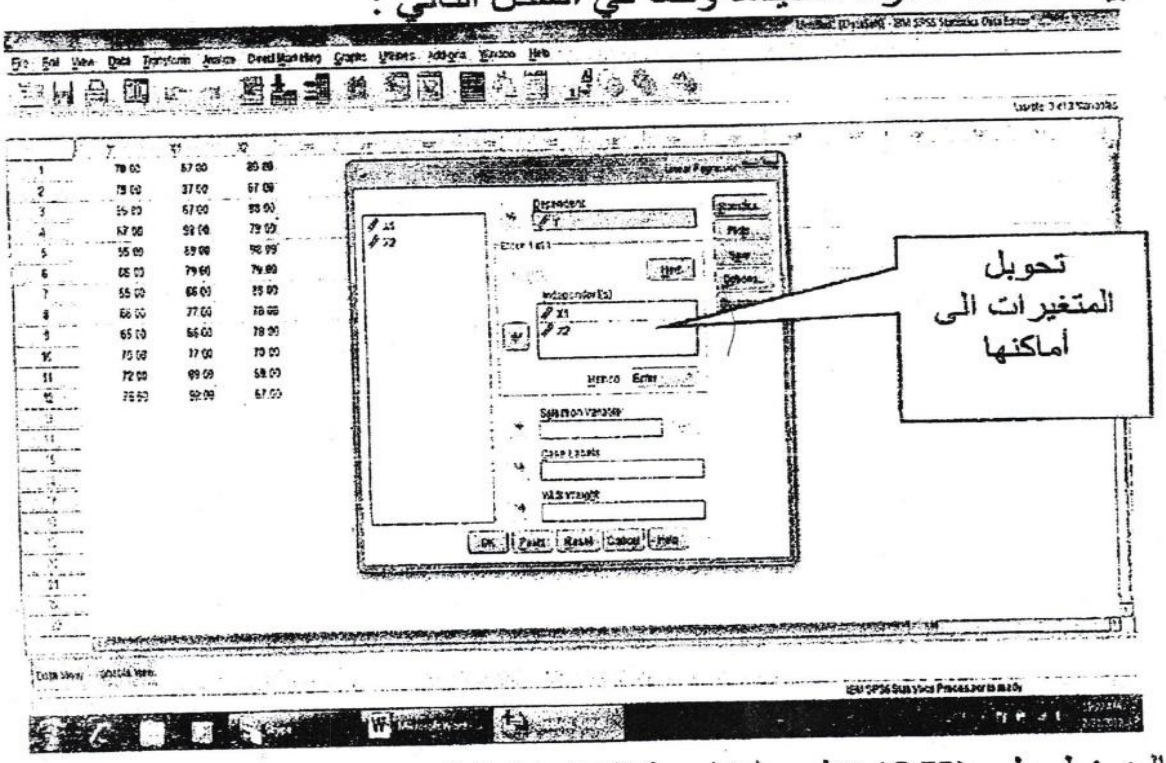
- يتم بعد ذلك الضغط على مربع حوار (*Analyze*) في شريط المهام أعلى الصفحة ثم نختار مربع الحوار (*Regression*) ومنه أيضا نختار (*Linear*) كما في الشكل التالي:



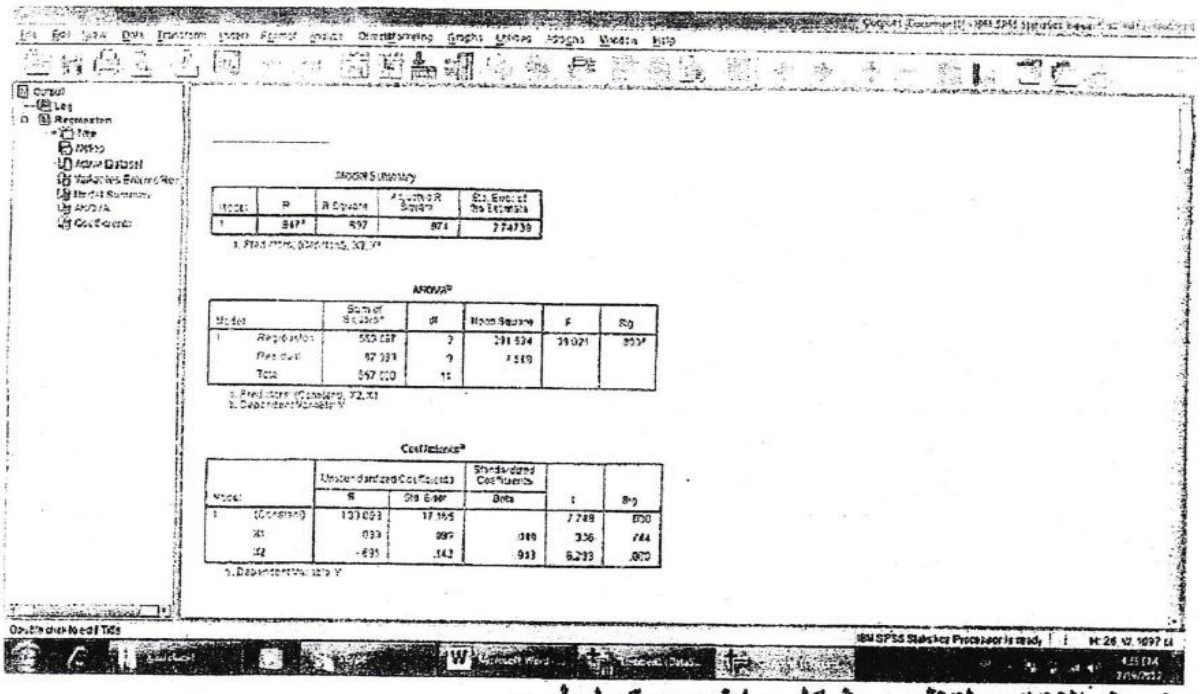
- الضغط على مربع الحوار (Linear) تظهر لنا شاشة مربع حوار يتضمن كيفية نقل المتغيرات الى خانة المتغير التابع وخانة المتغير المستقل كما في الشكل التالي:



- يتم الضغط على المتغيرات وتحويلها الى الاماكن المخصصة لها وحسب طبيعة العلاقة المراد تحديدها وكما في الشكل التالي :



- بالضغط على (OK) تظهر لنا لوحة النتائج التالية:



ويمكن نسخ النتائج لتظهر بشكل واضح وكما يلي:

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.947[a]	.897	.874	2.74738

a. Predictors: (Constant), X2, X1

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	Df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	589.067	2	294.534	39.021	.000[a]
	Residual	67.933	9	7.548		
	Total	657.000	11			

a. Predictors: (Constant), X2, X1

b. Dependent Variable: Y

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	T	Sig
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	133.003	17.166		7.748	.000
	X1	.033	.099	.049	.336	.744
	X2	-.891	.142	-.913	-6.293	.000

a. Dependent Variable: Y

ويمكن كتابة معادلة الانحدار الخطي المتعدد كما يلي:

$$\widehat{Y}_i = 133 + 0.033\,X_1 - 0.891\,X_2$$

تحليل النتائج:

ابتداءا يلاحظ تطابق النتائج المتحصل عليها من البرنامجين المنيتاب والـ SPSS وهذا أمرا مفروغا منه، باعتبار أن تلك البرامج قد صممت لذات الغايات الإحصائية وعليه فان التحليل في أدناه سيكون لنتائج البرنامجين وهي من مهام الباحث الإحصائي الاقتصادي وكما يلي:

1. يلاحظ من معادلة الانحدار الخطي أعلاه بأن اشارة معلمة المتغير المستقل X_1 والذي يمثل الدخل القومي موجبة مما يدل على وجود علاقة طردية بين هذا المتغير والمتغير التابع $\widehat{Y}_i$ وهو ما يتطابق مع النظرية الاقتصادية، والذي يشير أيضا الى ان زيادة X_1 بمقدار وحدة واحدة يودي الى زيادة الاستيرادات Y بمقدار 0.033 وحدة مع ثبات تأثير المتغير X_2، في حين أن معلمة المتغير X_2 والذي يمثل السعر سالبة مما يدل على أن العلاقة عكسية بين هذا المتغير والمتغير التابع Y وهو ما يتطابق ايضا مع منطق النظرية الاقتصادية والذي يشير الى وجود علاقة عكسية بين السعر والاستيرادات، إذ أن الزيادة في أسعار السلع المستوردة بمقدار وحدة واحدة مع ثبات تأثير المتغير X_1 سوف يؤدي الى تناقص الاستيرادات بمقدار 0.891.

2. كما تمت الاشارة اليه سابقا بأنه يفضل في الانحدار المتعدد استخدام معامل التحديد المصحح $\overline{R^2}$ وذلك لان قيمة معامل $\overline{R^2}$ تقل بتزايد عدد المتغيرات المفسرة، وهنا يشير معامل التحديد المعدل الى أن 87% من التغيرات الحاصلة في الاستيرادات سببها التغير الحاصل في المتغيرات المستقلة.

3. يلاحظ بأن قيمة (t) المحتسبة للمعلمة b_1 والبالغة 0.336 وهي أقل من قيمتها الجدولية وعند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية 9 والبالغة 1.833 والتي يعني القبول بفرضية العدم أي عدم معنوية المعلمة b_1، في حين أن قيمة (t) المحتسبة للمعلمة b_2 والبالغة(-6.293) اكبر من قيمتها الجدولية (بعض النظر عن الاشارة السالبة) مما يعني القبول بالفرضية البديلة أي معنوية المعلمة b_2.

في حين يلاحظ أن قيمة F المحتسبة والبالغة (39.02) أكبر من قيمتها الجدولية وعند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (2،9) للبسط والمقام والبالغة (4.26) مما يعني رفض فرضية العدم وقبول الفرضية البديلة أي معنوية العلاقة المقدرة أي وجود تأثير على الأقل لأحد المتغيرين X_1, X_2 على المتغير التابع Y.

ومن الجدير بالملاحظة أن البرامج الاحصائية أعلاه تظهر ضمن شاشة النتائج الخاصة باختباري t, F وتحت العمود Sig بالنسبة لبرنامج $SPSS$ وتحت العمود $P\ Value$ بالنسبة لبرنامج Minitab بيانات تغني عن الجداول الاحصائية (القيم الجدولية) ويتم تحليلها كما يلي:

1. اذا كانت القيمة الموجودة في شاشة النتائج وتحت العمود Sig بالنسبة لبرنامج $SPSS$ وتحت العمود P بالنسبة لبرنامج Minitab أقل من 5% معنى ذلك ان الاختبار يؤكد المعنوية الاحصائية.
2. اذا كانت القيمة أكبر من 5% فأن هذا يعني عدم معنوية الاختبار.
3. اذا كانت القيمة مساوية للصفر فأن المعنوية الاحصائية للاختبار عالية وان درجة الثقة بها كبيرة.

ومن هنا فأن قيمة (t) المؤشرة للمعلمة b_1 تحت العمودين Sig و P في البرنامجين والبالغة 0.77 هي أكبر من 5% مما يعني عدم معنوية المعلمة، في حين أن قيمة (t) المؤشرة للمعلمة b_2 تحت العمودين أعلاه والبالغة 0.00

تؤكد معنوية المعلمة b_2، وهو ما يتطابق مع التحليل السابق والذي تم فيه مقارنة قيمة (t) المحتسبة مع (t) الجدولية

وكذلك الحال بالنسبة الى اختبار F إذ تشير القيمة تحت العمودين Sig و P والبالغة 0.00 الى معنوية العلاقة المقدرة وهو ما يتطابق أيضا مع التحليل السابق.

الأسئلة والتمارين

س1: المجاميع والمعلومات التالية مستخلصة من بيانات عن الكمية المطلوبة من سلعة Y وأسعار السلع البديلة X_1 ودخول المستهلكين X_2 وكالاتي: $\sum x_i y_i = 260$

$$\sum Y_i = 310 \quad n = 5 \quad \sum X_2 = 42 \quad \sum X_{1i}^2 = 370$$

$$\sum e_i^2 = 96.96 \qquad \sum x_1 x_{2i} = -21$$

$$\sum X_{2i}^2 = 382 \qquad \sum y_{1i}^2 = 1480 \quad \sum x_{2i} y_i = -84$$

$$\sum X_1 X_2 = 315$$

المطلوب: جد المعادلة التقديرية وفسرها اقتصاديا وهل إن إشارات المعلمات تؤكد ما هو متوقع طبقا لنظرية الطلب؟ ثم اختبر المعنوية الإحصائية لمعالم الميل.

س2: توفرت لديك البيانات التالية حيث أن Y_i يمثل المتغير التابع وأن X_1 و X_2 هما المتغيران المستقلان:

Y_i	X_1	X_2
8	8	11
12	11	12
10	8	10
9	8	13
14	11	14
10	9	11

المطلوب: قدر المعادلة الخطية بين المتغيرات وبالطريقة التي تختار مع التفسير.

تمارين محلولة

س1: توفرت لديك البيانات التالية عن إجمالي الإنتاج الزراعي لدولة ما والذي سيرمز له بـ Y كمتغير تابع في حين أن (X_1) يمثل مبالغ الدعم الذي تقدمه الدولة لمستلزمات الإنتاج وأن (X_2) يمثل دعم الدولة لأسعار الناتج النهائي للمحاصيل الزراعية.

المطلوب: إيجاد قيم معاملات الانحدار والمعادلة التقديرية للنموذج باستخدام طريقة المصفوفات.

Y	X_1	X_2
6	9	11
8	12	14
5	7	9
7	8	11
10	12	15
11	14	17
10	11	16
5	6	10

الحل :

1 - عمل الحسابات اللازمة :

Y	X_1	X_2	X_1X_2	X_1^2	X_2^2	X_1Y	X_2Y
6	9	11	99	81	121	54	66
8	12	14	168	144	196	96	112
5	7	9	63	49	81	35	45
7	8	11	88	64	121	56	77
10	12	15	180	144	225	120	150
11	14	17	238	196	289	154	187
10	11	16	176	121	256	110	160
5	6	10	60	36	100	30	50
62	**79**	**103**	**1072**	**835**	**1389**	**655**	**847**

$$\sum x_1 y = \sum X_1 Y - \frac{(\sum X_1)(\sum Y)}{n}$$

$$\sum x_1 y = 655 - \frac{(79)(62)}{8} = 42.75$$

$$\sum x_2 y = \sum X_2 Y - \frac{(\sum X_2)(\sum Y)}{n}$$

$$\sum x_2 y = 847 - \frac{(103)(62)}{8} = 48.75$$

$$\sum x_1 x_2 = \sum X_1 X_2 - \frac{(\sum X_1)(\sum X_2)}{n}$$

$$\sum x_1 x_2 = 1072 - \frac{(79)(103)}{8} = 54.875$$

$$\sum x_1^2 = \sum X_1^2 - \frac{(\sum X_1)^2}{n}$$

$$\sum x_1^2 = 835 - \frac{(79)^2}{8} = 54.875$$

$$\sum x_2^{\,2} = \sum X_2^{\,2} - \frac{\left(\sum X_2\right)^2}{n}$$

$$\sum x_2^{\,2} = 1389 - \frac{(103)^2}{8} = 62.875$$

- إيجاد قيمة المصفوفة $X'X$:

$$X'X = \begin{bmatrix} \sum x_1^{\,2} & \sum x_1 x_2 \\ \sum x_1 x_2 & \sum x_2^{\,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54.875 & 54.875 \\ 54.875 & 62.875 \end{bmatrix}$$

- إيجاد معكوس المصفوفة $X'X$ اي المصفوفة $(X'X)^{-1}$:

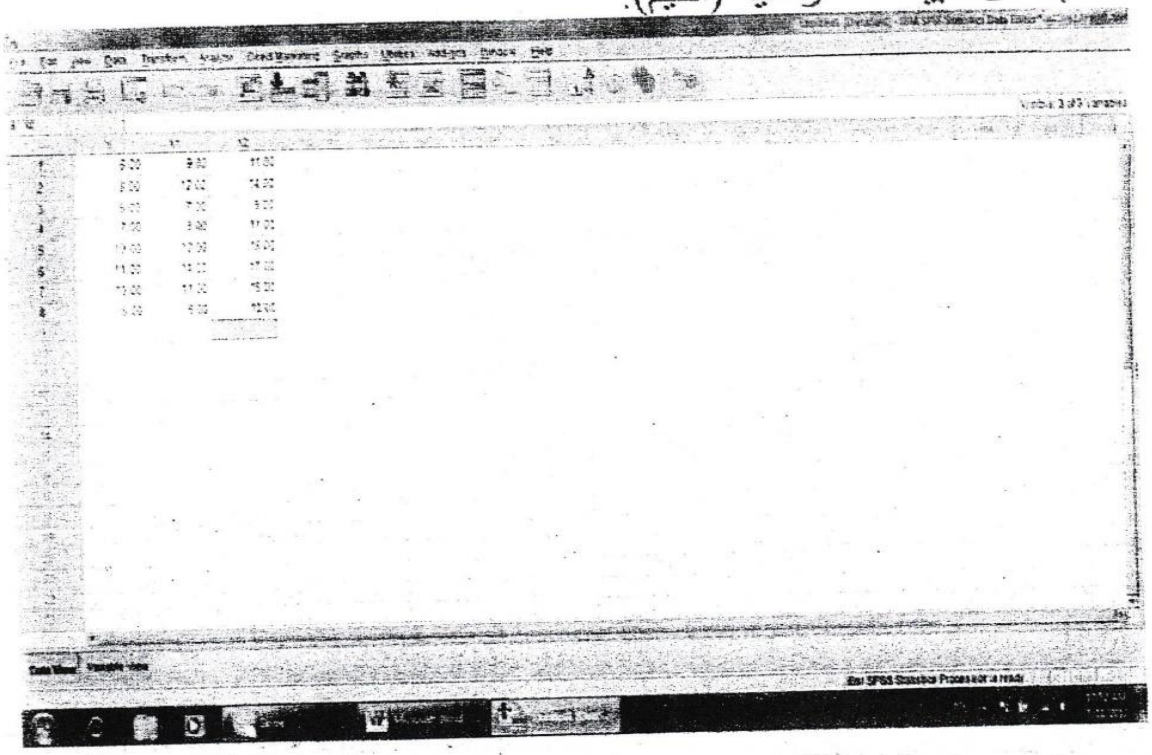
$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{|X'X|}.adj(X'X)$$

$$|X'X| = \begin{vmatrix} \sum x_1^{\,2} & \sum x_1 x_2 \\ \sum x_1 x_2 & \sum x_2^{\,2} \end{vmatrix}$$

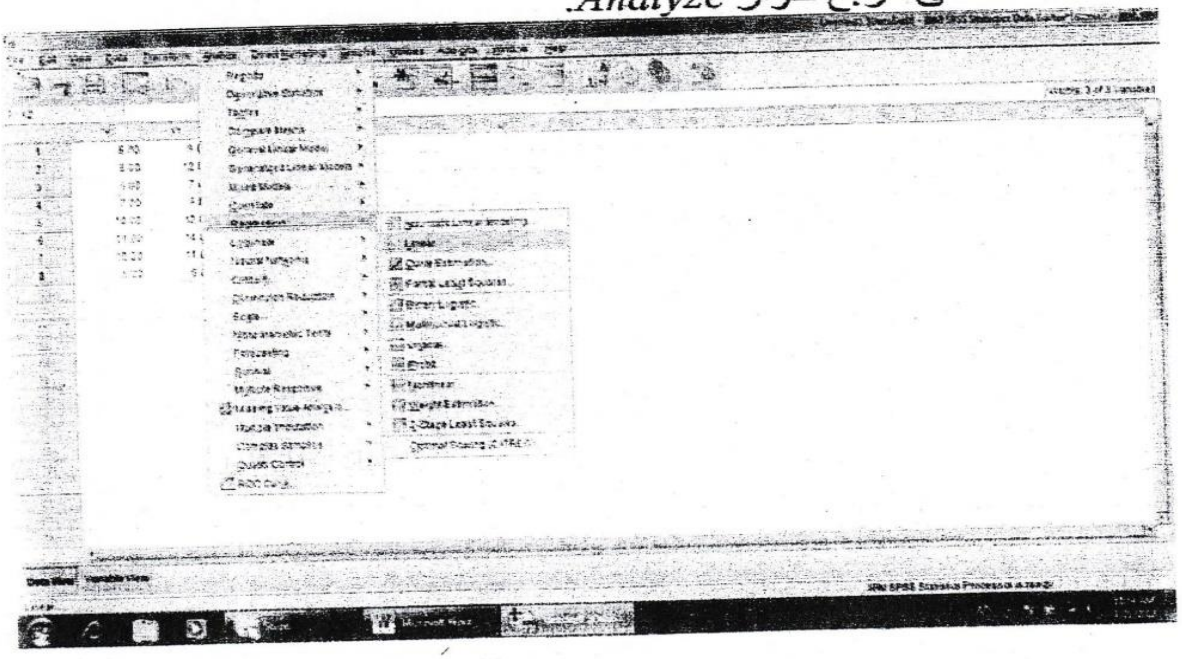
$$|X'X| = |(54.875)(62.875) - (54.875)(54.875)| = 439$$

$$adj(X'X) = \begin{bmatrix} 62.875 & -54.875 \\ -54.875 & 54.875 \end{bmatrix}$$

- إدخال البيانات الرقمية (القيم):



- الضغط على مربع حوار *Analyze*:



$$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{62}{8} = 7.75$$

$$\overline{X}_1 = \frac{\sum X_1}{n} = \frac{79}{8} = 9.875$$

$$\overline{X}_2 = \frac{\sum X_2}{n} = \frac{103}{8} = 12.875$$

$$\hat{b}_0 = 7.75 - 0.029(9.875) - 0.75(12.875) = -2.19$$

إذن المعادلة التقديرية هي:

$$\hat{Y}_i = -2.19 + 0.029X_{1i} + 0.75X_{2i}$$

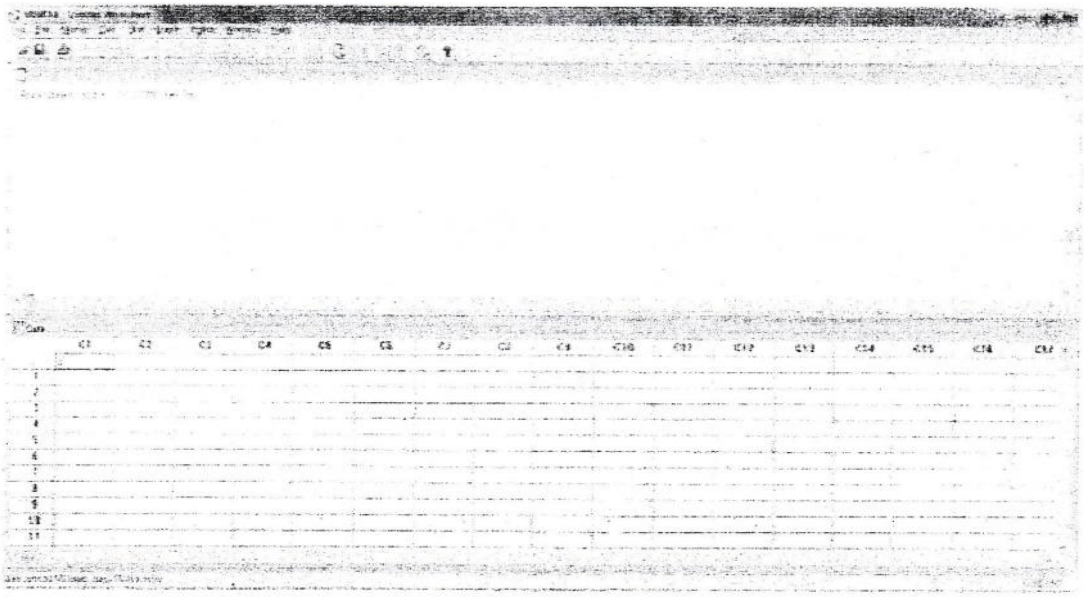
معنى المعادلة:

المعادلة أعلاه تعني أن كل زيادة في المتغير X_1 بوحدة واحدة يؤدي إلى تغير في قيمة Y_1 بمقدار 0.029 مع ثبات قيمة X_2 وكل زيادة في المتغير X_2 بوحدة واحدة مع ثبات قيمة X_1 يؤدي الى تغير في قيمة Y_1 بمقدار 0.75 .

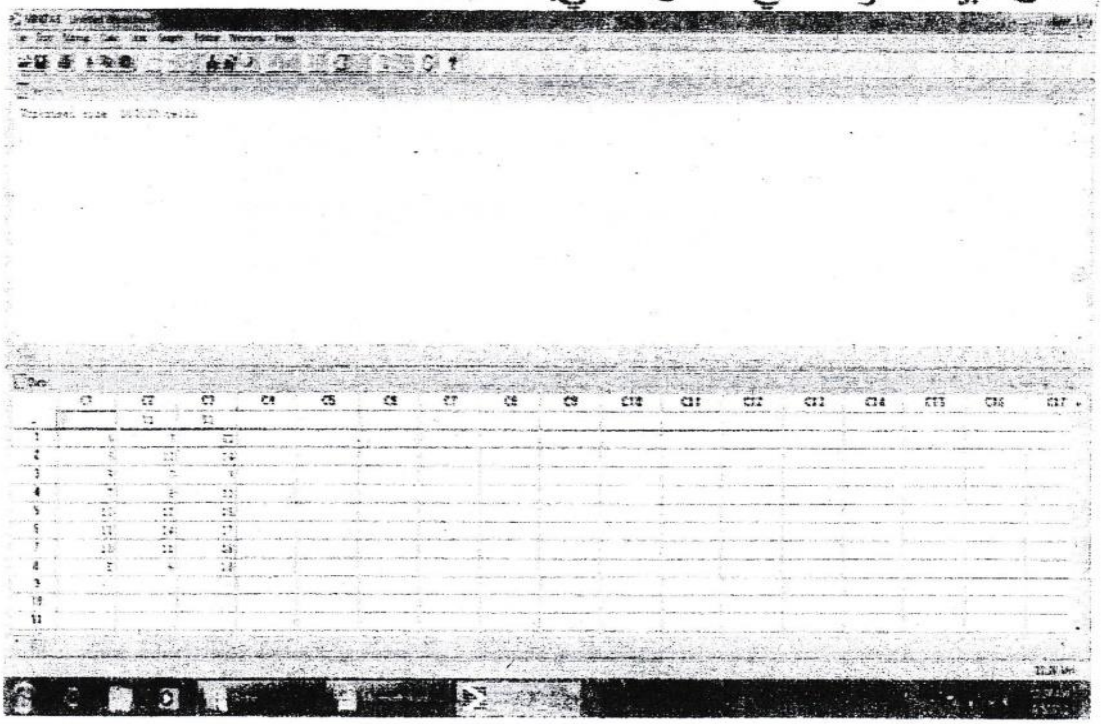
س2: حل السؤال السابق باستخدام البرامج الاحصائية *SPSS* و *Minitab*.

1 - الحل باستخدام برنامج منيتاب *Minitab*

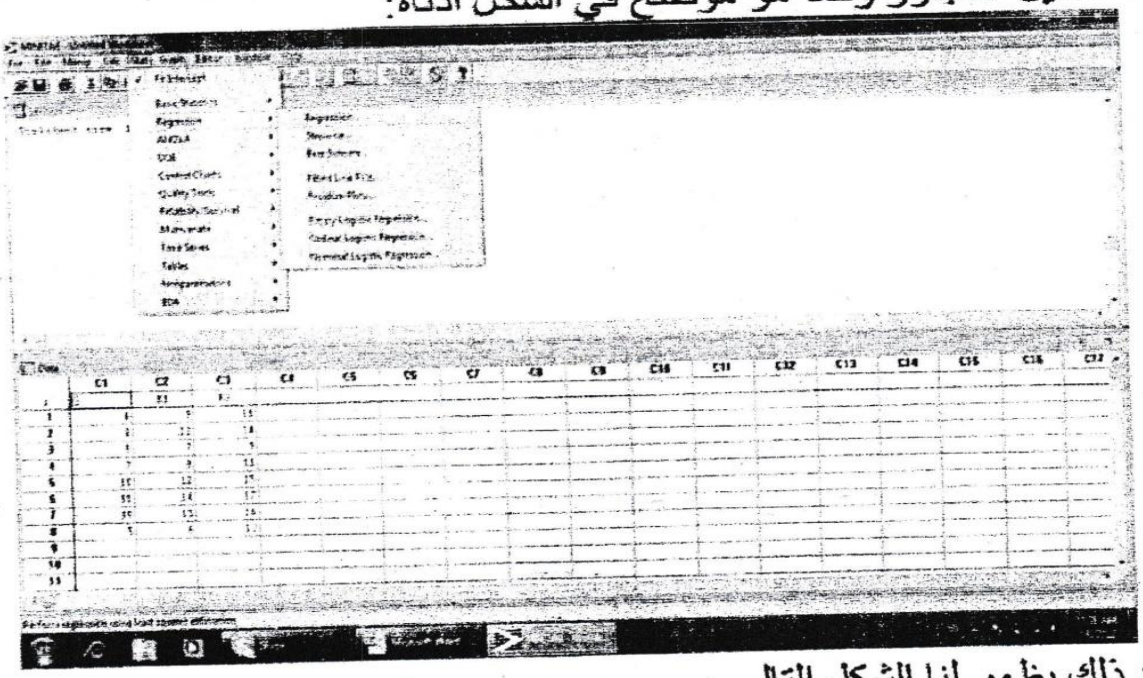
- يتم الدخول الى برنامج منيتاب من خلال الضغط على البرنامج المفترض تحميله على واجهة الحاسبة (*Desktop*) مثلا حيث يتم فتح شاشة البيانات كما في الشكل التالي :
- يتم فتح البرنامج وكما في الشكل التالي:



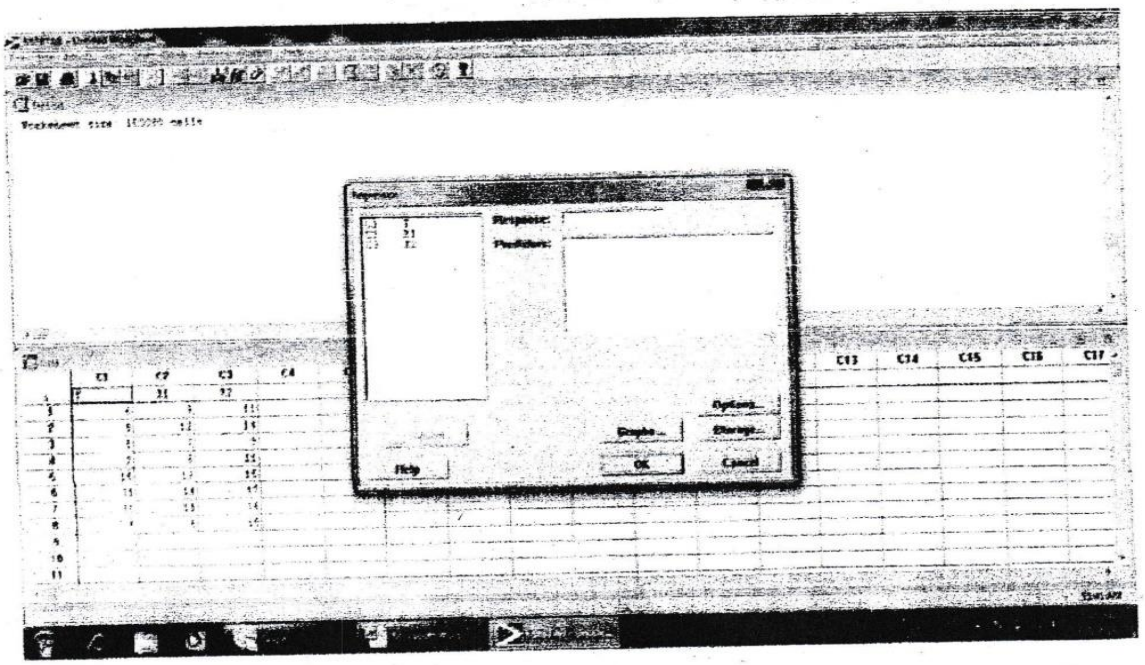
- يتم إدخال البيانات وكما في الشكل التالي:



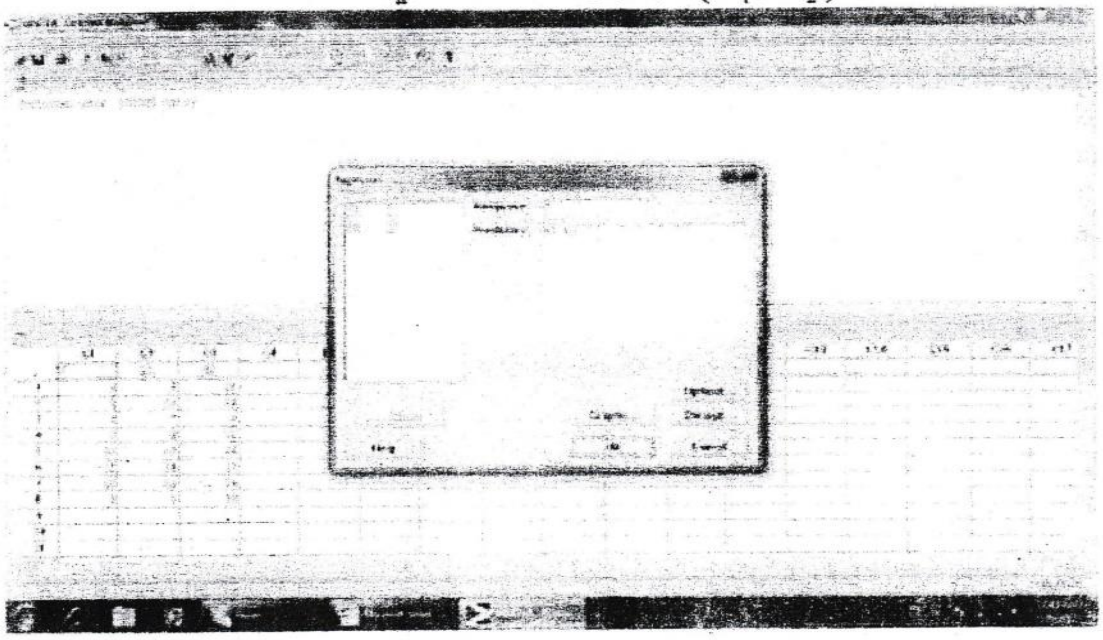
- يتم بعد ذلك الضغط على مربع حوار (*Stat*) حيث تظهر قائمة اختيارات يتم منها اختيار (*Regression*) ومنها يختار أيضاً (*Regression*) المؤشرة في المستطيل المجاور وكما هو موضح في الشكل أدناه:



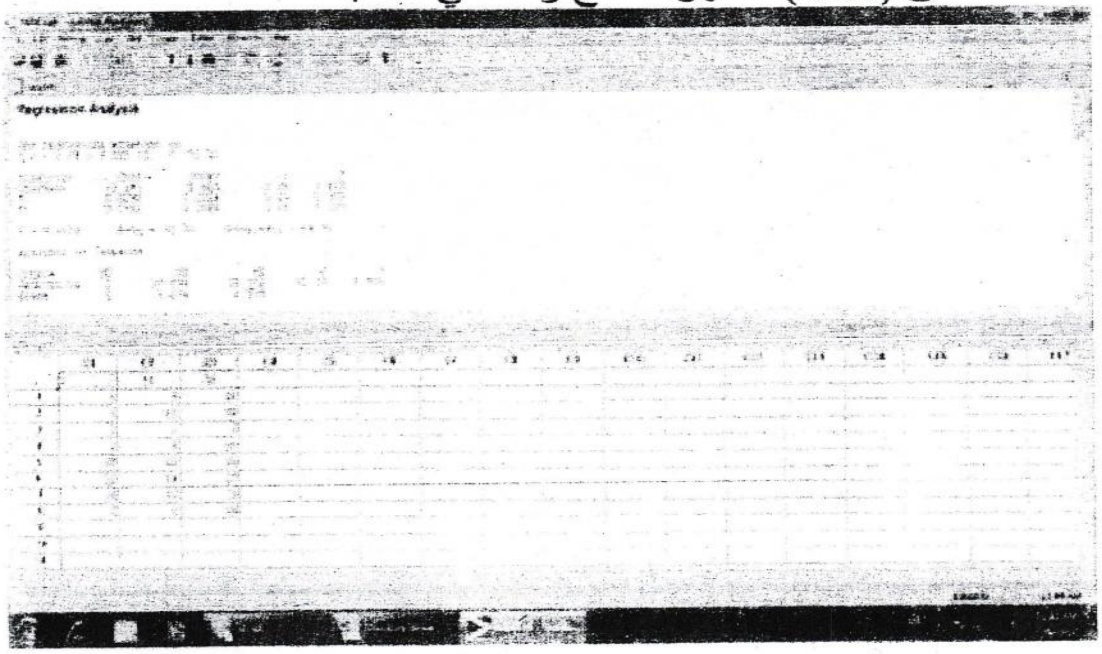
- بعد ذلك يظهر لنا الشكل التالي :



- يضغط مرتين متتاليتين على المتغير التابع (Y) ثم نفس الشيء على المتغيرين المستقلين (X_1, X_2) فيظهر الشكل التالي:



- يتم الضغط على (O.K) فتظهر النتائج وكما في أدناه:



يتم نسخ النتائج وترتيبها من الجدول أعلاه :

$$Y = -2.19 + 0.029\,X1 + 0.750\,X2$$

Predictor	Coef	StDev	T	P
Constan	-2.193	1.01	-2.16	0.083
X1	0.0290	0.220	0.13	0.900
X2	0.7500	0.205	3.64	0.015

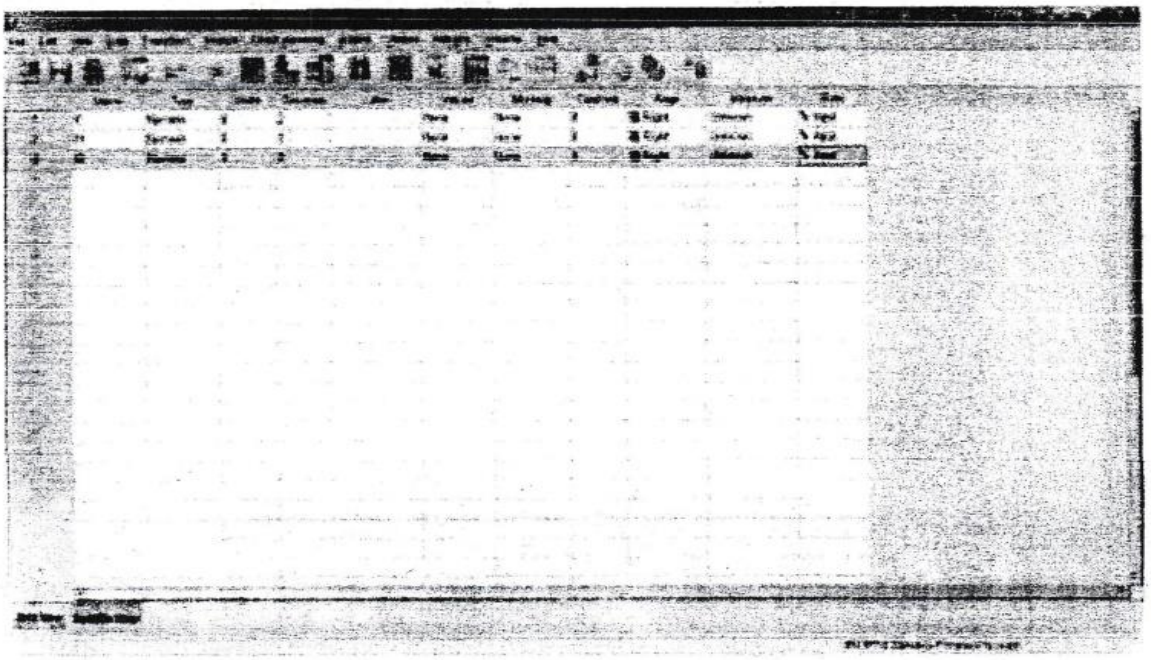
S = 0.5824 R-Sq = 95.7% R-Sq(adj) = 94.0%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	2	37.804	18.902	55.73	0.000
Error	5	1.696	0.339		

3- الحل باستخدام برنامج SPSS :

- تسمية وترميز المتغيرات:



$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{439}\begin{bmatrix} 62.875 & -54.875 \\ -54.875 & 54.875 \end{bmatrix}$$

- إيجاد قيمة المصفوفة $X'Y$:

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum x_1 y \\ \sum x_2 y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42.75 \\ 48.75 \end{bmatrix}$$

- إيجاد قيمة المتجه b الخاص بالمعلمات المقدرة b_1, b_2 :

$$b = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

$$b = \frac{1}{439}\begin{bmatrix} 62.875 & -54.875 \\ -54.875 & 54.875 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 42.75 \\ 48.75 \end{bmatrix}$$

$$b = \frac{1}{439}\begin{bmatrix} 12.731 \\ 329.25 \end{bmatrix}$$

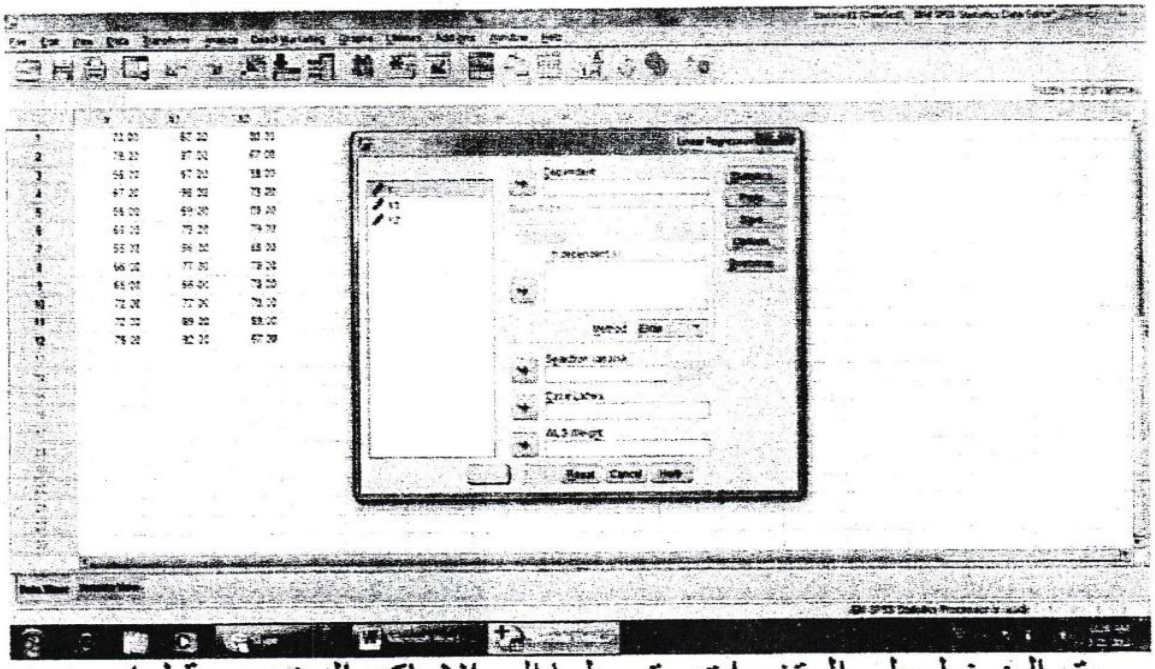
وبهذا يكون :

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.029 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

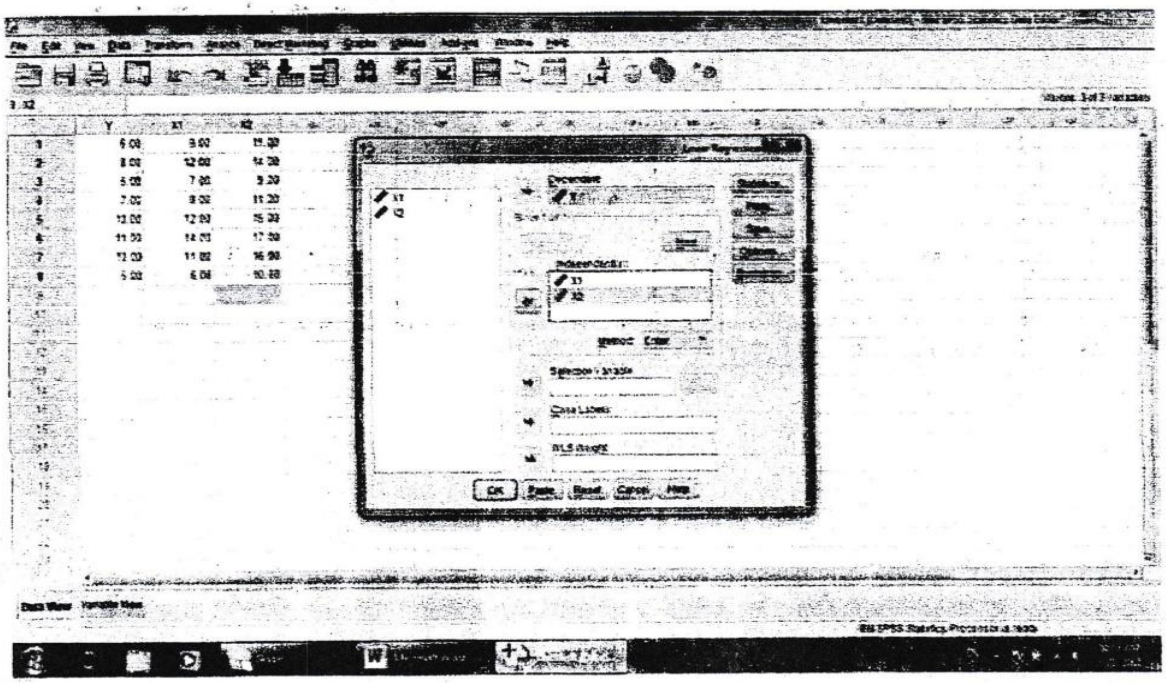
أما معلمة حد التقاطع $\hat{b}_0$ أو $\hat{a}$ فنجدها وفق الصيغة التالية :

$$b_0 = \overline{Y} - \hat{b}_1 \overline{X}_1 - \hat{b}_2 \overline{X}_2$$

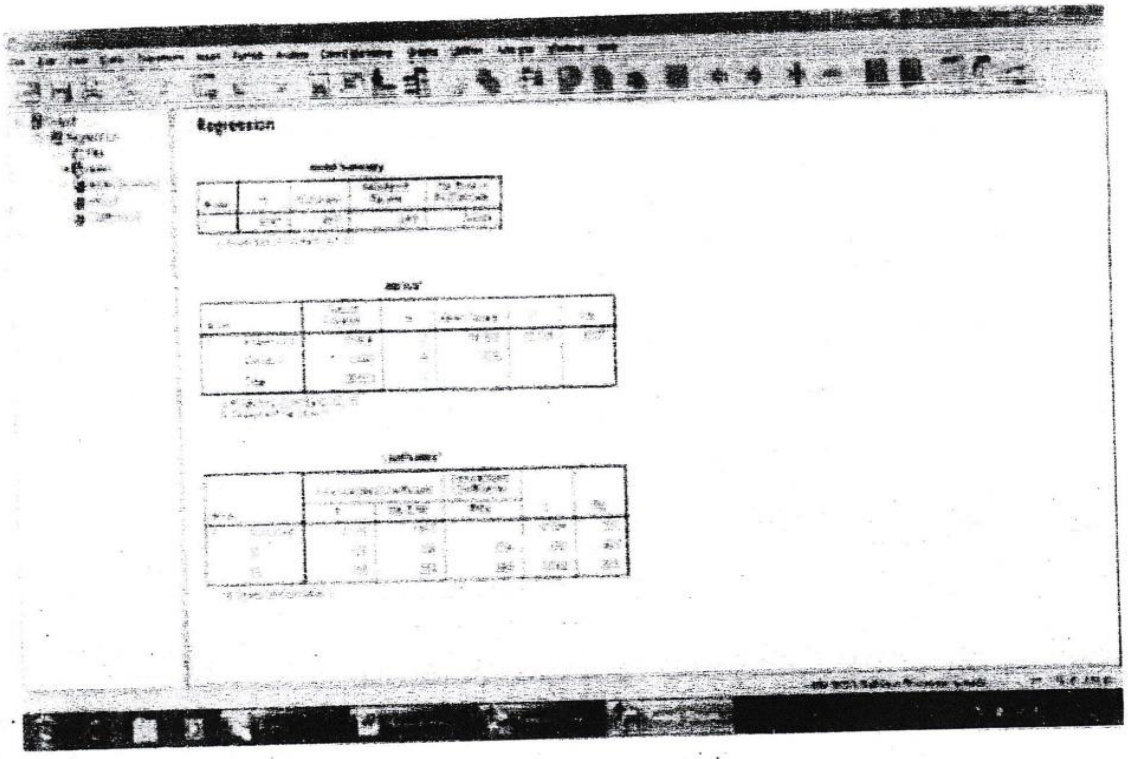
- الضغط على مربع الحوار (Linear) يظهر لنا الشكل التالي:



يتم الضغط على المتغيرات وتحويلها الى الاماكن المخصصة لها وحسب طبيعة العلاقة الخطية المراد دراستها وحسب الشكل التالي:



- بالضغط على (OK) تظهر لنا لوحة النتائج التالية:



يتم نسخ النتائج وكما يلي:

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.978[a]	.957	.940	.58239

a. Predictors: (Constant), X2, X1

معامل التحديد البسيط، وهنا فان قيمته تعني أن المتغيرين (X_1, X_2) يفسران حوالي 94% من التغير الحاصل في المتغير التابع (Y).

كما يشير اختبار (t) وحسب بيانات البرنامجين الاحصائيين *SPSS* و *Minitab* الى عدم معنوية المعلمة b_1 كون القيمة المقابلة لها في العمودين Sig و P والبالغة 0.90 هي أكبر من 5%، في حين أن يشير اختبار(t) بالنسبة الى المعلمة b_2 الى معنوية المعلمة باعتبار أن القيمة المقابلة لها في العمودين Sig و P في بيانات البرنامجين والبالغة 0.015 هي أقل من 5% ربما يعود الى وجود بعض المشاكل القياسية التي يعاني منها هذا النموذج .

ويؤكد اختبار F معنوية العلاقة المقدرة حسب ما تشير اليه القيمة تحت العمودين Sig و P والبالغة 0.00 والتي تبين أيضا أن المعنوية الاحصائية للاختبار عالية وان درجة الثقة بها كبيرة.