

١

برمجة نظرية رقم

## الفصل الرابع

### تحليل الحساسية Sensitivity Analysis

#### ٤-١. المقدمة:

( بعد دراسة مشكلة البرمجة الخطية وبناء النموذج الرياضي لها ثم التوصل إلى الحل الأمثل قد تطرأ بعض التغيرات على النموذج الأولي . فمثلاً لو كان نموذج البرمجة الخطية يمثل نشاطات مشروع معين وبعد أيجاد الحل الأمثل له حدثت بعض التغيرات في ظروف المشروع ، على سبيل المثال حصلت زيادة في الموارد المتاحة ( زيادة في الوقت المتاح ، عدد العمال ) إنتاج منتج جيد أو غير ذلك ، مما يتطلب إعادة حل النموذج للمشكلة بعد إضافة التغيرات الجديدة .

ان إعادة حل النموذج يكون مرهقاً ويحتاج الى وقت طويل ، ولكن يمكن استخدام طريقة لا تتطلب إعادة الحل بكتمه وذلك باستخدام ما يسمى تحليل الحساسية Sensitivity Analysis وقد يسمى أيضاً بتحليل ما بعد الاعتنية Post - Optimality Analysis . ويمكن تعريف مفهوم تحليل الحساسية بأنه "عبارة عن دراسة تأثير التغيرات في مكونات المشكلة على نموذج البرمجة الخطية " .

في هذا الفصل سيتم توضيح استخدام تحليل الحساسية وذلك بتناول التغيرات التي تحدث على النموذج الأولي بالاعتماد على آخر حلول لآخر دورة من دورات الحل وبعد الحصول على الحل الأمثل من دون الجلوس على حلحلة الحل بكتامله مرة أخرى .

اما التغيرات التي يمكن ان تحدث على نموذج البرمجة الخطية

1. التغيرات في الطرف الأيمن للقيود (الموارد المتاحة)
2. التغيرات في معاملات دالة الهدف.
3. التغيرات في معاملات متغيرات القرار في القيود.
4. إضافة متغير او متغيرات جديدة.
5. إضافة قيد او قيود جديدة.

#### 4-2. التغيرات في الطرف الأيمن للقيود (الموارد المتاحة):

لو فرضنا أن لدينا المشكلة الآتية:

$$\text{Max } Z = 30 X_1 + 50 X_2$$

S.t.

$$2 X_1 + X_2 \leq 16$$

$$X_1 + 2 X_2 \leq 11$$

$$X_1 + 3 X_2 \leq 15$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

وكان النتائج في جدول الحل الأخير كالتالي (يترك حل المشكلة كتمرين

للطالب):

B.V.	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	B
$S_1$	0	0	1/3	-5/3	1	2
$X_1$	1	0	2/3	-1/3	0	7
$X_2$	0	1	-1/3	2/3	0	2
Z	0	0	10/3	70/3	0	310

والحل الأمثل للمشكلة هو الآتي:-

$$X_1 = 7$$

$$X_2 = 2$$

$$S_1 = S_2 = 0$$

$$S_3 = 2$$

$$Z = 310$$

لو فرضنا ان الجانب الأيمن للمشكلة قد تغير من

$$\begin{bmatrix} 20 \\ 11 \\ 15 \end{bmatrix} \text{ إلى } \begin{bmatrix} 16 \\ 11 \\ 15 \end{bmatrix}$$

أي ان المورد الأول قد ازداد من 16 الى 20.

لدراسة تأثير هذا التغير على الحل الأمثل للمشكلة نقوم بالاتي:-

من الجدول الآخير الذي حصلنا منه على الحل الأمثل نأخذ المصفوفة تحت المتغيرات المكملة ويتم ضرب هذه المصفوفة في المتجه العمودي الجديد

لتحصل على:

$$\begin{bmatrix} S_3 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -5/3 & 1 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 11 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 20/3 - 55/3 + 15 \\ 40/3 - 11/3 + 0 \\ -20/3 + 22/3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 29/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

نلاحظ ان جميع قيم العمود الناتج موجبة ويعني ذلك ان الحل لا يزال ممكناً بالقيم الجديدة.

اما الحل الناتج فهو:

$$X_1 = 29/3 \quad X_2 = 2/3 \quad S_1 = S_2 = 0 \quad S_3 = 10/3$$

اما قيمة Z فتحصل عليها بالتعويض وكالاتي:

$$Z = 30(29/3) + 50(2/3) = 323.33$$

لواخذنا نتيجة الحل للنموذج المقابل من الجدول الآخير لل الحال تحصل على:

$$Y_1 = S_1 = 10/3 \quad Y_2 = S_2 = 70/3 \quad Y_3 = S_3 = 0 \quad Z = 310$$

يتبين لنا ان زيادة وحدة واحدة من المورد الأول تؤدي الى زيادة في دالة الهدف بمقدار 10/3 وان ذلك يتحقق في حالتنا هذه حيث ان المورد الأول قد

ازداد بمقدار 4 وحصلنا على الاتي:

لو فرضنا ان الجانب الأيمن للمشكلة قد تغير من

$$\begin{bmatrix} 20 \\ 11 \\ 15 \end{bmatrix} \text{ إلى } \begin{bmatrix} 16 \\ 11 \\ 15 \end{bmatrix}$$

أي ان المورد الأول قد ازداد من 16 الى 20.

لدراسة تأثير هذا التغير على الحل الأمثل للمشكلة نقوم بالاتي:-

من الجدول الآخير الذي حصلنا منه على الحل الأمثل نأخذ المصفوفة تحت المتغيرات المكملة ويتم ضرب هذه المصفوفة في المتجه العمودي الجديد

للحصل على:

$$\begin{bmatrix} S_3 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -5/3 & 1 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 11 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 20/3 - 55/3 + 15 \\ 40/3 - 11/3 + 0 \\ -20/3 + 22/3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 29/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

نلاحظ ان جميع قيم العمود الناتج موجبة ويعني ذلك ان الحل لا يزال ممكناً بالقيم الجديدة.

اما الحل الناتج فهو:

$$X_1 = 29/3 \quad X_2 = 2/3 \quad S_1 = S_2 = 0 \quad S_3 = 10/3$$

اما قيمة Z فنحصل عليها بالتعويض وكالاتي:

$$Z = 30(29/3) + 50(2/3) = 323.33$$

لواخذنا نتيجة الحل للنموذج المقابل من الجدول الآخير العتال نحصل على:

$$Y_1 = S_1 = 10/3 \quad Y_2 = S_2 = 70/3 \quad Y_3 = S_3 = 0 \quad Z = 310$$

يتبين لنا ان زيادة وحدة واحدة من المورد الأول تؤدي الى زيادة في دالة

المهدف بمقدار  $10/3$  وان ذلك يتحقق في حالتنا هذه حيث ان المورد الأول قد

ازداد بمقدار 4 وحصلنا على الاتي:

$$Z = (10/3)(4) + 310 = 323.33$$

كذلك فان زيادة وحدة واحدة في المورد الثاني تؤدي الى زيادة في دالة الهدف بمقدار 70/3. اما المورد الثالث فان أي زيادة فيه لا تتحقق زيادة في دالة الهدف.

ان الزيادة في أي مورد من الموارد المتاحة تكون محددة. اذ قد تؤدي الزيادة الكبيرة الى حل غير امثل. ولغرض تحديد مقدار الزيادة الممكنة لاي مورد وفي حالتنا هذه الزيادة الممكنة للمورد الأول نتبع الخطوات الآتية:-

نفرض ان مقدار الزيادة في المورد الأول هي  $B$  فان هذه الزيادة تتحقق اذا تحقق الاتي:

$$\begin{bmatrix} S_3 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & -5/3 & 1 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16+B \\ 11 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+B/3 \\ 7+2/3B \\ 2-B/3 \end{bmatrix}$$

ان الزيادة في المورد الأول بمقدار وحدة واحدة تؤدي الى زيادة في قيمة  $X_1$  بمقدار 2/3 وتقليل في قيمة  $X_2$  بمقدار 1/3. وعليه يجب التوقف عندما تصبح قيمة المتغير  $X_2$  مساوية الى الصفر وعدم السماح بان تصبح قيمتها سالبة لأن ذلك يؤدي الى حل غير ممكناً. لذلك يتم استخراج قيمة  $B$  من القيمة المقابلة لـ  $X_2$  بعد مساواتها الى صفر كما يلي:

$$2 - B/3 = 0$$

$$B = 6$$

أي ان اعلى زيادة في المورد الاول هي 6 لكي يبقى الحل ممكناً.

وعند تعويض قيمة  $B$  في قيم العمود الناتج نحصل على

$$S_3 = 2 + 6/3 = 4$$

$$X_1 = 7 + 6(2/3) = 11$$

$$X_2 = 2 - 6/3 = 0$$