المحاضرة الحادية عشر قياسي ١

تقدير ثوابت نموذج خطي بدون ثابت تقاطع

تقدير ثوابت النموذج باكثر من متغير مستقل بحدود ثقة

تقدير ثوابت نموذج خطي بدون ثابت تقاطع :- قد يكون لدى الباحث فكرة عن ان خط الانحدار يبداء من نقطة الاصل اي لا يوجد ثابت تقاطع في هذا النموذج اي ان شكل النموذج الاساسي في حالة متغير مستقل واحد هو

$$Y_i = b_1 X_i + e_i$$

وفي هذه الحالة ستكون لدينا بالطريقة المباشرة او بطريقة الانحرافات معادلة واحدة نحصل عليها من اشتقاق المعادلة ادناه بالنسبة لثابت الميل وكما يلي

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - b_1 X_I)^2$$

$$\frac{d\sum e_i^2}{db_1} = 2\sum (Y_i - b_1 X_I) * (-X_i) = 0.0$$

$$\sum Y_i X_i = b_1 \sum X_i^2$$

ومنها نجد ان

$$b_1 = \frac{\sum Y_i X_i}{\sum X_i^2}$$

وفي حالة المتغيرين المستقلة يكون شكل النموذج بدون ثابت تقاطع كما يلي

$$Y_i = b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i} + e_i$$

ومنها نحصل بالطريقة المباشرة على

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - b_1 X_{1i} - b_1 X_{2i})^2$$

$$\frac{d\sum e_i^2}{db_1} = 2\sum (Y_i - b_1X_{1i} - b_1X_{2i}) * (-X_{1i}) = 0.0$$

$$\sum Y_iX_{1i} = b_1\sum X_{1i}^2 + b_2\sum X_{1i}X_{2i} - - - - - - -(1)$$

$$\frac{d\sum e_i^2}{db_1} = 2\sum (Y_i - b_1X_{1i} - b_1X_{2i}) * (-X_{2i}) = 0.0$$

$$\sum Y_iX_{2i} = b_1\sum X_{1i}X_{2i} + b_2\sum X_{2i}^2 - - - - - - -(2)$$

ويمكن كتابتها بطريقة المصفوفات وكما في ادناه

$$\begin{bmatrix}\sum Y_iX_{1i}\\ \sum Y_iX_{2i}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}\sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i}\\ \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2\end{bmatrix}$$

ويمكن ان نلاحظ بان قيم الثوابت ستصبح كما يلي

$$b_1 = \frac{\begin{bmatrix}\sum Y_iX_{1i} & \sum X_{1i}X_{2i}\\ \sum Y_iX_{2i} & \sum X_{2i}^2\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}\sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i}\\ \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2\end{bmatrix}}$$

$$b_2 = \frac{\begin{bmatrix}\sum X_{1i}^2 & \sum Y_iX_{1i}\\ \sum X_{1i}X_{2i} & \sum Y_iX_{2i}\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}\sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i}\\ \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2\end{bmatrix}}$$

مثال:- البيانات التالية تمثل انتاج مزارع من القمح بحسب المساحة وعدد العمال علما بان دالة الانتاج المراد تقديرها يجب ان تكون بدون ثابت تقاطع اي عندما تكون عوامل الانتاج صفر فان الانتاج سيكون صفر ايضا

المزرعة	الانتاج بالطن	المساحة	عدد العمال	Yx1	Yx2	X1x2	X12	X22
١	550	600	40	330000	22000	24000	360000	1600
٢	250	300	30	75000	7500	9000	90000	900
٣	890	1000	50	890000	44500	50000	1000000	2500
٤	1500	2000	60	3000000	90000	120000	4000000	3600
٥	70	70	6	4900	420	420	4900	36
٦	125	120	12	15000	1500	1440	14400	144
٧	600	650	62	390000	37200	40300	422500	3844
مجموع	3985	4740	260	4704900	203120	245160	5891800	12624

ويمكن كتابة مصفوفة المعادلات الطبيعية المشتقة اعلاه بالتعويض عن عناصر المصفوفة بما يساويها في الجدول اعلاه لتصبح كما في ادناه.

$$\begin{bmatrix}4704900\\203120\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}5891800 & 245160\\245160 & 12624\end{bmatrix}$$

$$b_1 = \frac{\begin{bmatrix}4704900 & 245160\\203120 & 12624\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}5891800 & 245160\\245160 & 12624\end{bmatrix}} = \frac{59394657600-49796899200}{74378083200-60103425600} = \frac{9579758400}{14274657600} = 0.672$$

$$b_2 = \frac{\begin{bmatrix}5891800 & 4704900\\245160 & 203120\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}5891800 & 245160\\245160 & 12624\end{bmatrix}} = \frac{1196742416000-1153453284000}{74378083200-60103425600} = \frac{43289132000}{14274657600} = 3.03$$

واذا قدرنا الدالة بدون ثابت تقاطع كانت النتيجة كما في ادناه

$$\boldsymbol{Y_i = 0.672\, X_{1i} + 3.003\, X_{2i} + e_i}$$

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	x1	.672	.038	.839	17.609	.000
	x2	3.033	.825	.175	3.676	.014

a. Dependent Variable: y

b. Linear Regression through the Origin

اذا كنا بصدد تقدير الانتاج كدالة

بسيطة باحد عوامل الانتاج

$$b_1 = \frac{\sum Y_i X_i}{\sum X_i^2}$$

واذا اردنا تقدير
الانتاج كدالة بالمساحة فقط مرة وكدالة بالعمل فقط مرة اخرى فان نتائج التقدير كما يلي

$$b_1 = \frac{\sum Y_i X_i}{\sum X_i^2} = \frac{4704900}{5891800} = 0.799$$

Coefficients[a,b]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	x1	.799	.029	.996	27.175	.000

a. Dependent Variable: y

b. Linear Regression through the Origin

1- باعتبار الانتاج دالة بالمساحة
2- اما اذا اردنا تقديره كدالة بالعمل فقط

$$b_1 = \frac{\sum Y_i X_i}{\sum X_i^2} = \frac{203120}{12624} = 16.1$$

اما خطاه القياسي فيحسب بالصيغة التالية بعد استخراج مجموع مربعات الاخطاء العشوائية من معادلة الانحدار الخاصة بها لليحسب الخطاء القياسي للثابت بالصيغة التالية.

$$S_b = \sqrt{\frac{\sum e_{1i}^2}{n-k} * \frac{1}{\sum X_i^2}}$$

Coefficients[a,b]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	x2	16.090	2.619	.929	6.144	.001

ويمكن ان نلاحظ بان ثوابت الدالة معنوية جدا حسب اختبار

t

اما اذا كان التقدير بظل عدم افتراض كون ثابت التقاطع صفر فان نتيجة التقدير ستكون المعادلة التالية

وان ثوابت الدالة لم تكن معنوية

وخاصة ثابت التقاطع ومعامل العمل

$$Y_i = 6.103 + 0.674\,X_{1i} + 2.874\,X_{2i} + e_i$$

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	6.103	36.211		.169	.874
	x1	.674	.044	.896	15.432	.000
	x2	2.874	1.313	.127	2.189	.094

a. Dependent Variable: y

تقدير الثوابت بحدود ثقة :- ان تقدير اي ثابت بحدود ثقة نحصل عليه من اضافة وطرح حاصل ضرب الخطاء القياسي للثابت بقيمة t المراد التقدير عند مستوى الثقة المناسب لها اي عند قيمة لـ t بمستوى معنوية ٥% اذا كنا بصدد تقدير حدود ثقة ٩٥% او عند مستوى معنوية ١% اذا كنا بصدد تقدير بحدود ثقة ٩٩%

$$L_1 = B_i - Sb_1 * t_{a,d.f} \text{ الحدالادنى}$$

$$L_2 = B_i + Sb_1 * t_{a,d.f}$$ الحدالاعلى

علما بان الخطاء القياسي يستخرج بنفس الطريقة السابقة حيث يمكن ان نستخرج قيمة الاخطاء العشوائية ثم مربعاتها للحصول على مجموع مربعات الخطاء العشوائي $\sum e_i^2$

وبالعودة الى المعادلة المقدرة بدون ثابت تقاطع والتي كانت

$$Y_i = 0.672\, X_{1i} + 3.003\, X_{2i} + e_i$$

يمكن استخراج الاخطاء العشوائية ومربعاتها من البيانات الاصلية

مره للمعادلة المقدرة باعتبار الانتاج دالة بكل من المساحة والعمل e_i^2 ومرة باعتبار الانتاج دالة فقط بالمساحة ومربعاتها e_{1i}^2 واخرى للدالة التي قدرت باعتبار الانتاج دالة في العمل فقط ومربعاتها هي e_{2i}^2 ونتائجها كما في الجدول ادناه

e_{2i}^2	e_{1i}^2	e_i^2	e_i	عدد العمال	المساحة	الانتاج بالطن	المزرعة
8760.96	4984.36	655.36	25.60	40	600	550	١
54149.29	106.09	1806.25	-42.50-	30	300	250	٢
7310.25	8281.00	4422.25	66.50	50	1000	890	٣
285797.16	9604.00	665.64	-25.80-	60	2000	1500	٤
704.37	197.96	22.85	4.78	6	70	70	٥
4634.89	847.97	64.00	8.00	12	120	125	٦
158069.86	6504.42	608.12	-24.66-	62	650	600	٧
519427	30526	8244.5		260	4740	3985	مجموع

ويمكن ان تحتسب الاخطاء القياسية في حالة الانحدار الخطي البسيط بدون ثابت تقاطع لمادلة الانتاج كدالة بالمساحة مرة ولدالة الانتاج كدالة بالعمل مرة اخرى وكما في ادناه

١- في حالة الانتاج دالة بالمساحة ويمكن اختبارمعنويته بقسمة الثابت على قيمة الخطاء لاحتساب قيمة t ومقارنتها بالجدولية عند مستوى المعنوية المطلوب ودرجات حرية n-k=7-1=6

$$\boldsymbol{S_b = \sqrt{\frac{\sum e_{1i}^2}{n-k} * \frac{1}{\sum X_i^2}} = \sqrt{\frac{30526}{6} * \frac{1}{5891800}} = 0.029}$$

$$t_b = \frac{b}{Sb} = \frac{0.799}{0.029} = 27.5$$

بما ان قيمة المحسوبة اكبر من الجدولية بمستوى معنوية ١% والبالغة ٣.٧٠٧ نقول بان للمساحة تاثير معنوي جدا على الانتاج
وبنفس الطريقة يمكن احتساب الخطاء القياسي للثابت في حالة الانحدار البسيط بدون ثابت تقاطع لدالة الانتاج كدالة بالعمل وكما في ادناه

$$S_b = \sqrt{\frac{\sum e_{1i}^2}{n-k} * \frac{1}{\sum X_i^2}} = \sqrt{\frac{519427}{6} * \frac{1}{12624}} = 2.62$$

$$t_b = \frac{b}{Sb} = \frac{16.09}{2.62} = 6.41$$

ويمكن القول بان العمل لوحده له تاثير معنوي جدا على الانتاج

اما اذا كنا بصدد تقدير الاخطاء القياسية لثوابت الدالة التي بها اعتبر الانتاج دالة بكل من المساحة والعمل فان الخطاء القياسي للثابت الاول هو

$$Sb_1 = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-k} * \frac{12624}{\begin{vmatrix} 5891800 & 245160 \\ 245160 & 12624 \end{vmatrix}}} = \sqrt{\frac{8244.5}{5} * \frac{12624}{14274657600}} = 0.038$$

$$Sb_2 = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-k} * \frac{5891800}{\begin{vmatrix} 5891800 & 245160 \\ 245160 & 12624 \end{vmatrix}}} = \sqrt{\frac{8244.5}{5} * \frac{5891800}{14274657600}} = 0.82$$

علما بان قيم t عند درجات حرية ٥ ومستوى معنوية ٥% هي ٢.٥٧١

وبذلك فان تقدير الثوابت بحدود ثقة ٩٥% تحسب كما في ادناه لثابت المساحة

$$L_1 = B_i - Sb_1 * t_{a,d.f} = 0.672 - 0.038 * 2.571 = 0.574 \text{ الحدالادنى}$$

$$L_2 = B_i + Sb_1 * t_{a,d.f} = 0.672 + 0.038 * 2.571 = 0.77 \text{ الحدالاعلى}$$

اما لثابت العمل فان قيمة معامله بمستوى ثقة ٩٥% تتراوح بين حد ادنى والعلى كما في ادناه

$$L_1 = B_i - Sb_1 * t_{a,d.f} = 3.03 - 0.82 * 2.571 = 0.92 \text{ الحدالادنى}$$

$$L_2 = B_i + Sb_1 * t_{a,d.f} = 3.03 + 0.82 * 2.571 = 5.13 \text{ الحدالاعلى}$$

وبنفس الطريقة تقدر حدود الثقة بمستوى معنوية ٩٩% اذ ان قيمة t عند درجة حرية ٥ ومستوى معنوية ١% هي ٤.٠٣٢ اذ ستتغير فقط قيمة t بالمعادلات اعلاه

$$L_1 = B_i - Sb_1 * t_{a,d.f} = 0.672 - 0.038 * 4.032 = 0.52 \text{ الحدالادنى}$$

$$L_2 = B_i + Sb_1 * t_{a,d.f} = 0.672 + 0.038 * 4.032 = 0.82 \text{ الحدالاعلى}$$

ولثابت العمل تصبح حدود المعامل بمستوى ثقة ٩٩% كما يلي

$$L_1 = B_i - Sb_1 * t_{a,d.f} = 3.03 - 0.82 * 4.032 = -0.27 \text{ الحدالادنى}$$

$$L_2 = B_i + Sb_1 * t_{a,d.f} = 3.03 + 0.82 * 4.032 = 6.33 \text{ الحدالاعلى}$$

المصادر :-

١- عطوة ، محمد محمود ،الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق ،جامعة المنصورة ، ٢٠٠٣

٢- شيخي ، محمد ، طرق الاقتصاد القياسي ، الطبعة الاولى ، ٢٠١١

٣- عبد القادر، عبد القادر محمد ، الحديث في الاقتصاد القياسي ،٢٠٠٤

٤- د.جوجارات ،ترجمة هند عبد الغفار ، الاقتصاد القياسي ، الرياض ، ٢٠١٥

٥- A.Koutsoyiannis ,Theory of Econometrics , second edition ,ELBS,1977