المحاضرة الاولى

❖ مقدمة عن المنطق

المنطق هو العلم الذي يبحث في القواعد التي تتبع في التفكير وطرق الاستدلال الصحيح وهو بذلك أداة للتفكير لأنه يعنى بتحليل طرق التفكير وصيانته من الخطأ. والعملية المنطقية تهتم بفئة من الصيغ أو القضايا.

❖ القضية

جملة تقوم على علاقة بين عدد من الكلمات المفهومة، وتنقسم إلى قسمين:

- القضية الإخبارية: وهي تخبر عن شيء ما وتحتمل الصدق أو الكذب مثل (المثلثات المتطابقة متكافئة)، (كل ما في الكون يجذب بعضه بعضا).
- القضية الإنشائية: وهي التي لا يمكن أن توصف بالصدق أو الكذب مثل لا تمش في الأرض مرحا وهي ليست قضايا منطقية.

والقضية المنطقية جملة خبرية تحتمل الصدق أو الكذب ويمكن التحقق منها فالجملة *المعادن تتمدد بالحرارة* جملة خبرية يمكن التحقق من صحتها بإجراء التجارب وإقرار صحة العبارة من عدمه.

والقضية مفهوم أساسي في المنطق نتعلم تصنيفها كما ورد سابقا عن طريق الخبرة مثل:

١. ينزل المطر في الخريف. (خبرية)

٢. كيف حالك؟ (إنشائية)

وما دمنا سنتحدث كثيرا عن الصدق والخطأ سنرمز لهما بالحرفين (T) و (F). ومن ذلك كله نقول أن القضية المنطقية تحتمل الصدق أو الكذب.

❖ القضايا المركبة

تسمى كل من الحروف الآتية بأدوات الربط: (و) $=\Lambda$ ،　(أو) $= V$ ،　(لا النافية) = ~

ويمكن أن نوضح ونبين قضايا جديدة من فئة معطاة من القضايا بواسطة أدوات الربط فمثلا إذا كانت القضية (محمد طالب مجتهد) يرمز لها بالرمز (A) فإن القضية (~A)تشير إلى أن محمد ليس مجتهدا.

(A) : تعني محمد مجتهد

(B) : تعني محمد طالب خلوق فإن:

(A ∧ B) قضية تعني: محمد طالب مجتهد و محمد طالب خلوق.

والقضية (A∨B) تعني محمد طالب مجتهد أو محمد طالب خلوق.

إن دراسة الفئات ذات فائدة كبيرة في كافة فروع الرياضيات وسوف نرى الآن تطبيقات هذه الدراسة في البراهين المنطقية وسوف نبدأ بملاحظة مدى فائدة قوانين الفئات وفائدة اشكال فن في تحليل البرهان أو تتبع خطوات مناقشة ونتبع ما يلي:

كل مربع مستطيل ..... (١)

كل مستطيل متوازي أضلاع.... (٢)

كل مربع متوازي أضلاع...... (٣)

الصيغتان ١، ٢ تسميان مقدمتان أو فروضا والصيغة ٣ تسمى نتيجة وهذا مثال بسيط يتضح منه انه إذا كانت النتيجة تتبع بالضرورة المقدمات المعطاة فنقول عندئذٍ إن المناقشة صالحة.

وباختصار شديد نقول إن المناقشة ١، ٢، ٣ لها القيمة (T) (أي صادقة) ومثل هذه المناقشة يمكن أن توضح بأشكال فن حيث:

تشير إلى فئة كل المربعات A

تشير إلى فئة كل المستطيلات B تشير إلى فئة كل متوازيات الأضلاع C

A وهي مجموعة جزئية من B مجموعة جزئية من C وكثيرا ما نصادف مناقشة صالحة وتكون النتيجة غير صالحة مثل:

- حلب في محافظة الجيزة
- محافظة الجيزة في مصر
- إذن حلب في مصر

هذه المناقشة صالحة ولكن النتيجة غير صادقة كون الفرض الأول غير صحيح. وقد تكون الفرضيتان غير صحيحتين والنتيجة صادقة مثل: ١ = ٧ غير صحيح ٩ = ٣ غير صحيح وبجمع المعادلتين يكن الناتج ١٠ = ١٠ وهي نتيجة صحيحة. وفي الرياضيات نستخدم هذا النوع من المناقشات للوصول إلى صحة بعض النظريات، خذ مثلا طريقة إثبات أن

المماس للدائرة يكون عموديا على نصــف القطر المار بنقطة التماس، فنحن نبدأ البرهان بفرض أن المماس ليس عموديا على نصــف القطر وبالســير بالمناقشــة الصــحيحة نأتي إلى أن المماس يقطع الدائرة في نقطتين وبما أن النتيجة تتعارض مع تعريف المماس ، ينتج أن الفرض الأسـاسـي ليس صـحيحا ويكون المماس عموديا على نصـف القطر المار بنقطة التماس.

➢ عناصر المنطق

١. جملة

الجملة في مجموعة حروف ورموز لها معنى، مثال:

- $2+3=5$
- $5*9=45$

من الممكن دراسة هذه العبارات من وجهات نظر مختلفة، مثلا المتغيرات تأخذ قيما متعددة نرمز لها عادة بــ" X "، أو " س " بالعربية. كما يمكن دراسة صحة أو خطأ العبارة.

٢. عبارة

تصبح إذا أمكن معرفة صحة أو خطأ العبارة نسمي عبارة كل نص رياضي له معنى ويكون إما صحيحا وإما خاطئا أما الدالة العبرية (خاصية لمتغير) فهي كل نص رياضي له معنى ويحتوي على متغير ويصبح عبارة كلما عوضنا المتغير بقيمة معينة

جّمل منطقية [الجمل الفعلية مفيدة] يمكن الحكم عليها بالصح أو الخطأ وليس كلاهما القضية المنطقية {تعريف} هي جملة خبرية مفيدة يحتمل معناها الصواب أو الخطأ وليس كلاهما من أمثلة الجمل التي تكون قضايا

١. $2+3=5$
٢. صنعاء عاصمة اليمن
٣. مجموع زوايا المثلث ١٨٠ $^\circ$

ليس من الضرـوري أن تكون الجملة صــحيحة جّمل ليســت منطقية [الجمل الاســمية] والتي لا يمكن الحكم عليها بالصـح أو الخطأ من أمثلة الجمل التي لا تكون قضـايا الجمل التي تبدأ اسـتفهام – سـؤال – تعجب – نداء – طلب... بصورة عامة كل الجمل التي لا يمكن الحكم عليها بالصح أو الخطأ مثل:

١. ما أجمل السماء!
٢. كم الساعة؟

المحاضرة الثانية

MATHEMATICAL LOGIC

المنطق الرياضي

المنطق Logic

هو تحليل طرق التعليل Analysis وهو يهتم بصور الفكر لا بمادته، أما المنطق الرياضي فهو فرع من فروع الرياضيات ويهتم بدراسة إشكال التحليلات التي يتعامل بها الرياضيون.

المجموعة Set

لا يوجد تعريف محدد للمجموعة فقد تعني أسرة أو تجمع أو جملة أو فصلية.

طرق التعبير عن المجموعات:

١- الطريقة الجدولية Tabulation Method

في هذه الطريقة تكتب عناصر المجموعة بين قوسين معقوفين تفصل بينهما الفوارز.

أمثلة: -

1- {4, 5, 6, 7}

2- {......-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3,.....}

٢- طريقة القاعدة Rule Method

في هذه الطريقة تذكر **الصفة المميزة** (تذكر الصفة التي **تشترك بها عناصر المجموعة.)**

مثال :- اكتب المجموعة في المثال السابق بطريقة الصفة المميزة.

{ x : 4 ≤ x ≤ 7, عدد طبيعي x}

المجموعة الخالية Empty Set

هي المجموعة التي لا تحوي على أي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ.

أمثلة: -

١- $\{x$ عدد طبيعي $, 1<x<2 : x\}= \phi$

٢- $\{2,5,6\} \neq \phi$

ملاحظة نستخدم الحروف الكبيرة للدلالة على المجموعات $A,B,C,......$ والحروف الصغيرة $a,b,c,.......$ للدلالة على العناصر.

الانتماء Membership

لتكن A مجموعة وليكن x عنصرا في المجموعة A يقال أن x ينتمي الى المجموعة A وتكتب $x \in A$ وبخلاف ذلك يقال أن العنصر x لا ينتمي الى المجموعة A ويكتب $x \notin A$.

أمثلة : -

1- $2 \in \{2, 5, 7\}$

2- $6 \notin \{1, 2, 3\}$

المجموعة الجزئية Subset

لتكن كل من A,B مجموعة فيقال إن A مجموعة جزئية من B إذا وفقط إذا كان كل عنصر في المجموعة A ينتمي إلى المجموعة B ويعبر عن ذلك بالرمز $A \subseteq B$ ويقال إن A محتوى في B

لاحظ أن $A \not\subset B$ تعني أن A ليست مجموعة جزئية من B .

مثال: -

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \qquad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A \subseteq A \;, \qquad A \subseteq B$$

المجموعة الجزئية الفعلية Proper subset

لتكن كل من A,B مجموعة فيقال إن A مجموعة جزئية فعلية من B إذا وفقط إذا:

١- A مجموعة جزئية من B

٢- يوجد على الأقل عنصر واحد في B غير موجود في A ويعبر عن ذلك بالرمز $A \subset B$

ملاحظة

$A \subset B$ تعني $B \supset A$

$A \not\subset B$ تعني إن A ليست مجموعة فعلية من B

أمثلة

$N \subset R$, حيث N مجموعة الأعداد الطبيعية و R مجموعة الأعداد الحقيقية

$\{-1, 0, 2\} \not\subset N$

المجموعة الشاملة Universal set

أذا كانت جميع المجموعات قيد البحث مجموعات جزئية من مجموعة ثابتة فأن هذه المجموعة الثابتة تسمى مجموعة شاملة (سنستخدم الرمز U للدلالة على المجموعة الشاملة)

مثال: حدد المجموعة الشاملة من المجموعات الآتية

$A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,4,5\}$, $C=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

الحل

$A \subseteq C \quad , \quad B \subseteq C$

$\therefore$ **المجموعة الشاملة هي** C

تعريف

يقال للمجموعتين A,B أنهما متساويتان أذا كانت $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$

العبارة Statement

هي جملة خبرية وتكون إما صادقة وإما كاذبة (**لا يجوز إن تكون كاذبة و صادقة معا**) و سوف نرمز للعبارات بالرمز **(p,q)**.

يقرن مع العبارة الصادقة (T) ومع **العبارة الكاذبة (F)**

أمثلة

بغداد عاصمة العراق **(T)**

$7 = 3+5$ **(F)**

لا تلعب بالنار. جملة خبرية

إلى أين تذهب؟ جملة استفهامية

$X+1=5$ ليست عبارة

إذا كانت $f(x) = \sin(x)$ فأن: $f'(x) = \cos(x)$ **(T)**

المحاضرة الثالثة

النفي والعبارات المركبة

النفي Negative

لتكن (p) **عبارة** فان العبارة **(ليست p)** تسمى نفي **(p)** ويرمز لها بالرمز (~p)

مثال :لتكن العبارة الرياضيات لغة العلم فان نفي العبارة تكون :ليست الرياضيات لغة العلم.

AXIOM OF NEGATION

النفي يحقق البديهية الأساسية التالية:

إذا كانت العبارة **(p)** صادقة فان **(~p)** تكون عبارة كاذبة والعكس بالعكس.

جدول الصدق Truth Table

لتوضيح العلاقة بين العبارة ونفيها نستخدم ما يسمى بجدول الصدق حيث نكتب **(p)**، **(~p)** ونضع **(p)** تحت قيم صدقها صادقة **(T)** كاذبة **(F)**

(p)	(~p)
T	F
F	T

امثلة

لتكن العبارة $a = b$ فيكون نفي العبارة $a \neq b$

$\sim (a \notin A)$ تكون $(a \in A)$

COMPOUND STATEMENTS العبارات المركبة

من الممكن ربط عبارتين أو أكثر بإحدى أدوات الربط **connective** بالعبارات التالية (و), (أو)، (إذا كان :فأن) ، (إذا وفقط إذا...) الخ. فالناتج من عملية الربط يكون عبارة تسـمى **عبارة مركبة** ويطلق على العبارات الأصلية اسم مكوناتها

1.الوصل (and) conjunction

لتكن كل من (p, q) عبارة (العبارة المركبة (p, q)) تكون **صــادقة فقط** في الحالة (p, q) **صــادقة** ويرمز لها بالرمز **$(p\wedge q)$** ويسمى وصل وتقرأ (q و p).

والجدول التالي يوضح ذلك: -

p	q	$p\wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

امثلة

1-العبارة $p:(5+3=6)$ (F)

$q:(4+4=8)$ (T)

فعليه تكون العبارة المركبة $q\wedge p$ = (F) أي إن العبارة هي عبارة كاذبة

$q:(4+4=8)\ (T) \wedge p:(5+3=6)\ (F) = (F)$

2- الخوارزمي عالم عربي هي عبارة صادقة (T)

3- ارخميدس عالم إغريقي هي عبارة صادقة (T)

(ارخميدس عالم إغريقي) T ∧ (الخوارزمي عالم عربي) T هي عبارة صادقة (T)

٢- الفصل Disjunction

لتكن كل من (p ,q) عبارة فالعبارة (p ,q) تكون صــادقة إذا كانت واحدة على الأقل من مكوناتها صادقة و نرمز لها بالرمز $(p \vee q)$ و نسميها فصل (p او q) والجدول التالي يوضح ذلك

p	q	$(p \vee q)$
T	T	T

T	F	T
F	T	T
F	F	F

أمثلة

١. العبارة (p) (البصرة شمال العراق) كاذبة F و العبارة (q) (الموصل جنوب العراق) كاذبة F فعليه (p V q) تكون كاذبة F
إي أن (البصرة شمال العراق) أو (الموصل جنوب العراق) تكون عبارة كاذبة.

٢. (الموصل شمال العراق) أو (البصرة جنوب العراق) هي عبارة صادقة.

ملاحظة

إذا كانت (p) عبارة ما فان العبارة $(p\vee\sim p)$ تكون دائما صـادقة و $(p\wedge\sim p)$ تكون كاذبة دائما.

p	~p	$(p\vee\sim p)$	$(p\wedge\sim p)$
T	F	T	F
F	T	T	F

٣- الشتراط Conditional

لتكن كل من (p ,q) عبارة سـنرمز للعبارة المركبة (إذا كانت p فأن q تؤدي الى) بالرمز $(p\rightarrow q)$ ونسـميها عبارة شرطية و تسـمى (p) المقدمة أو الفرض Hypothesis or Antecedent و تسمى (q) النتيجة Consequent or Conclusion

بديهية الاشـتراط: - العبارة المركبة $(p \to q)$ تكون **صـادقة دائما** ما عدا في حالة وهي عندما تكون (p) **صادقة و** (q) **كاذبة**.

جدول الصدق: - جدول الصدق التالي يوضح بديهية الاشتراط

p	q	(p→q)
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

أمثلة:

١. إذا كانت البصرة عاصمة العراق فان دمشق عاصمة سورية

F→T=T

٢. إذا كانت (2=3) فان $(\sqrt{9} = 5)$

F→F=T

٣. إذا كان $(\sqrt{x^2} = |x|)$ و (5+2=8)

T →F= F

ملاحظة: - لاحظ إن العبـارة المركبـة $(p \to q)$ تختلف عن $(q \to p)$ كما موضـح في الجدول التالي:

p	q	(p→q)	(q→p)
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

٤- العبارات ثنائية الاشتراط Bi-conditional statements

لتكن كل من (p ,q) عبارة سنرمز للعبارة المركبة (اذا و فقط اذا) بالرمز ($\leftrightarrow$) ونسميها عبارة ثنائية الاشتراط (شرطية ثنائية) والجدول التالي يوضح ذلك: -

p	q	($p\leftrightarrow q$)
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

ملاحظة

العبارة المركبة ($p\leftrightarrow q$) تعني q (إذا وفقط إذا) p وهذه بدورها تعني (q إذا p) و (q فقط p) أي ($q\rightarrow p$) $\wedge$ ($p\leftrightarrow q$) والجدول التالي يوضح ذلك

p	q	($p\rightarrow q$)	($q\rightarrow p$)	($p\leftrightarrow q$) $\wedge$ ($q\rightarrow p$)
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

المحاضرة الرابعة

١- التكافؤ المنطقي Logical equivalence

لتكن كل من (p, q) عبارة يقال بان العبارة (R) تكافئ العبارة (S) منطقيا إذا وفقط إذا كان جدول الصدق (R) هو نفسه جدول الصدق (S) ويرمز له ($R \equiv S$)

لتكن: $R: p \rightarrow q$ ، $S: \sim p \vee q$ فأن: $R \equiv S$

والجدول التالي يوضح ذلك:

p	q	~p	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

ملاحظات

١- $p \equiv p$

٢- $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv (p \leftrightarrow q)$

٣- لأي عبارة p

- $p \equiv p \vee p$
- $p \equiv p \wedge p$

p	$p \vee p$	$p \wedge p$
T	T	T
F	F	F

٢- التتولوجي Tautology

التتولوجي (تحصيل حاصل) إذا كانت العبارة صادقة بغض النظر عن قيم صدق مكوناتها ان كانت صادقة او كاذبة فتسمى (تحصيل حاصل).

مثال :العبارة $(p\vee\sim p)$ تكون دوما صادقة اذن هي تحصيل حاصل كما موضح بالجدول ادناه:

p	$\sim p$	$p\vee\sim p$
T	F	T
F	T	T

ملاحظة: لتكن كل من (R,S) فان $R\equiv S$ إذا وفقط إذا كانت العبارة $R\leftrightarrow S$ هي تتولوجي.

مثال :لتكن كل من $R: p\rightarrow q$ ، $S:\sim p\vee q$ اثبت التكافؤ: -

بما إن $R\leftrightarrow S$ هي تحصيل حاصل إذن $R \equiv S$

p	q	$\sim p$	$p\rightarrow q$	$\sim p\vee q$	$R\leftrightarrow S$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

٣-التناقض Contradiction

إذا كانت العبارة كاذبة بغض النظر عن قيم مكوناتها ان كانت صادقة او كاذبة فتسمى تناقضا.

مثال: - $p\wedge\sim p$ هي تناقض وهذا ما يســمى بقانون التناقض (Law of contradiction) ونوضح ذلك بالجدول التالي

p	$\sim p$	$p\wedge\sim p$
T	F	F
F	T	F

ملاحظة: - العبارة $S: p\wedge\sim p$ تكون تناقضا إذا وفقط إذا كانت $\sim S$ تتولوجي

مثال: - $(p\vee\sim p)$هي تتولوجي فإذن $\sim(p\vee\sim p)$ تكون تناقضا

٤-الاستنتاج المنطقي او الاقتضاء المنطقي Logical implication

لتكن كل من (R,S) عبارة يقال إن العبارة R تقتضي منطقيا العبارة S أو S تستنتج منطقيا من Rإذا وفقط إذا كانت $(R\rightarrow S)$ هي تتولوجي ويعبر عن ذلك بالرمز $(R\Rightarrow S)$

مثال: - لتكن$R:(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)$ ، $S: p\rightarrow r$ فأن $R\Rightarrow S$:

p	q	r	$p\rightarrow q$	$q\rightarrow r$	$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)$	$p\rightarrow r$	$R\Rightarrow S$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

لاحظ بان $R\rightarrow S$ هي تتولوجي اذن$R\Rightarrow S$

ملاحظة :العبارة $S\rightarrow R$ تســـمى معكوس (converse) العبارة $R\rightarrow S$ لاحظ بان العبارة ومعكوســـها غير متكافئين بصـــورة عامة إي إن $(R\rightarrow S) \not\equiv (S\rightarrow R)$ فإذن $R\Rightarrow S$ تعني $\sim S\Rightarrow\sim R$

مثال: - العبارة المثلث المتساوي الأضلاع يكون متساوي الساقين تكافئ العبارة المثلث الغير متساوي الساقين غير متساوي الأضلاع لان العبارة الأولى من النوع $(R\rightarrow S)$ والعبارة الثانية من النوع $(\sim S\rightarrow\sim R)$.

٥-جبر العبارات Algebra of statements

من اهم خواص جبر العبارات ما يلي: -

١- خواص التحايد (Idempotent Laws)

لتكن p عبارة فأن

[١] $p\vee p \equiv p$

[٢] $p\wedge p \equiv p$

٢- خاصية التجميع(Associativity)

[١] $(P\vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q\vee R)$

[٢] $(P\wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q\wedge R)$

٣- خواص التبادل (Commutativity)

[١] $P \vee Q \equiv Q \vee P$

[٢] $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$

٤- خواص التوزيع (Distributive)

[١] $P \vee (Q\wedge R) \equiv (P\vee Q) \wedge (P\vee R)$

[٢] $P \wedge (Q\vee R) \equiv (P\wedge Q) \vee (P\wedge R)$

٥- خواص العبارات المحايدة(Identity)

[١] $P \vee O \equiv P$

[٢] $P \wedge I \equiv P$

[٣] $P \vee I \equiv I$

[٤] $P \wedge O \equiv O$

علما بان O هو رمز التناقض وI هو رمز التتولوجي

٦- خواص المتممات(Complementarity)

[١] $\sim P \equiv I \vee P$

[٢] $\sim P \equiv O \wedge P$

[٣] $\sim (\sim P) \equiv P$

[٤] $\sim O \equiv I \, , \sim I \equiv O$

٧- قوانين دي موركن (De Morgan Laws)

[١] $\sim (P\wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$

[٢] $\sim (P\vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$

سنبرهن على سبيل المثال قانون التوزيع $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

P	Q	R	$(Q \vee R)$	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q)$	$(P \wedge R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

فإذن　$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

والقوانين الاخرى يمكن التحقق منها ايضا بواسطة جداول الصدق .وباستخدام هذه القوانين نستطيع ان نستغني في كثير من الاحيان عن جداول الصدق.

مثال: -بسط العبارة الاتية $\sim(P \vee \sim Q)$

الحل: -

$\sim(P \vee \sim Q) \equiv \sim P \wedge \sim (\sim Q)$ **(قانون دي موركن)** $\equiv \sim P \wedge Q$ **(قانون المتممة)**

المحاضرة الخامسة

جبر المجموعات ALGEBRA OF SETS

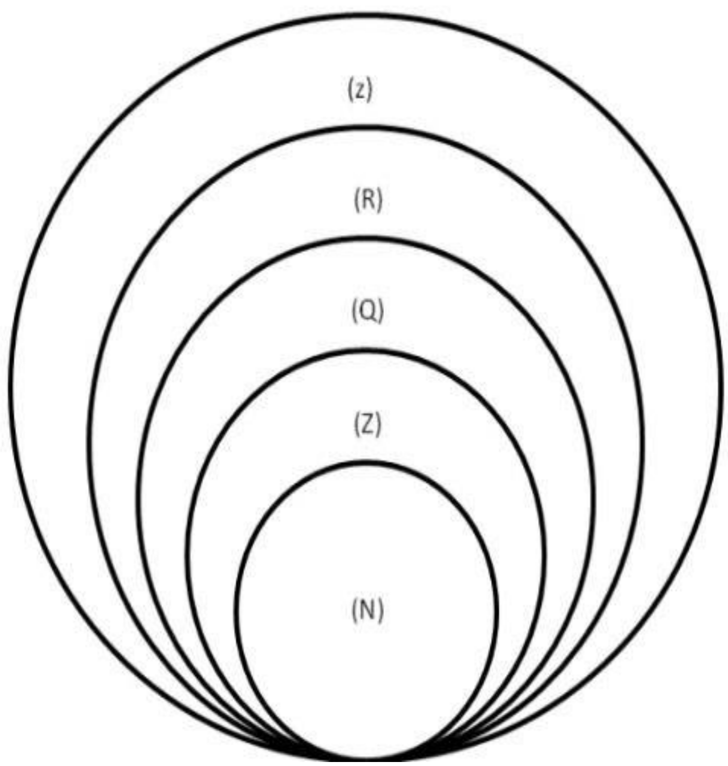
مقدمة: -

عند التعامل بالأعداد كنا نستعمل العمليات الحسابية الاعتيادية كالجمع والضرب، وكذلك عند التعامل بالمجموعات فتوجد عمليات مشابهة للعمليات الحسابية الاعتيادية مثل الاتحاد يرمز لها بالرمز ($\cup$) والتقاطع بالرمز ($\cap$).

باستخدام هذه العمليات على المجموعات نشأ ما يسمى بجبر المجموعات.

مثال: -

$N \subset R$، حيث N مجموعة الأعداد الطبيعية وR مجموعة الأعداد الحقيقية.



اتحاد وتقاطع المجموعات Union and intersection of sets

تعريف: -

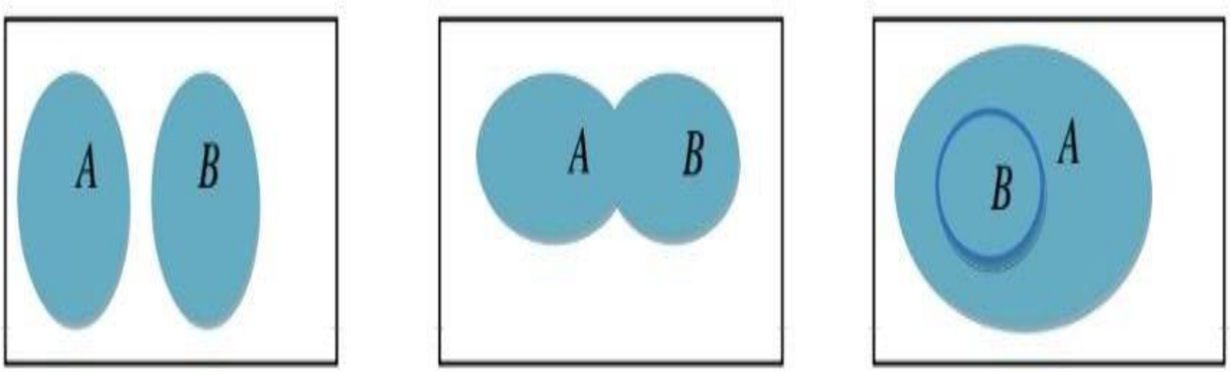
إذا كان كل من A,B مجموعة فان اتحاد A وB هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A او الى B او إلى كليهما ويرمز له بالرمز $A \cup B$
وبعبارة أخرى

$$A \bigcup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

أي أن

$$x \in A \vee x \in B \leftrightarrow x \in A \bigcup B$$

يمكن توضيح مفهوم الاتحاد لمجموعتين باستخدام مخططات فين
حيث أن الجزء المظلل هو المجموعة $A \cup B$



أمثلة: -

مثال (١) :**إذا** كانت

$N_e = \{x \mid x \text{ is even natural number}\} = \{0, 2, 4, 6\ldots\}$

$N_o = \{x \mid x \text{ is odd natural number}\} = \{1, 3, 5, 7\ldots\}$

فان

$$N = N_e \cup N_o$$

مثال (٢) :إذا كانت $A=\{x:0\le x\le 6\}$ ، $B=\{x:6<x<13\}$ فأن:

$$A\cup B = \{x:0\le x<13\}$$

<u>مبرهنة</u> :- لتكن كل من A , B مجموعة فأن :

1. $A \subseteq A\cup B \wedge B \subseteq A\cup B$

2. $A \subseteq B \leftrightarrow A\cup B = B$

<u>البرهان</u> :

1. لكي نبرهن على أن $A \subseteq A\cup B$

نفرض أن $x \in A$ الآن

$$\begin{aligned} x \in A &\rightarrow x \in A \vee x \in B \\ &\rightarrow x \in A\cup B \end{aligned}$$

أذن $A \subseteq A\cup B$

وبصورة مماثلة نبرهن على أن $B \subseteq A\cup B$.

2. نفرض أن $A \subseteq B$ وأن $x \in A\cup B$ الآن

$$x \in A \bigcup B \to x \in A \vee x \in B$$
$$\to x \in B \vee x \in B$$
$$\to x \in B$$

أذن $A \bigcup B \subseteq B$ بما أن $B \subseteq A \bigcup B$

أذن $A \bigcup B = B$.

وبصورة معاكسة نفرض أن $A \bigcup B = B$ من فرع (1) $A \subseteq A \bigcup B$

أذن $A \subseteq B$.

<u>مبرهنة</u> :- لتكن كل من A,B,C مجموعة فان:

1- قانون التحايد (Idempotent law)

$$A \bigcup A = A$$

2- قانون التبادل (Commutative law)

$$A \bigcup B = B \bigcup A$$

3- قانون التجميع (Associative law)

$$A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$$

<u>البرهان</u> :

2 - سنبرهن على أن $A \bigcup B = B \bigcup A$

نفرض أن $x \in A \bigcup B$ الآن

$$x \in A \bigcup B \to x \in A \vee x \in B$$
$$\to x \in B \vee x \in A$$
$$\to x \in B \bigcup A$$

أي أن $A \bigcup B \subseteq B \bigcup A$.

وبصورة مماثلة نفرض أن $y \in B \bigcup A$

وبسهولة نبرهن أن $y \in B \bigcup A \to y \in A \bigcup B$

أذن $B \bigcup A \subseteq A \bigcup B$

وعليه فان $A \bigcup B = B \bigcup A$.

مبرهنة :- لتكن A مجموعة ما ، فان

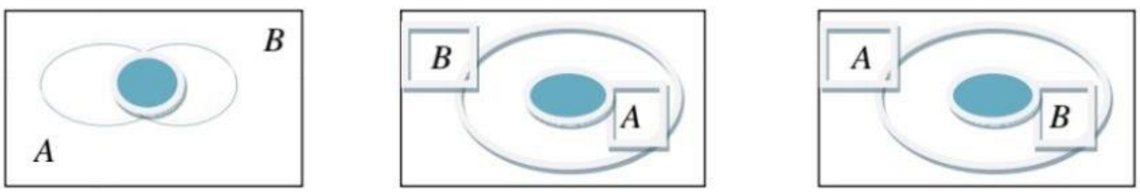
1. $A \bigcup \phi = A$
2. $A \bigcup U = U$

حيث U هي المجموعة الشاملة .

تعريف :- أذا كان كل من A , B مجموعة فان تقاطع A مع B هو مجموعة كافة العناصر المشتركة بين A,B ويرمز لها بالرمز $A \cap B$ وبعبارة أخرى $A \bigcap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ أي أن

$$x \in A \wedge x \in B \leftrightarrow x \in A \bigcap B$$

يمكن توضيح مفهوم التقاطع لمجموعتين باستخدام مخططات فين حيث أن الجزء المظلل هو المجموعة $A \cap B$.



أمثلة :-

1- إذا كانت

$$A = \{ x \mid x \leq 6 , x \text{ natural number}\}$$
$$= \{0,1,2,\ldots,6\}$$
$$B = \{ x \mid x \leq 6 , x \text{ prime number}\}$$
$$= \{2,3,5\}$$

فان $A \cap B = \{2,3,5\}$

2- لتكن $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}$ و $B = \{x \mid 0.5 \leq x \leq 7\}$

فان $A \cap B = \{x \mid 0.5 \leq x \leq 5\}$

تعريف :- يقال بان المجموعتين A,B منفصلتان (disjoint) أذا وفقط أذا لا توجد عناصر مشتركة بينهما وبعبارة أخرى أن تقاطعهما مجموعة خالية أي أن $A \bigcap B = \phi$.

مثال :- لتكن $A = Ne$ و $B = No$ فان $A \bigcap B = \phi$.

مبرهنة :- لتكن كل من A,B مجموعة فان :

1. $A \bigcap B \subseteq A \wedge A \bigcap B \subseteq B$
2. $A \subseteq B \leftrightarrow A \bigcap B = A$

البرهان :

1. لكي نبرهن على أن $A \bigcap B \subseteq A$ نفرض أن $x \in A \bigcap B$

$$x \in A \bigcap B \rightarrow x \in A \wedge x \in A$$
$$\rightarrow x \in A$$

أي أن $A \bigcap B \subseteq A$

وبصورة مماثلة نبرهن على أن $A \bigcap B \subseteq B$.

2. نفرض أن $A \subseteq B$ وان $x \in A$

أذن $x \in A \rightarrow x \in B$

أذن $x \in A \wedge x \in B$

أي أن
$$x \in A \rightarrow x \in A \wedge x \in B$$
$$\rightarrow x \in A \bigcap B$$

أذن $A \subseteq A \bigcap B$ وبما أن $A \bigcap B \subseteq A$

أذن $A \bigcap B = A$

وبصورة معاكسة نفرض أن $A \bigcap B = A$

بما أن $A \bigcap B \subseteq B$

اذن $A \subseteq B$.

مبرهنة :- لتكن كل من A,B,C مجموعة فان :

1. قانون التحايد (Idempotent law)

$$A \cap A = A$$

2. قانون التبادل (Commutative law)

$$A \cap B = B \cap A$$

3. قانون التجميع (Associative law)

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

البرهان :

3 - نفرض أن $x \in A \cap (B \cap C)$ الان

$$x \in A \cap (B \cap C) \rightarrow x \in A \wedge x \in (B \cap C)$$
$$\rightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)$$
$$\rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C$$
$$\rightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \in C$$
$$\rightarrow x \in (A \cap B) \cap C$$

أي أن $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$

بصورة مماثلة نفرض أن $y \in (A \cap B) \cap C$

ونبرهن على ان $y \in (A \cap B) \cap C \rightarrow y \in A \cap (B \cap C)$

أذن $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

مبرهنة :- لتكن A مجموعة ما, فان :

1 - $A \cap \phi = \phi$

2 - $A \cap U = A$

حيث U هي المجموعة الشاملة .

مبرهنة :- قانون التوزيع (Distributive laws)

لتكن كل من A,B,C مجموعة فان :

1- $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$

2- $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$

البرهان :

1- نفرض أن $x\in A\bigcap(B\bigcup C)$ الان

$$\begin{aligned}x\in A\bigcap(B\bigcup C)&\to x\in A\wedge x\in(B\bigcup C)\\&\to x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)\\&\to(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)\\&\to x\in(A\bigcap B)\vee x\in(A\bigcap C)\\&\to x\in(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)\end{aligned}$$

أي أن $A\bigcap(B\bigcup C)\subseteq(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$ .... (1)

وبصورة مماثلة نفرض أن $y\in(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$ الان

$$\begin{aligned}y\in(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)&\to y\in(A\bigcap B)\vee y\in(A\bigcap C)\\&\to(y\in A\wedge y\in B)\vee(y\in A\wedge y\in C)\\&\to y\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)\\&\to y\in A\wedge y\in(B\bigcup C)\\&\to y\in A\bigcap(B\bigcup C)\end{aligned}$$

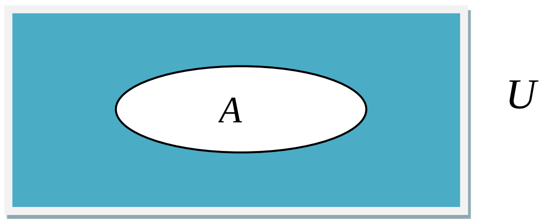
أذن $(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)\subseteq A\bigcap(B\bigcup C)$ .... (2)

ومن (1) , (2) ينتج أن $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$

المحاضرة السادسة

المجموعة المتممة لمجموعة: (Complement of a set)

تعريف: - لتكن A مجموعة ما، المجموعة المتممة إلى A (complement of a set A) هي المجموعة التي عناصــرها من المجموعة الشــاملة U والتي لا تنتمي إلى A ويرمز لها بالرمز A^c، وبعبارة أخرى $A^c = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$ وبصورة ابسط نكتبها كالاتي $A^c = \{x \mid x \notin A\}$ الشكل التالي يوضح مفهوم المجموعة المتممة حيث الجزء المظلل يمثل A^c



أمثلة: -

١- لتكن المجموعة الشاملة هي مجموعة الأعداد الصحيحة كلها
ولتكن $A = \{x \mid x \geq 3\}$ فان $A^c = \{4, 5, 6, 7 \ldots\}$.

٢- لتكن المجموعة الشاملة هي مجموعة الإعداد الطبيعية
وان $A = \{0,2,4,6,\ldots\ldots\ldots\}$ فان $A^c = \{1,3,5,9,\ldots\ldots\ldots\}$.

مبرهنة1

لتكن كل من A,B مجموعة فإذا كان $A \subseteq B$ فان $B^c \subseteq A^c$.

مبرهنة2

لتكن A مجموعة فان $(A^c)^c = A$

تعريف: -

لتكن كل من A,B مجموعة، تسمى المجموعة التي عناصرها هي جميع العناصر التي تنتمي الى A ولا تنتمي الى B بـ (الفرق بين مجموعتين The difference of two sets A,B) ونرمز لها بالرمز $A - B$ وبعبارة أخرى $A - B = A \cap B^c$ أي أن $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

ملاحظة: -

أذا كانت A مجموعة شاملة فان $A - B = B^c$.

أمثلة: -

١- لتكن N مجموعة الأعداد الطبيعية ولتكن N_o مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية، فان

$$N - N_o = \{0, 2, 4, 6, 8...\}$$

٢- $A - B = B^c - A^c$

مبرهنة3

لتكن A مجموعة ما فان:

1. $U^c = \phi$

2. $\phi^c = U$

3. $A \cap A^c = \phi$

4. $A \cup A^c = U$

حيث U هي المجموعة الشاملة.

مبرهنة4

قانوني دي موركن (De Morgan's laws)

إذا كان كل من A,B مجموعة فان

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

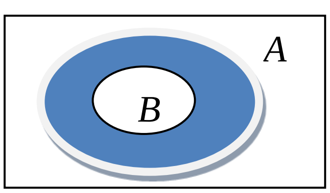
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

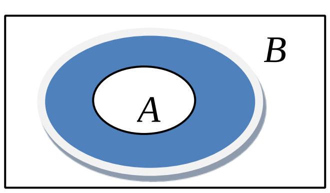
الفرق التناظري :(Symmetric difference)

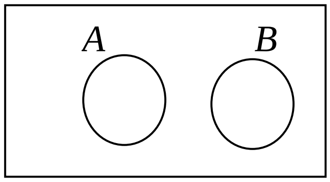
تعريف: -

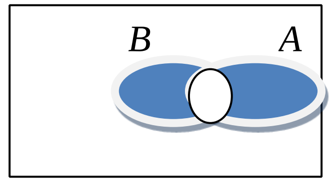
ليكن كل من A,B مجموعة، اتحاد المجموعتين $B - A$ و $A - B$ يسمى بالفرق التناظري بين A,B ويرمز لها بالرمز $A \Delta B$ أي أن $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

وتمثل المخططات التالية مفهوم الفرق التناظري حيث الجزء المظلل يمثل $A \Delta B$.









<u>مثال</u>

لتكن $A = \{1,5,9,11\}$, $B = \{2,5,11,81\}$

فان $A \,\Delta\, B = \{1, 9, 2, 18\}$

<u>مبرهنة</u>: -

لتكن كل من A,B مجموعة فان

1. $A \,\Delta\, \phi = A$

2. $A \,\Delta\, B = \phi \leftrightarrow A = B$

<u>ملاحظة</u>: -

باستعمال قوانين جبر المجموعات التي برهنت سابقا يمكن البرهنة على جميع خواص المجموعات بدون استعمال تعاريف للرموز $\subseteq$ و $\cap$ و $\cup$ كما في الأمثلة التالية:

<u>مثال١</u>: -

برهن على أن $A \cup (A \cap B) = A$.

<u>البرهان</u>:

من المبرهنة السابقة نجد أن $A \cap B \subseteq A$

لذا فان $A \cup (A \cap B) = A$.

<u>مثال٢</u>: -

برهن على أن $A \cap (A \cup B) = A$.

<u>البرهان</u>:

من المبرهنة السابقة نجد أن $A \subseteq A \cup B$

أذن $A \cap (A \cup B) = A$

<u>مثال٣</u>: -

برهن على أن $A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$.

<u>البرهان</u>:

. $A \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B) = \phi \cup (A \cap B) = A \cap B$

مثال٤: -

برهن على أن

$$A \cup (A \cup B^{c})^{c} = A \cup B$$

البرهان:

$$\begin{aligned} A \cup (A \cup B^{c})^{c} &= A \cup (A^{c} \cap (B^{c})^{c}) \\ &= A \cup (A^{c} \cap B) \\ &= (A \cup A^{c}) \cap (A \cup B) \\ &= U \cap (A \cup B) \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

مثال٥: -

برهن على أن $A \cap (A \cup B^{c})^{c} = \phi$.

البرهان:

$$\begin{aligned} A \cap (A \cup B^{c})^{c} &= A \cap (A^{c} \cap (B^{c})^{c}) \\ &= A \cap (A^{c} \cap B) \\ &= (A \cap A^{c}) \cap B \\ &= \phi \cap B = \phi \end{aligned}$$

مثال ٦: - برهن $A \cap (A \cap B^{c})^{c} = A \cap B$

البرهان

$$\begin{aligned} A \cap (A \cap B^{c})^{c} &= A \cap (A^{c} \cup (B^{c})^{c}) \\ &= A \cap (A^{c} \cup B) \\ &= (A \cap A^{c}) \cup (A \cap B) \\ &= \phi \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

ملخص العمليات على المجموعات

❖ **المجموعات المتساوية:**

يقال لمجموعتي A, B متساويتان إذا وفقط إذا احتويتا على نفس العناصر وبعبارة اخرى $A = B$ تكافي $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

مثال: لتكن $A = \{x \in \mathbb{Z}: -2 \le x \le 2\}$ و $B = \{-2, -1,0,1,2\}$ فان $A = B$

ويقال للمجموعتين A, B غير متساويتين إذا وجد على الاقل عنصر واحد في احدى المجموعتين لا ينتمي الى المجموعة الاخرى.

❖ **الاتحاد**:

لتكن A, B مجموعتين فان المجموعة التي تتكون من جميع العناصر الموجودة في اي منها تسمى اتحاد المجموعتين A, B ويرمز له بالرمز $A \cup B$

وكما يلي $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

❖ **التقاطع**

لتكن A, B مجموعتين فان المجموعة التي تتكون من جميع العناصر الموجودة في كل من A, B معا تسمى بتقاطع المجموعتين A, B ويرمز له بالرمز $A \cap B$

وكما يلي $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

إذا كانت مجموعة تقاطع المجموعتين A, B مجموعة خالية فيقال ان A, B منفصلتان (Disjoint)

مثال: لتكن $A = \{10, 5, 3\}$

و $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ فان $A \neq B$.

$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 10\}$

ولتكن $E =]0,3[$ فان $E \cap B = \{0,1,2\}$.

نلاحظ من المثال أعلاه بان ($A \subseteq A \cup B \wedge B \subseteq A \cup B$

$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$)

و $A \cap (E \cup B) = (A \cap E) \cup (A \cap B)$)

$A \cup (E \cap B) = (A \cup E) \cap (A \cup B)$

❖ **الفرق بين المجموعات**:

لتكن كل من A, B مجموعتين تسمى المجموعة التي عناصرها هي جميع العناصر التي تنتمي الى ولا تنتمي الى بالفرق بين المجموعتين A, B ويرمز له بالرمز $B - A$

وكما يلي

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

والمجموعة $B - A$ تعرف كالاتي:

$$B - A = \{x : x \notin A \wedge x \in B\}$$

❖ **متممة المجموعة**:

لتكن A مجموعة جزيئة من المجموعة الشاملة U فالمجموعة التي عناصرها من المجموعة الشاملة والتي لا تنتمي الى A ويرمز لها بالرمز A^C

أي أن $A^C = \{ x: x \in U \wedge x \notin A \}$

فمثلا : لتكن $U = \{1, ,2,3, \dots ,10 \}$ و $A = \{2,4,6\}$ و $B = \{1,3,5\}$

فان

$$B^C = \{2,4,6,7,8,9,10\} \quad A^C = \{1,3,5,7,8,9,10\}$$

$$(A^c)^c = \{1,3,5\} = A$$

<u>نلاحظ ان</u>

لتكن كل من B , A مجموعة اذا كان $A \subseteq B$ فان $A^c \subseteq B$

2. لتكن A مجموعة ما فان

$$(A^c)^c = A$$

❖ **<u>الفرق التناظري</u>**:

لتكن كل من A, B مجموعتين فان الفرق التناظري للمجموعتين A, B هي مجموعة اتحاد المجموعتين $A - B$ و $A - B$ ويرمز له بالرمز $A \Delta B$

(تقرا A دلتا B). اي ان $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

لتكن كل من A, B مجموعتين فان

$$\mathbf{A} \; \Delta \emptyset = \emptyset$$

$$\mathbf{A} \Delta \mathbf{B} = \emptyset \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

❖ **<u>نظرية: قانون دي موركن</u>** أذا كان كل من A, B مجموعة فان

1. $(A \cup B)^c = A^C \cap B^C$

2. $(A \cap B)^c = A^C \cup B^C$

المحاضرة السابعة

Relations
العلاقات

مقدمة: -
العلاقة هي مجموعة من الازواج المرتبة والتي يرمز لهذه الازواج المرتبة بالرمز (a, b).
تعريف: - يقال عن x انه زوج مرتب إذا وجدت a,b بحيث $x = (a,\ b)$ فيقال عن a انه المسقط الاول للزوج المرتب x ويقال عن b انه المسقط الثاني للزوج المرتب x.
وبصورة عامة اذا كانت المجموعة تحتوي على n من العناصر المرتبة $a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n$ فأننا نحصل على النوني المرتب $(n\text{-tuples})$ $(a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n)$.
ملاحظة: - يعرف الزوج المرتب (a,b) على انه المجموعة $\{a,\{a,b\}\}$.
مثال: -
$$(1,2) = \{1,\ \{1,2\}\}$$
$$(2,1) = \{2,\ \{2,1\}\}$$
واضح أن $(1,2) \neq (2,1)$.

ملاحظات: -
1. الزوج المرتب $(a, b) \neq (b, a)$ الا أذا كان $a = b$.
2. $(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d$

الضرب الديكارتي: (Cartesian product)
إذا اعطيت مجموعتين فمن الممكن تكوين مجموعة اخرى باستعمال فكرة الازواج المرتبة.
لتكن كل من A,B مجموعة فان حاصل الضرب الديكارتي للمجموعتين A,B هو مجموعة الازواج المرتبة (a,b) حيث $a \in A$, $b \in B$ ويرمز لها بالرمز $A\times B$, وبعبارة أخرى
$$A\times B= \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$
أمثلة: -
لتكن $A= \{1,3,5\}$, $B =\{-2,4\}$
فان $A\times B= \{(1,-2),(1,4),(3,-2),(3,4),(5,-2),(5,4)\}$
كذلك $B \times A= \{(-2,1),(-2,3),(-2,5),(4,1),(4,3),(4,5)\}$
واضح بان $A\times B \neq B\times A$

لتكن $A = R$ فان $R\times R= \{(a, b) \mid a, b \in R\}$

أي أن $R\times R$ هي مجموعة عناصرها جميع نقاط المستوي

ملاحظات: -

١. أذا كانت A مجموعة عدد عناصـــرها n و B مجموعة عدد عناصـــرها m فان عدد عناصر $A\times B$ يساوي nm.

٢. أذا كانت المجموعة A او المجموعة B مجموعة غير منتهية فان المجموعة $A\times B$ تكون مجموعة غير منتهية.

٣. إذا كانت المجموعة A او المجموعة B مجموعة خالية فان المجموعة $A\times B$ ايضـــا تكون مجموعة خالية. $\phi\times B=\phi$, $A\times\phi=\phi$,

٤. $A\times B\neq B\times A$ الا اذا كانت $A=B$.

مثال: - أذا كانت $A= \{a, b\}$ جد $A\times N$.

الحل : $N= \{0,1, 2,........\}$

$$A\times N= \{(a, 0), (b, 0), (a, 1), (b, 1) \ldots\ldots\}$$

مبرهنـة: - لتكن كل من A,B مجموعة غير خـالية فـان $A\times B= B\times A$ أذا وفقط أذا كـان $A=B$.

مبرهنة: - أذا كانت كل من A,B,C,D مجموعة فان:

1. $A\times (B\cap C) = (A\times B) \cap (A\times C)$
2. $A\times (B\cup C) = (A\times B) \cup (A\times C)$
3. $(A\times B) \cap (C\times D) = (A\cap C)\times (B\cap D)$

تعميم حاصل الضرب الديكارتي: -

لتكن كل من $A_1, A_2,\ldots\ldots, A_n$ مجموعة، فان حاصـــل الضـــرب الديكارتي للمجموعات $A_1, A_2,\ldots\ldots, A_n$ هو مجموعة عناصـــرها كافة النونيات المرتبة $(a_1,a_2,\ldots\ldots, a_n)$ حيث $a_i\in A_i$ لكل $1\le i\le n$. ويرمز له بالرمز $A_1\times A_2\times\ldots\ldots\times A_n$

$$A_1\times A_2\times\ldots\ldots\times A_n=\prod^{n} A_i= \{(a_1, a_2\ldots\ldots a_n) \mid a_i\in A_i, 1\le i\le n\}$$

$i=1$

مثال: - أذا كانت $A_1=\{1\},\ A_2=\{2\},\ A_3=\{3,4\}$ جد $\prod_{i=1}^{3} A_i$.

الحل: -

$$\prod_{i=1}^{3} A_i = A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4)\}$$

العلاقة الثنائية :(Binary relation)

لتكن كل من A,B مجموعة ولتكن $p\ (x, y)$ جملة مفتوحة في x, y معرفة على حاصـــل الضرب الديكارتي $A \times B$.

أن الثلاثي $(p\ (x, y), A, B)$ يسمى علاقة من A الى B ومجموعة الصدق الى $p\ (x, y)$ تسمى بيان العلاقة (Graph of the relation) ويرمز لها بالرمز G أي أن،

$$G = \{(x, y) \in A\times B \mid p\ (x, y) \text{ is true}\}$$

تعريف: -

لتكن كل من A,B مجموعة، فان أي مجموعة جزئية من $A\times B$ تسمى علاقة فاذا اعتبرنا R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B , فان $R\subseteq A\times B$.

سنعبر عن العلاقة باعتبارها مجموعة بإحدى الطريقتين التاليتين:

1. كتابة عناصر (العناصر هنا ازواج مرتبة)
2. طريقة اعطاء الصفة المميز لعناصرها فتكتب كما يلي:

$$R= \{(x, y) \mid x\in A,\ y\in B,\ p(x, y)\}$$

حيث $p\ (x, y)$ هي الصفة المميزة لعناصرها، إذا كان (x, y) عنصرا في R فأننا نعبر عن هذا الانتماء بالرمز $x\ R\ y$ ويقرا x يرتبط مع y بالعلاقة R، وإذا لم يكن (x, y) عنصـرا في R فيكتب بالصورة $x \not{R}\, y$ ويقرا (x **لا يرتبط مع** y **بالعلاقة** R).

امثلة: -

١- أذا كانت $B= \{2,4,6\}$, $A = \{1,5\}$

$R= \{(x, y)\mid x<y\}$ هي علاقة من A الى B وان الصــفة التي تربط عنصــري أي زوج مرتب هي

أن العنصـــر الاول أصـــغر من العنصـــر الثاني لكل زوج، وان الازواج المرتبة التي تحقق هذه الصـــفة هي: $(5, 6)$، $(1,6)$، $(1,4)$، $(1,2)$ أذن $R=\{(1,2),(1,4),(1,6),(5,6)\}$

٢- المجموعة T المعرفة كالاتي: $T=\{(x, y)\in R\times R \mid x^2+y^2=1\}$
هي علاقة على مجموعة الاعداد الحقيقية وان الصفة التي تربط عنصري أي زوج مرتب هي أن مربع العنصر الاول مضافا الى مربع العنصر الثاني يساوي واحد.

العلاقة الذاتية (Identity relation):

تعريف: -

لتكن A مجموعة ما، تســمى المجموعة التي عناصــرها جميع الازواج المرتبة (x, y) في $A\times A$ حيث $x=y$ بالعلاقة الذاتية على A ويرمز لها بالرمز I_A أي أن

$$I_A=\{(x, y) \mid x\in A, y\in B \ni x=y\}$$

مثال: - إذا كانت A مجموعة الاعداد الطبيعية N، فان

$$I_N=\{(x, y)\in N\times N \mid x=y\}$$
$$=\{(0,0),(1,1),(2,2),.........\}$$

عكس العلاقة (Inverse relation):

تعريف: -

لتكن R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B تســمى العلاقة من B الى A التي عناصــرها جميع الأزواج المرتبة (y, x) حيث $(x, y)\in R$ (عكس العلاقة) ويرمز لها بالرمز R^{-1} أي أن $R^{-1}=\{(y, x) \mid (x, y)\in R\}\subseteq B\times A$ ويلاحظ أن $(x, y)\in R\leftrightarrow (y, x)\in R^{-1}$

مبرهنة: -

لتكن R علاقة على A فان $(R^{-1})^{-1}=R$.

امثلة: -

١- لتكن T هي علاقة معرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية N كالاتي:

$$T=(x, y)\in N\times N \mid x=0\}$$
$$=\{(0,0),(0,1),(0,2),......\}$$

فان $T^{-1}=\{(0,0),(1,0),(2,0),.......\}$

٢- أذا كان $B=\{2,4,5\}$ ، $A=\{a,b\}$

فان $R=\{(2,a),(5,b),(4,b)\}$ هي علاقة من A إلى B

أذن $R^{-1}=\{(a,2),(b,5),(b,4)\}$ هي عكس علاقة من B إلى A .

المنطلق والمـدى للعلاقــة :(Domain and range of a relation)

تعريف: -

لتكن R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B

1. تسمى مجموعة العناصر الاولى من الازواج المرتبة في R **(منطلق العلاقة R)** ويرمز لها (Dom R) أي أن $\text{Dom } R=\{x \mid \exists y \in B, (x,y)\in R\}$.
2. تســمى مجموعة العناصـــر الثانية من الازواج المرتبة في R (**مدى العلاقة R**) ويرمز لها (Ran R) أي أن $\text{Ran } R=\{y \mid \exists x\in A, (x,y)\in R\}$.

واضح من التعريف أن

$$\text{Dom } R\subseteq A$$
$$\text{Ran } R\subseteq B$$

أمثلة: -

لتكن $A=\{1,3,5\}$, $B=\{a,b\}$,

ولتكن $R=\{(1,a),(1,b),(3,b)\}$ علاقة من A الى B , فان

$$\text{Dom } R=\{1,1,3\}=\{1,3\}$$
$$\text{Ran } R=\{a,b,b\}=\{a,b\}$$

١- لتكن T علاقة على مجموعة الاعداد الحقيقية R معرفة كالاتي:

$$T=\{(x,y)\in R\times R \mid y=x^2\}$$

$$\text{Dom } T=\{x \mid \exists y\in R, (x,y)\in T\}$$
$$=\{x \mid \exists y\in R, y=x^2\}$$
$$=R$$

$$\text{Ran } T=\{y \mid \exists x\in R, (x,y)\in T\}$$

$=\{y \mid \exists x \in R, y=x^2\}$

$=\{y \mid y \geq 0\}$

<u>مبرهنة</u>: -

إذا كانت R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B فان

1- Dom R= ran R^{-1}

2- Ran R= Dom R^{-1}