

محاضرات في الاقتصاد القياسي /2

كلية الزراعة – جامعة الانبار

المرحلة الرابعة – اقتصاد زراعي

الفصل الربيعي

الاستاذ الدكتور مشعل عبد خلف الدليمي

المحاضرة الاولى (الانحدار الخطي المتعدد) أ.د. مشعل عبد خلف

بعد ان عرضنا في الاقتصاد القياسي /1 ، مراحل البحث القياسي المختلفة كيفية اعداد او صياغة النموذج القياسي وتقديره واختبار ثوابته في حالة نموذج الانحدار البسيط الخطي واللاخطي واهم الخصائص لمقدرات طريقة المربعات الصغرى والارتباط وتوسعنا في حالة الانحدار الخطي بمتغيرين مستقلين واحتساب معامل التحديد وتعديله للنموذج القياسي .

يتم التركيز في هذا الفصل الدراسي على توسيع نموذج الانحدار الخطي المتعدد ليشمل عدة متغيرات اي اكثر من متغيرين واحتساب ثوابت النموذج واختبارها _ وكيفية تحويل النموذج اللاخطي الى نموذج خطي وتقديره وتحليل التباين وعلاقته بتحليل الانحدار – واجراء الاختبارات المتعلقة باستقرارية ثوابت النموذج او تساويها في عينتين مختلفتين – واختبار صحة القيود المفروضة على ثوابت النموذج – واختبار تحسين جودة التوفيق بادخال متغيرات اضافية للنموذج – والتعريف بالمشاكل القياسية التي قد تواجه الباحث القياسي وطرق الكشف عنها وطرق معالجتها كالكشف عن مشكلة عدم تجانس التباين ومعالجتها ومشكلة الارتباط الذاتي ومشكلة الارتباط الخطي المتعدد

الانحدار الخطي المتعدد :-ان المتغيرات الاقتصادية التي تؤثر على متغير اقتصادي او ظاهرة اقتصادية في الغالب تكون متعددة ولا يمكن حصرها بمتغير مستقل واحد او متغيرين مستقلين ،وان نماذج الانحدار المتعدد في الغالب تكون هي السائدة وان الشكل العام لنموذج الانحدار الخطي المتعدد كما يأتي :-

$$Y_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i} + \dots + b_n x_{ni} + e_i$$

ويمكن ان تشتق المعادلات الطبيعية لهذا الانموذج على اساس طريقة المربعات الصغرى التي سميت بهذا الاسم كونها طريقة تقوم على تدنية مجموع مربعات الاخطاء العشوائية $\sum e_i^2$. وبذلك نحصل على عدد من المعادلات الطبيعية في حالة استخدام المشاهدات الاصلية للمتغيرات تساوي عدد المتغيرات المستقلة +1 اي تساوي عدد الثوابت في الانموذج ، اما في حالة استخدام طريقة الانحرافات فاننا سنحصل على عدد معادلات تساوي عدد المتغيرات المستقلة .وتكون خلاصة المعادلات الطبيعية في حالة استخدام المشاهدات الاصلية كما يأتي :

$$\sum y_i = nb_0 + b_1 \sum x_{1i} + b_2 \sum x_{2i} + b_3 \sum x_{3i} + \dots + b_k \sum x_{ki} \quad (1)$$

$$\sum y_i x_{1i} = b_0 \sum x_{1i} + b_1 \sum x_{1i}^2 + b_2 \sum x_{1i} x_{2i} + b_3 \sum x_{1i} x_{3i} + \dots + b_k \sum x_{1i} x_{ki} \quad (2)$$

$$\sum y_i x_{2i} = b_0 \sum x_{2i} + b_1 \sum x_{1i} x_{2i} + b_2 \sum x_{2i}^2 + b_3 \sum x_{2i} x_{3i} + \dots + b_k \sum x_{2i} x_{ki} \quad (3)$$

$$\sum y_i x_{3i} = b_0 \sum x_{3i} + b_1 \sum x_{1i} x_{3i} + b_2 \sum x_{2i} x_{3i} + b_3 \sum x_{3i}^2 + \dots + b_k \sum x_{3i} x_{ki} \quad (4)$$

----- -
 ----- -
 ----- -

$$\sum y_i x_{ki} = b_0 \sum x_{ki} + b_1 \sum x_{1i} x_{ki} + b_2 \sum x_{2i} x_{ki} + b_3 \sum x_{3i} x_{ki} + \dots + b_k \sum x_{ki}^2 \quad -(k+1)$$

وكما نلاحظ فقد اصبحت بين ايدينا عدد من المعادلات تساوي عدد المتغيرات المستقلة + 1 (k+1) ويمكن كتابة هذه

المعادلات بطريقة المصفوفات لتأخذ الشكل التالي

$$(X'Y) = B(X'X)$$

والتي تكون تركيبتها كما في ادناه

$$\begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_{1i} \\ \sum y_i x_{2i} \\ \sum y_i x_{3i} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \sum y_i x_{ki} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ b_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n & \sum x_{1i} & \sum x_{2i} & \sum x_{3i} & \dots & \sum x_{ki} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i} x_{2i} & \sum x_{1i} x_{3i} & \dots & \sum x_{1i} x_{ki} \\ \sum x_{2i} & \sum x_{1i} x_{2i} & \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i} x_{3i} & \dots & \sum x_{2i} x_{ki} \\ \sum x_{3i} & \sum x_{1i} x_{3i} & \sum x_{2i} x_{3i} & \sum x_{3i}^2 & \dots & \sum x_{3i} x_{ki} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_{ki} & \sum x_{1i} x_{ki} & \sum x_{2i} x_{ki} & \sum x_{3i} x_{ki} & \dots & \sum x_{ki}^2 \end{bmatrix}$$

ويمكن احتساب ثوابت الدالة من تلك المصفوفة حيث ان

$$B = (X'X)^{-1} (X'Y)$$

وبنفس الطريقة اذا استخدمت طريقة الانحرافات فان عدد المعادلات الطبيعية تصبح بقدر عدد المتغيرات المستقلة

$$\sum y_i x_{1i} = b_0 \sum x_{1i} + b_1 \sum x_{1i}^2 + b_2 \sum x_{1i} x_{2i} + b_3 \sum x_{1i} x_{3i} + \dots + b_k \sum x_{1i} x_{ki} \text{ ---(1)}$$

$$\sum y_i x_{2i} = b_0 \sum x_{2i} + b_1 \sum x_{1i} x_{2i} + b_2 \sum x_{2i}^2 + b_3 \sum x_{2i} x_{3i} + \dots + b_k \sum x_{2i} x_{ki} \text{ ---(2)}$$

$$\sum y_i x_{3i} = b_0 \sum x_{3i} + b_1 \sum x_{1i} x_{3i} + b_2 \sum x_{2i} x_{3i} + b_3 \sum x_{3i}^2 + \dots + b_k \sum x_{3i} x_{ki} \text{ ---(3)}$$

----- -
 ----- -
 ----- -

$$\sum y_i x_{ki} = b_0 \sum x_{ki} + b_1 \sum x_{1i} x_{ki} + b_2 \sum x_{2i} x_{ki} + b_3 \sum x_{3i} x_{ki} + \dots + b_k \sum x_{ki}^2 \text{ ---(k)}$$

$$\begin{bmatrix} \sum y_i x_{1i} \\ \sum y_i x_{2i} \\ \sum y_i x_{3i} \\ \dots \\ \sum y_i x_{ki} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i} x_{2i} & \sum x_{1i} x_{3i} & \dots & \sum x_{1i} x_{ki} \\ \sum x_{1i} x_{2i} & \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i} x_{3i} & & \sum x_{2i} x_{ki} \\ \sum x_{1i} x_{3i} & \sum x_{2i} x_{3i} & \sum x_{3i}^2 & \dots & \sum x_{3i} x_{ki} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_{1i} x_{ki} & \sum x_{2i} x_{ki} & \sum x_{3i} x_{ki} & \dots & \sum x_{ki}^2 \end{bmatrix}$$

علما بان جميع الرموز في المصفوفة اعلاه هي انحرافات

وهكذا تختبر الدالة ككل باحتساب قيمة F والتي تساوي حاصل قسمة مربعات الخطاء المفسرة Mst في جدول تحليل التباين على متوسط مربعات الخطاء Mse ويكون شكل جدول تحليل التباين كما يأتي

S.O.V	d.f	ss	ms	Fc	Ft	
					0.05	0.01
Regression	(k-1)	$Sst = \sum \hat{y}_i^2$	$Mst = sst / (k-1)$	Mst/mse	0.	
Error	(n-k)	$Sse = \sum e_i^2$	$Mse = sse / (n-k)$			
Total		$SsT = \sum y_i^2$				

وإذا كانت قيم Fc المحسوبة أكبر من قيمة Ft عند مستوى المعنوية 0.05 و 0.01 فإننا نستطيع القول بان الانموذج معنوي جدا وإذا كانت قيمة Fc أكبر من قيمة Ft عند مستوى معنوية 0.05 الا انها اصغر من نظيرتها عند مستوى معنوية 0.01 فإننا نقول بان الانموذج معنوي وكلمة الانموذج معنوي والانموذج معنوي جدا تعني بانه على الاقل احد ثوابت الانموذج يختلف عن الصفر اختلافا معنويا واختلافا معنويا جدا على التوالي.

اما إذا كانت قيمة Fc المحسوبة اقل من نظيرتها الجدولية عند مستوى معنوية 0.05 فان الانموذج غير معنوي اي ان جميع ثوابته لا تختلف عن الصفر .

علما بان $\sum y_i^2 = \sum (Y_i - \bar{y})^2$ وان $\sum \hat{y}_i^2 = b_1 \sum y_i x_{1i} + b_2 \sum y_i x_{2i} + b_3 \sum y_i x_{3i} + \dots + b_k \sum y_i x_{ki}$ وان $\sum e_i^2 = \sum y_i^2 - \sum \hat{y}_i^2$

علما بان القيم في المعادلتين هي تمثل مجموع انحرافات او مجموع حواصل ضرب الانحرافات

اما فيما يتعلق باختبارات ثوابت الدالة فيمكن انجازها باعتماد الخطوات التالية

1- احتساب تباين الاخطاء العشوائية $\sigma^2 u_i$ والذي يحسب بالصيغة التالية $\sigma^2 u_i = \frac{\sum e_i^2}{n-k}$

2- احتساب معكوس مصفوفة $(x'x)$ اي احتساب المصفوفة $(x'x)^{-1}$

3- ضرب المصفوفة الناتجة من الخطوة اعلاه بتباين الخطاء العشوائي للحصول على مصفوفه عنلصرها تمثل

تباينات الثوابت والتباينات المشتركة بين تلك الثوابت $Varb_1$

$$\Omega_b = (\sum e_i^2 / (n-k)) * (x' x)^{-1} = \begin{bmatrix} Varb_1 & cov(b_1, b_2) & cov(b_1, b_3) & \dots & cov(b_1, b_k) \\ cov(b_1, b_2) & Varb_2 & cov(b_2, b_3) & \dots & cov(b_2, b_k) \\ cov(b_1, b_2) & cov(b_1, b_2) & Varb_3 & \dots & cov(b_3, b_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ cov(b_1, b_2) & cov(b_1, b_2) & Varb_3 & \dots & cov(b_1, b_k) \end{bmatrix}$$

$$\text{cov}(b_1, b_2) \quad \text{cov}(b_1, b_2) \quad \text{cov}(b_1, b_3 \dots \text{Var}b_k)$$

4- يتم احتساب قيمة t لاختبار معنوية الثابت بقسمة قيمة الثابت على خطأه القياسي الذي يمثل الجذر التربيعي لتباين ذلك الثابت

$$sb_i = \sqrt{\text{var}b_i}$$

$$T = \frac{b_i}{sb_i}$$

5- وتقارن قيم t المحسوبة مع قيم t الجدولية فاذا كانت المحسوبة اكبر من الجدولية نقول بان الثابت معنوي اما اذ كانت المحسوبة اقل من نظيرتها الجدولية عند درجات حرية $(n-k)$ ومستوى المعنوية المطلوب الاختبار عنده نقول بان ذلك الثابت غير معنوي.

ويحتسب معامل التحديد R^2 على انه يساوي مجموع مربعات الانحرافات المفسرة مقسوم على مجموع مربعات الانحرافات الكلية المعرفة في جدول تحليل التباين وفي المعادلات اللاحقة له اما تعديل معامل التحديد فيكون ضروريا جدا ويحتسب معامل التحديد المعدل \bar{R}^2 والذي يحسب بالصيغة التالية

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \left(\frac{N-1}{N-K} \right)$$

المحاضرة الاولى (عملي قياسي 2) أ.د. مشعل عبد خلف

تمرين محلول :- البيانات التالية تمثل الكمية التي تطلبها الاسرة من لحوم الاغنام خلال الاسبوع Y_i وسعر لحوم الاغنام X_{1i} وسعر لحوم الدواجن X_{2i} ومعدل دخل الاسرة اليومي. المطلوب استخدام تلك البيانات لتقدير دالة طلب الاسرة على لحوم الاغنام كدالة بسعر لحوم الاغنام وسعر لحوم الدواجن ومعدل دخل الاسرة اليومي

المشاهدة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الكمية المطلوبة y_i	10	15	15	14	15	16	20	15	15	15
سعر لحم الاغنام X_{1i}	8	6	7	8	7	6	7	7	7	7
سعر لحم الدجاج X_{2i}	4	5	5	5	5	6	5	5	5	5
معدل دخل الاسرة X_{3i}	50	60	70	60	70	70	110	70	70	70

يمكن ان نستخرج متوسطات تلك البيانات وكما ياتي $\bar{y} = \sum Y_i/n = 150/10 = 15$ وهكذا لبقية المشاهدات $X_{1i} = 7$ وكذلك $X_{2i} = 5$ ونجد بان $X_{3i} = 70$ ونستخرج انحرافاتنا عن اوساطها الحسابية ومربعات انحرافاتنا وحواصل ضرب انحرافاتنا اي التغيرات المشتركة والجدول التالي يبين نتائج العمل، كل الرموز في الجدول ادناه هي انحرافات

Y_i	X_{1i}	X_{2i}	X_{3i}	Y_i^2	$Y_i X_{1i}$	$Y_i X_{2i}$	$Y_i X_{3i}$	X_{1i}^2	X_{2i}^2	X_{3i}^2	$X_{1i} X_{2i}$	$X_{1i} X_{3i}$	$X_{2i} X_{3i}$
-5	1	-1	-20	25	-5	5	100	1	1	400	-1	-20	20
0	-1	0	-10	0	0	0	0	1	0	100	0	10	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	1	0	-10	1	-1	0	10	1	0	100	0	-10	00
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-1	1	0	1	-1	1	0	1	1	0	-1	0	0
5	0	0	40	25	0	0	200	0	0	1600	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
المجموع \sum				52	-7	6	310	4	2	2200	-2	-20	20

ولما كانت المعادلات الطبيعية لاحتساب الثوابت التي يمكن ان يتم التعبير عنها بالمصفوفات التي تاخذ الشكل التالي

$$\begin{bmatrix} \sum y_i x_{1i} \\ \sum y_i x_{2i} \\ \sum y_i x_{3i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i} x_{2i} & \sum x_{1i} x_{3i} \\ \sum x_{1i} x_{2i} & \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i} x_{3i} \\ \sum x_{1i} x_{3i} & \sum x_{2i} x_{3i} & \sum x_{3i}^2 \end{bmatrix}$$

ويمكن التعويض عن الرموز بما يساويها في الجدول اعلاه لتصبح المعادلات كما في ادناه

$$\begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 310 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -20 \\ -2 & 2 & 20 \\ -20 & 20 & 2200 \end{bmatrix}$$

وان احتسلب الثوابت بطريقة المصفوفات كما اشرنا في الجزء النظري تحسب بالصيغة التالية

$$B = (X'X)^{-1} (X'Y)$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i} x_{2i} & \sum x_{1i} x_{3i} \\ \sum x_{1i} x_{2i} & \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i} x_{3i} \\ \sum x_{1i} x_{3i} & \sum x_{2i} x_{3i} & \sum x_{3i}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum y_i x_{1i} \\ \sum y_i x_{2i} \\ \sum y_i x_{3i} \end{bmatrix}$$

علما بان معكوس المصفوفة يمثل حاصل قسمة مصفوفة مرافقات عناصر المصفوفة على محدد تلك المصفوفة والتي تحسب بالصيغة التالية

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{(\Delta)} \text{ (adj. matrix)}$$

ويمكن احتساب المحدد (Δ) وكذلك مصفوفة المرافقات (adj. matrix)

بالطرق الرياضية التي تعلمناها سابقا والنتيجة كما في ادناه

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{(8000)} \begin{bmatrix} 4000 & 4000 & 0 \\ 4000 & 8400 & -40 \\ 0 & -40 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1.05 & -0.005 \\ 0 & -0.005 & 0.0005 \end{bmatrix}$$

وبضرب المصفوفة اعلاه بـ $(x' y)$ نحصل على قيم الثوابت

$$\begin{bmatrix} B1 \\ B2 \\ B3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1.05 & -0.005 \\ 0 & -0.005 & 0.0005 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 0.125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1.25 \\ 0.125 \end{bmatrix}$$

ويمكن احتساب ثابت التقاطع b_0 كما يأتي

$$B_0 = 15 - (-0.5) * 7 - 1.25 * 5 - 0.125 * 70 = 3.5$$

ونستطيع اتساب مجموع مربعات التغيرات المفسرة $\sum y^2 = b_1 * \sum y_i x_{1i} + b_2 * \sum y_i x_{2i} + b_3 * \sum y_i x_{3i} = 49.75$

وكذلك نستطيع اتساب مجموع مربعات البواقي

$$\sum e_i^2 = \sum y_i^2 - \sum \hat{y}_i^2 = 52 - 49.75 = 2.25$$

ومن المعلومات التي اصبحت لدينا نستطيع احتساب جدول تحليل التباين ونختبر معنوية الانموذج ككل وكذلك نستطيع احتساب معامل التحديد

s.o.v	df	ss	ms	Fc	Ft	
					0.05	0.01
Regr.	3	49.75	16.58			
Error	6	2.25	0.375	44.2	4.76	9.78
total	9	52				

ونلاحظ من الجدول بان قيمة F_c المحسوبة بلغت 44.2 وهي تزيد على نظيراتها عند مستوى معنوية 0.05 وكذلك عند مستوى معنوية 0.01 لذلك نستطيع القول بان النموذج معنوي جدا .

$$\bar{R} = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{49.75}{52} = 0.95$$

ولاحساب معامل التحديد

بقي علينا ان نجري الاختبارات الخاصة بثوابت النموذج B, s وهنا نحتاج لاحتساب مصفوفة التباينات والتباينات المشتركة للثوابت

والتي نحصل عليها من ضرب تباين الاخطاء العشوائية σ_{ui}^2 بمعكوس مصفوفة المعاملات $(x' x)^{-1}$

$$s_{ui}^2 = \frac{\sum ei^2}{n-k} = \frac{2.25}{6} = 0.375$$

$$b_i = 0.375 * \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1.05 & -0.005 \\ 0 & -0.005 & 0.0005 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1875 & 0.1875 & 0 \\ 0.1875 & 0.39375 & -0.001875 \\ 0 & -0.001875 & 0.0001875 \end{bmatrix}$$

ومن المصفوفة اعلاه حيث ان القطر الرئيسي للمصفوفة يعبر عن تباينات الاخطاء العشوائية بينما تمثل القيم الاخرى بحسب مواقعها التباينات المشتركة بين تلك الثوابت وكما تم عرضه في محاضرة النظري لذلك نلاحظ $\text{var } b_1 = 0.1875$, $\text{var } b_2 = 0.39375$, $\text{var } b_3 = 0.0001875$

ولما كانت الاخطاء القياسية لاي ثابت تمثل جذر تباينه لذلك فان $Sb_1=0.433$, $Sb_2 = 0.627$, $Sb_3 = 0.0137$

وبذلك اصبح بالامكان احتساب قيمة t لكل ثابت بقسمة قيمة الثابت على خطاه القياسي , $t_{b_1} = 1.16$, $t_{b_2} = 1.99$, $t_{b_3} = 9.12$

وبقارنة قيم t اعلاه مع قيم t الجدولية بدرجات حرية $n-k=6$ نلاحظ بان تأثير سعر لحم الاغنام لم يكن معنويا بينما كان تأثير سعر الدجاج معنوي وتأثير دخل الاسرة اليومي له تأثير معنوي جدا على الكمية المطلوبة من لحوم الاغنام .