DEPARTMENT OF MATHEMATICS-COLLEGE OF EDUCATION FOR PURE SCIENCE-UNIVERSITY OF ANBAR

ON SOME METHODS OF GENERATING TOPOLOGICAL SPACES

A graduation project is submitted to the department of mathematics in partial fulfillment of the requirements for the degree of Bachelor of Science in Mathematics

BY

HUDA AMER SHREIF (1)

SABA AHMED MUTER (2)

SUPERVISOR

ALAA MAHMOOD FARHAN AL-JUMAILI

IRAQ-ANBAR

2017-2018

Chapter one-الفصل الأول

Introduction-المقدمة

مفاهيم اساسية (Basic concepts)

التوبولوجي (**Topology**): هو أحد فروع الرياضيات الحديثة حيث أن نظرية المجموعات (**Set theory**) تلعب دوراً رئيسياً في هذا المقرر, في حقيقة الأمر فإن نظرية المجموعات تعتبر لغة (**Language**) التوبولوجي.

في هذا الفصل نستعرض أهم المفاهيم الاساسية في نظرية المجموعات والتي سوف تستخدم خلال دراسة هذا المشروع ولمزيد من المعلومات عن نظرية المجموعات على القارئ الرجوع لبعض المراجع المهمة ومنها ما ذكر في هذا البحث.

تعريف (1−1) : مفهوم كانتور للمجموعة [8]

المجموعة هي تجمع من الأشياء المعرفة تاماً, وهذه الاشياء قد تكون متجانسة أو غير متجانسة, ونعني بكلمة معرفة أننا نستطيع لأي مهما كان أن عدد هل هو موجود في المجموعة أم لا.

الاشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة (**elements of the set**) ونرمز عادة للمجموعات بحروف لاتينية كبيرة (**capital letters**) مثل:

$$A, B, C, \ldots X, Y, \ldots.$$

ونرمز لعناصرها بحروف لاتينية صغيرة (**Small Letters**) مثل:

$$a, b, c, \ldots x, y, \ldots.$$

تكتب X = {a, b, c, d} لنعتبر أن المجموعة X تتكون من أربعة عناصر هي: $a,$ b, c, d وتوضع عناصر المجموعة بين قوسين من النوع { } وتكتب $x\ cx$ لتعنى ان العنصر x ينتمي إلى (**belongs to**) المجموعة X كما أننا سنكتب $y \notin x$ لتعنى أن العنصر Y ليس أحد عناصر المجموعة X أو لا ينتمي إلى المجموعة X.

تعريف (1−2): المجموعات المنتهية وغير المنتهية: (Finite and Infinite set) [8]

يقال إن المجموعة A مجموعة منتهية إذا كانت تحتوي على عدد نهائي من العناصر (عدد محدد من العناصر), ويقال أنها مجموعة غير منتهية إذا كانت تحتوي على عدد لا نهائي من العناصر.

فيما يلي سوف نذكر الرموز الشائعة الاستخدام لبعض المجموعات والتي سوف تستخدم خلال هذا المقرر:

1− مجموعة الاعداد الطبيعية (**Natural Numbers**) وهي:

$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

2- مجموعة الاعداد الصحيحة (**Integer Numbers**) وهي:

$Z = \{0 \pm 1, \pm , 2, \ldots\}$

3- مجموعة الاعداد القياسية (**Rational Numbers**) وهي:

$Q = \{\frac{a}{b} : a \in z , b \in N\}$

4- مجموعة الاعداد الصحيحة غير السالبة (**Non- Negative Numbers**)

وهي:

$Z^{+} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

5- مجموعة الاعداد الحقيقية (**Real Numbers**) ويرمز لها بالرمز R.

6- مجموعة الاعداد المركبة (**Complex Numbers**) وهي:

$C = \{xa+ib: a, b \in R ; I = \sqrt{-1}\}$

تعريف (1−3): المجموعات الخالية (The empty set): [8]

المجموعة الخالية هي مجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر ويرمز لها بالرمز وقد تكتب { }.

تعريف (1−4): المجموعات الجزئية (Subset): [8]

يقال ان المجموعة A مجموعة جزئية **(Subset)** من المجموعة B إذا كان كل عنصر من عناصر A إلى المجموعة B وتكتب A⊆B وتقرأ A مجموعة جزئية من المجموعة B وقد تكتب B⊇A ويقال أن B تحتوي **(contains)** المجموعة A (او تتضمن المجموعة A) ونعبر عن ذلك رياضياً على النحو التالي:

$$(\forall x \in A \Longrightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subseteq B$$

وهذا يكافئ أن: $\forall\, x \notin B \Longrightarrow X \notin A$

تعريف (1−5) تساوي المجموعات (Equality sets): [8]

يقال ان المجموعتان A, B متساويتان إذا كانتا تحتويان على نفس العناصر وتكتب A = B أي أن A تساوي B إذا كان كل عنصر منتمى إلى A ينتمي إلى B وكذلك كل عنصر منتمى إلى B ينتمي إلى A ونهبر عن التساوي رياضياً على النحو التالي: $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \& B \subseteq A)$.

الرمز ⟺ يعنى "إذا و فقط إذا كان **(if and only if)** وقد تكتب " iff " إلى أن " ⟺ " تعنى تكافؤ التقريرين.

تعريف (1−6): [8]

يقال أن المجموعة A مجموعة جزئية فعلية (**proper-subset**) من المجموعة B (وتكتب $A \subset B$) إذا كان: $A \subseteq B, A \neq B$ وتكتب $A \not\subset B$ لتعنى أن A ليست مجموعة جزئية من المجموعة B.

نلاحظ أن $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

تعريف (1−7) المجموعة الشاملة (Universal set): [7]

المجموعة الشاملة هي المجموعة غير الخالية والتي تحتوي على جميع المجموعات الجزئية في مسألة ما تحت الاعتبار. فمثلاً عند دراسة مجموعات من الاعداد الصحيحة فإنه يوجد مجموعة شاملة وهي في هذه الحالة المجموعة Z نرمز للمجموعة الشاملة بالرمز U.

تعريف (1−8) الاتحاد (Union): [7]

اتحاد المجموعتان A, B يعرف على أنه المجموعة المكونة من جميع العناصر التي في المجموعة A أو في المجموعة B ويرمز لها بالرمز $A \cup B$ أي أن:

$$A \cup B = \{x \in U: x \in A \ or \ x \in B\}$$

ونلاحظ أن: $X \in A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \ and \ x \notin B$

تعريف (1−9) التقاطع (Intersection): [7]

تقاطع المجموعتان A, B هي المجموعة التي تتكون من العناصر المشتركة بين المجموعتين A, B ويرمز لها بالرمز $A \cap B$ وتقرأ A تقاطع B ونعبر عن ذلك رياضياً كالتالي:

$$A \cap B = \{ x \in U = x \in A \ and \ x \in B\}$$

ونلاحظ أن: $x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \; or \; B \notin B$

تعريف (1−10) الانفصال (The disjoint): [8]

يقال ان المجموعتين A, B غير متقاطعتان (منفصلتان) إذا لم يوجد بينهما عناصر مشتركة أي إذا تحقق أن: $A \cap B = \emptyset$.

نظرية (1−11): [6]

لأي ثلاث مجموعات A, B, C القوانين التالية الصحيحة:

i. $A \cup \emptyset = A \,; A \cap \emptyset = \emptyset$
ii. $A \subseteq A \cup B \,; B \subseteq A \cup B$
iii. $A \cap B \subseteq A \,; A \cap B \subseteq B$
iv. $A \cup A = A \,; A \cap A = A$
v. $A \cup B = B \cup A \,; A \cap B = B \cap A$
vi. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
vii. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
viii. $A \cup (_{i \in I} \cap B_i) = \bigcap_{i \in I} (a \cup B_i)$;
$A \cap (_{i \in I} \cup B_i) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i) \,. B_i \subseteq U$
$\bigcap_i Ai = \{x \in U: Ai \; for \; every \; i \in I\}$
$\bigcup_i Ai = \{x \in U: x \in Ai \; for \; some \; i \in I\}$

I تسمى مجموعة الدليل.

تعريف (1−12): الفرق بين مجموعتين (The difference between two sets) [8]

إذا كانت المجموعتان A, B جزئيتين من مجموعة الشاملة $\mho$ فإننا نعرف الفرق (**The difference**) ويرمز له بالرمز A – B على أنه المجموعة الجديدة:

$$A - B = \{x : x \in A \ and \ x \notin B\}$$

$$B - A = \{x : x \in B \ and \ x \notin A\}$$

تعريف (1−13): مكملة مجموعة (Complement of a set): [8]

نفرض أن $\mho$ هي المجموعة الشاملة, ونفرض $A \subseteq \mho$ مكملة المجموعة A بالنسبة إلى المجموعة الشاملة $\mho$ هي المجموعة التي عناصرها هي جميع عناصر المجموعة الشاملة $\mho$ ما عدا العناصر المنتمية للمجموعة A ويرمز لها بالرمز A^c ونعبر عنها رياضياً كما يلي:

$$A^c = \{x \in U : x \notin A\} = U - A$$

نظرية (1−14): [6]

لأي مجموعتين A, B من المجموعة الشاملة U الآتي صحيح:

i. $\emptyset^c = U$
ii. $U^c = \emptyset$
iii. $(A^c) = A$
iv. $A \cap A^c = \emptyset \, ; A \cup A^c = U$
v. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \, ; (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
vi. $A - B = A \cap B^c$
vii. $U - \bigcap_{i \in I} Bi = \cup : (U - Bi); \; U - \bigcup_{i \in I} Bi = \bigcap_{i} (U - Bi)$

ويجب أن نلاحظ أنه إذا كانت $I = \emptyset$ فإن =

$$\cap Ai = U, \cup Ai = \emptyset, Ai \subseteq U$$

القانونان في (V) يسميان قانون ديمورجان **(De Morgan's laws)**

خط الاعداد الحقيقة هو الفترة المفتوحة $(-\infty,\infty)$ تكتب $x > a$ وتكتب $x \geq a$ لتعنى $x \in (a,\infty)$ كما نكتب $x < b$ ونكتب $x \leq b$ لتعنى $x \in (-\infty,b)$.

<u>تعريف (1−15): مجموعة القوة (The Power set): [8]</u>

إذا كانت X مجموعة, فإن مجموعة القوة للمجموعة X هي المجموعة التي عناصرها جميع المجموعات الجزئية الممكنة من المجموعة X ونرمز لها بالرمز $P(X)$ أي أن $P(X) = \{A: A \subseteq X\}$.

<u>تعريف (1−16): الفترات (Intervals): [6]</u>

نفرض I مجموعة جزئية من R يقال أن I فترة من خط الاعداد الحقيقة R إذا كان لكل $x,y \in I$, $x < z < y$ فإن $z \in I$.

لاي a,b,c,d نعرف المجموعات التالية:

i. $(a,b) = \{x \in R: a < X < b\}$ $(open\ intrval)$ تسمى فترة مفتوحة
ii. $[a,b] = \{x \in R: a \leq x \leq b\}(close\ interval)$ تسمى فترة مغلقة
iii. $(a,b] = \{x \in R: a < x \leq b\}$
iv. $[a,b) = \{x \in R: a \leq x \leq b\}$

تسمى نصف مفتوحة **(half open)** أو نصف مغلقة **(half closed)**.

<u>تعريف (1−17): حاصل الضرب الكارتيزي (Cartesian product) [6]</u>

حاصل الضرب الكارتيزي (أو الديمارتي) للمجموعتين A, B يرمز له بالرمز A×B يعرف على أنه مجموعة جميع الأزواج المرتبة (a, b) حيث ان:

$A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$ اي ان $a \in A$, $b \in B$

بالمثل يمكن تعريف الضرب الكارتيزي للمجموعات $A_1, A_2, \dots, A_n$

بالصورة $\prod_{i=1}^{n} Ai = \{a_1, a_2, \dots, a_n): ai \in Ai\}$

ايضاً: $\prod_{i=1}^{\infty} Ai = \{a_1, a_2, \dots, a_{n,} \dots): ai \in Ai\}$

<u>نظرية (1−18): [6]</u>

إذا كانت X هي المجموعة الشاملة $A,B,C \subseteq X$ فإن

1) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
2) $A \times B \neq B \times A \left(A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \text{ حيث}\right)$
3) $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$
4) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
   $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
5) $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_1 \cap B_2)$

$$\forall A_1, A_2, B_1, B_2 \subseteq X$$

في الحالة الخاصة عندما A=B فإنه يمكن تعريف حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة A في نفسها بالصورة:

$$A^2 = A \times A = \{(a,b): a_1 b \in A\}$$

<u>تعريف (1−19): [8]</u>

الدالة (أو الرسم) هي علاقة من المجموعة غير خالية X إلى المجموعة غير خالية Y بحيث أن كل عنصر في X يرتبط بعنصر وحيد في Y.

وتكتي $f: X \to Y$ لتعنى أن f دالة من X إلى Y كمت تكتب $y = f(x)$ أو $(x, y) \in f$ لتعنى أن العنصر y الذي ينتمي إلى مجموعة Y هو صورة العنصر x الذي ينتمي إلى مجموعة X تحت تأثير في الدالة أو الرسم f ويقال أن المتغير y دالة في المتغير x . x تسمى بالمتغير المستقل y تسمى بالمتغير التابع, وعليه فإن f تكون دالة من المجموعة X إلى المجموعة Y إذا حققت:

لكل عنصر $x \in f$ بحيث $(x, y) \in f$, $(x, z) \in f$, فإن $y = z$

المجموعة X تسمى نطاق تعريف الدالة f أو اختصار نطاق **(domain)** الدالة ويرمز لها بالرمز Df , والمجموعة Y تسمى بالنطاق المصاحب **(co-domain)** للدالة, عناصر المجموعة Y والمرتبطة بعناصر من المجموعة X تحت تأثير الدالة f تسمى مدى (range) الدالة, ويرمز لهذه المجموعة بالرمز $f(X)$ أو Rf أي أن:

$$Rf = \{f(x): \forall x \in X\}$$

وعليه فإن الدالة هي علاقة بين متغيرين متغير مستقل ومتغير تابع, وتسمى الدالة هذه الحالة دالة المتغير الواحد **(single variable function)** والدوال ذات المتغير الواحد والتي نطاقا ونطاقها المصاحب مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقة R تسمى بالدوال الحقيقة ذات المتغير الحقيقي الواحد.

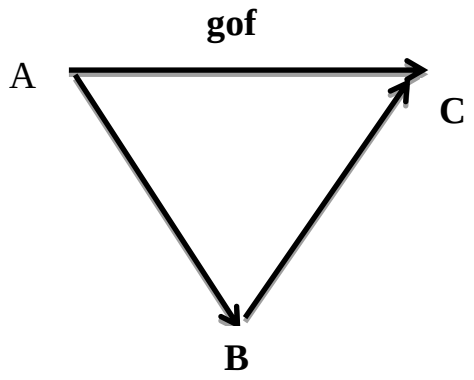
وعليه إذا كانت $y = f(x)$ فإن نطاق الدالة f هو قيم x الحقيقة التي قيمة الدالة $f(x)$ حقيقة, أما مدى الدالة فهو القيم الحقيقة التي تأخذها الدالة $f(x)$, وإذا لم يذكر نطاق الدالة f فإننا نعتبر نطاقا هو أقصى مجموعة جزئية ممكنة من مجموعة الاعداد الحقيقة R والتي عناصرها x تجعل قيم الدالة $f(x)$ حقيقة.

تعريف (1−20): [8]

نفرض الدالتين $f: A \to B\ ;\ g: B \to C$ نعرف الدالة التركيبية من الدالتين f, g والتي يرمز لها بالرمز gof على النحو التالي:

$$(gof)(x) = g\big(f(x)\big);\ \forall x \in A$$

في هذه الحالة يتضح ان نطاق الدالة التركيبية gof هو المجموعة A ونطاق الصاحب هو C:



$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$$x \xrightarrow{gof} g(f(x))$$

وعلى وجه العموم إذا كان: $f: A \to B\ ;\ g: c \to D$

فإن نطاق الدالة التركيبية gof يتكون فقط من العناصر $x \in A$ أن $f(x) \in C$ أي أن:

$$D_{gof}; \{x \in A: f(x) \in D_g$$

ونطاق الدالة fog يعطى من العلاقة:

$$D_{gof} = \{x \in C: g(x) \in Df\}$$

ملاحظة (1−21): [8]

إذا كان $R_f \subseteq D_g$ فإن نطاق الدالة gof هو نفسه نطاق f أي أن $D_{gof} = D_f$ وإذا كان $R_f \subseteq D_f$ فإن نطاق الدالة fog هو نفسه نطاق g أي أن $D_{gof} = D_f$.

تعريف (1−22): [8]

يقال أن الدالة $f: A \to b$ دالة احادية أو واحد لواحد (**injective , one to ne**) إذا تحقق:

$$\forall x_1 x_2 \in A: f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

وهذا يكافئ منطقياً

$$\forall x_1 x_2 \in A: f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

تعريف (1−23): [8]

يقال ان الدالة $f: A \to B$ دالة فوقية أو غامرة (**onto surjective**) إذا كان مداها يساوي النطاق المصاحب لها, أي إذا تحقق $R_f = B$ وهذا يعني أنه لكل عنصر $y \in B$ يوجد عنصر $x \in B$ بحيث أن $f(x) = y$.

تعريف (1−24): [8]

يقال للدالة $f: A \to B$ أنها تناظر أحادي (**bijective**) إذا كانت احادية وغامرة أي أن:

تناظر $\Leftrightarrow$ احادية + غامرة (أو فوقية)

Bijective $\Leftrightarrow$ injective + surjective

ملاحظات (1−25)

1- على وجه العموم الدالة الزوجية لا تكون أحادية على نطاقها المتماثل.

2- إذا كانت الدالة $f: A \to B$ دالة تزايدية فعلاً (أو تناقصية فعلا) فإنها تكون احادية.

تعريف (1-26): [8]

يقال ان الدالتين $y = f(x)\,, y = g(x)$ كلاهما دالة عكسية للاخرى إذا تحقق أن:

$$(fog)(x) = x;\ \forall x \in D_g$$

$$(gof)(x) = x\ ;\ \forall \in D_f$$

يرمز للدالة العكسية للدالة $y = f(x)$ بالرمز $y = f^{-1}(x)$ من هذا التعريف نستنتج أنه إذا كانت الدالة $f: A \to B$ تناظر أحادي فإن لها دالة عكسية هي:

ملاحظة: (1-27): [8]

إذا كانت $f: A \to B$ دالة تناظر احادي فإن الدالة العكسية لها هي $f^{-1} = B \to A$ تكون تناظر احادي ايضاً ويكون $D_f = R_{f^{-1}}$, $D_{f^{-1}} = R_f$ ونجد أن:

نظرية: (1-28): [8]

نفرض الدالة $f: X \to Y$ إذا كان $C, D \subseteq YA, B \subseteq X$ فإن

i. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

ii. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(b)$

iii. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

iv. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

v. $f(A - B) \supseteq f(A) - f(B)$

vi. $f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$

vii. $A \subseteq f^{-1}f(A), \forall A \subseteq X$

في العلاقات (ii) , (v) , (vii) يحدث التساوي إذا وفقط إذا كانت f احادية

viii. $ff^{-1}(D) \subseteq D; \forall\, D \subseteq Y$

في العلاقة السابقة يحدث التساوي إذا وفقط إذا كانت f شاملة

ix. $f^{-1}\left(\bigcup_{i=1} D_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(Di); DI \subseteq Y$

x. $f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} D_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}(D_i);\ D_i \subseteq Y$

xi. $f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(A_i);\ A_i \subseteq X$

xii. $f\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} f(A_i);\ A_i \subseteq X$

<u>تعريف (1−29): [6]</u>

يقال للمجموعة S انها قابلة للعد **(Countable)** إذا كانت منتهية أو يوجد اسم تناظر احادي f من مجموعة الاعداد الطبيعية N إلى المجموعة S. من اهم المجموعات القابلة للعد مجموعة الاعداد الطبيعية N, ومجموعة الاعداد الطبيعية Z, ومجموعة الاعداد القياسية Q. اما مجموعة الاعداد الحقيقية R فهي غير قابلة للعد كذلك أي فترة مفتوحة أو مغلقة من مجموعة الاعداد الحقيقية تكون غير قابلة للعد.

Chapter Two-الفصل الثاني
(Topological Spaces) الفضاءات التبولوجية

Introduction-المقدمة

يعتبر علم التبولوجي من العلوم التي تمتد جذوره إلى عصر الحضارة الإغريقية، حيث قام الإغريق بدراسة مفهوم الاستمرارية (Continuous)، لكن علم التبولوجيا لم يظهر بوضعه الحالي إلا في بداية مطلع هذا القرن حين نشر فرشيه (Ferchet) عام 1906 أطروحته التي تناولت اقتران (function) المسافة والعلاقة بينه وبين مفهوم الاستمرارية لكن العالمين (ريز Riesz وهاوسدورف – Hausdorff) بينـا فيما بعد أن لا ضرورة لهذا الاقتران ويمكن دراسة الاستمرارية دون الرجوع إلى اقتران المسافة وبهذا ظهر ما يسمى بعلم التبولوجيا العامة. فعند دراسة الكرات المفتوحة في الفضاءات المترية نلاحظ ان هذه الكرات تلعب دورا رئيسيا في بنائه ومن المعلوم بانه يمكن توليد المجموعات المفتوحة بالأستعانة بهذه الكرات وتمكننا بالتالي من دراسة مفاهيم رئيسية مثل الأستمرارية والمتتابعات المتقاربة وهذا يمهد الى مفهوم القاعدة في الفضاءات التبولوجية. سنقدم في هذا الفصل اهم التعاريف الاساسية وبعضا من النظريات والحقائق الأولية وبعضاً من المفاهيم الدقيقة في الفضاءات التبولوجية مثل مفهوم الجوارات والمجموعات المفتوحة والمغلقة والنقاط الداخلية والخارجية والمحيطية ونقاط الغاية وغيرها من المفاهيم المهمة التي تمت الحاجة اليها في هذا البحث عند دراسة طرق توليد الفضاءات التبولوجية ... والجدير بالذكر ان كثيراً من المفاهيم التي نتعرض لها ما هي الا تعميماً لمفاهيم مشابهة في التحليل الحقيقي.

تعريف (2−1): الفضاء التبولوجي (Topological Spaces): [1]

نفرض أن X مجموعة غير خالية ونفرض T تجمع من المجموعات الجزئية من X التي تحقق الشروط الآتية:

1. $X, \emptyset \in T$
2. $If\ A, B \in Y \Longrightarrow A \cap B \in T$
3. $If\ A_i \in T \Longrightarrow \cup_i A_i \in T$

نلاحظ أن: الشروط الأول (1) يعني أن T تحتوي $X, \emptyset$ والشرط الثاني (2) يعنى ان تقاطع أي عنصرين من عناصر T يعطي عنصراً في T. أما الشرط الثالث (3) يعنى ان اتحاد أي عدد من عناصر T يعطى عنصراً في T تسمى T توبولوجي **(Topology)** على X ويسمى الزوج المرتب (X, T) فضاء توبولوجي واختصار نقول ان X فضاء توبولوجي, ويسمى كل عنصر في T مجموعة مفتوحة **(open set).**

ملاحظة (2−2): [8]

يتضح من التعريف أن:

1. $T \subseteq P(X), T \in P\big(P(X)\big)$
2. U مجموعة مفتوحة $\Leftrightarrow U \in T$

ترمز $P(X)$ إلى مجموعة القوة للمجموعة X والتي تعرف على النحو التالي:

3. الشرط الثاني يكافيء القول بأن قاطع عدد منته من عناصر T هو عنصر في T أي أن

مثال (2−3):

لتكن $X = \{a, b\}$ فإن التجمعات التالية تشكل توبولوجي على X:

i. $T_1 = \{X, \emptyset\}$

ii. $T_2 = \{X, \emptyset, \{a\}\}$

iii. $T_3 = \{X, \emptyset, \{b\}\}$

iv. $T_n = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\} = P(X)$

انواع مهمة من الفضاءات التوبولوجية
(Important types of topological spaces)

(2−4): الفضاء المنفصل (أو المتقطع) (Discrete spaces): [8]

نفرض أن X مجموعة غير خالية, $T = P(X)$ هي مجموعة جميع المجموعات الجزئية من X من الواضح ان T تشكل توبولوجي على X يسمى هذا التوبولوجي بالتوبولوجي المنفصل وهو أوسع (أكبر او أقوى) توبولوجي يعرف على X, ويسمى (X,T) بالفضاء ويرمز له بالرمز (X,D).

- يجب أن نلاحظ أن الفضاء (X,D) ينفرد بخاصية هامة جداً وهي تطابق مجموعاته المفتوحة مع مجموعاته الجزئية من X أي ان كل مجموعة من X هي مجموعة مفتوحة.

2− الفضاء الغير منفصل (غير المتقطع) (Indiscrete space): [8]

نفرض ان X مجموعة غير خالية $T = \{X, \emptyset\}$ إذا T تشكل توبولوجي على X يسمى هذا التوبولوجي بالتوبولوجي الغير منفصل وهو اصغر توبولوجي يعرف على X ويسمى $(X.T)$ بالفضاء الغير منفصل ويرمز له بالرمز $(X.I)$ من هذا يتضح أن $X.\emptyset$ هما المجموعتان الوحيدتان المفتوحتان في T

3− فضاء المكملات المنتهية (Co-finite Topology): [8]

نفرض ان X مجموعة لا نهائية ونفرض

أي أن T هي عائلة كل مجموعات الجزيئة من X والتي مكملاتها تكون منتهية بالإضافة إلى المجموعة الخالية $\emptyset$ ويسمى الزوج (X,T) فضاء المكملات المنتهية ويرمز له (X,C).

4− فضاء المكملات القابلة للعد: Complement countable space [8]

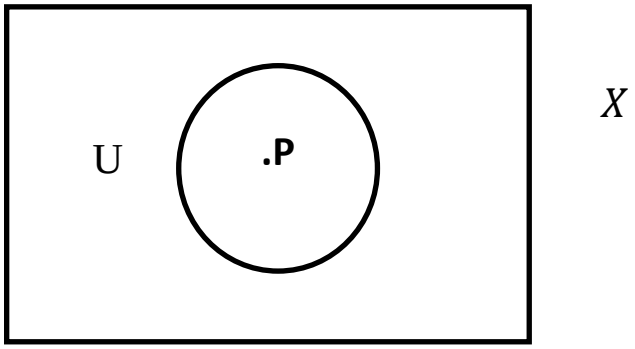
بفرض أن X مجموعة غير خالية ونفرض

واضح أن T تشكل توبولوجي على X

5- فضاء توبولوجي النقطة المختارة: (Particular point Topology) [8]

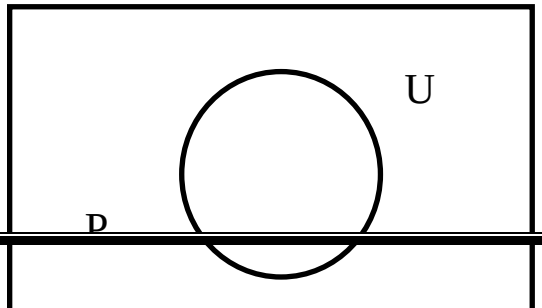
بفرض ان X مجموعة غير خالية $P \in X$ وبفرض $P = \{\emptyset, U \subseteq X : P \in U\}$

سوف نبرهن أن P توبولوجي على X



6- فضاء توبولوجي النقطة المستبعدة Sp-Topological (Excluding point): [8]

بفرض أن X مجموعة غير خالية, $P \in X$ وبفرض $E = \{X, U \subseteq X : P \in U\}$



X

من السهل اثبات أن E توبولوجي على X ويسمى توبولوجي النقطة المستبعدة ويسمى الزوج $(X.E)$ فضاء النقطة المستبعدة.

7- الفضاء التوبولوجي العادي (الاقليدي) (Usual Topological space) [8]

بفرض ان $X = R$ هي مجموعة الاعداد الحقيقة, ونفرض

$\boldsymbol{T} = \{\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{R}$

أي أن T هي مجموعة كل المجموعات الجزئية U من R التي تحقق أن لكل $x \in U$ فترة مفتوحة $(x - s, x + s)$ بحيث ان $(z - s, +s) \subseteq U$

ملاحظات (2-5) : [8]

1- كل فترة مفتوحة في R هي مجموعة مفتوحة.

2- تقاطع فترتين مفتوحتين هو مجموعة مفتوحة.

3- اتحاد فترتين مفتوحتين هو مجموعة مفتوحة ولكنه ليس بالضرورة أن تكون فترة مفتوحة فمثلاً $U = (0,1) \cup (2,5)$ جموعة مفتوحة ولكنها ليست فترة مفتوحة.

مثال (2-6): [8]

لتكن $X = N$ هي مجموعة الاعداد الطبيعية, ونفرض

الحل:

1- واضح أن $\emptyset, N \in T$

2- بفـــرض أن $A_i A_j \in T$ بحيـــث $i, j \in N$ عليـــه نحصـــل علـــى $A_i \cap A_j = A_k \in T$ حيث $k = min\{i, j\}$

3- بفـرض أن $A_{ni} \in T$ او بالتـالي فـإن $A_{ni} = \{1,2, \dots, n\}$ وعليـه يكـون $A_{ni} = \{1,2, \dots, k\} \in T$ $k = \max\{n_i : i \in I\}$.

<u>تعريف (2-7): [8]</u>

نفرض T_1, T_2 توبولوجيان على المجموعة فير الخالية X يثال أن T_1 اضعف (**or Coarser (weaker** مـــن T_2 أو T_2 أقـــوى **finer (stronger)** مـــن T_1 كـــان $T_1 \subseteq T_2$ أي أن $\forall A \in T_1 \Longrightarrow A \in T_2$

- إذا كان $T_1 \nsubseteq T_2$ أو $T_2 \nsubseteq T_1$ فإننا نقول أن هذه التوبولوجيان غير قابلة للمقارنة **(in comparable)** .

<u>مثال (2-8): [8]</u>

1- التوبولوجي غير المنقطع (in discrete) على المجموعة الغير خالية X والذي يعرف بالصورة $I = \{X, \emptyset\}$ هو مجموعة جزئية من أي توبولوجي اخر على X وعليه فهو أضعف توبولوجي **(Coarser Topology)** على X.

وعلى جانب آخر التوبولوجي المنقطع **(discrete topology)** يحتوي على توبولوجي آخر من X, وعليه وهو أقوى توبولجي **(finest topology)** على X.

2- نفرض $X = \{a, b, c, d\}$ ونفرض

$$T_1 = \{X, \emptyset, \{a\}\} \ , \ T_2 = \{X, \emptyset, \{a\{, \{a, b\}\}$$

نلاحظ أن $T_1 \subset T_2 \ , \ T_2 \not\subset T_1 \ , \ T_1 \not\subset T_3$

وهذا يعني أن T_1 اضعف من T_2 أو T_2 أقوى من T_1.

<u>تعريف (2-9): نقطة التراكم (النهاية) (Limit Accumulation point) [8]</u>

بفرض أن (X, T) فضاء توبولوجي $P \in X$ يقال ان نقطة P هي نقطة تراكم (أو نقطة نهاية) للمجموعة $A \subseteq X$ إذا كانت كل مجموعة مفتوحة تحتوي العنصر P تحتوي على نقطة واحدة على الأقل من A بخلاف النقطة P أي أن

مجموعة جميع نقاط التراكم (او نهاية) للمجموعة A تسمى مشتقة A **(derived set of A)**

ويرمز لها بالرمز $A^{/}$ أو $d(A)$

ويقال أن النقطة P نقطة مفردة أو منعزلة **(isolated point)**

إذا تحقق أن: $P \notin A \ , P \in A$

ومما سبق نجد أن:

من هذا المفهوم يتضح أن:

i. $P \notin A^{/} \Leftrightarrow \exists U \in T, P \in U \; such \; that \; (U - \{P\}) \cap A = \emptyset$
ii. $P \notin A, P \notin A^{/} \Leftrightarrow \exists U \in T, P \in U \; such \; that \; U \cap A = \emptyset$
iii. $P \notin A, P \notin A^{/} \Leftrightarrow U \in A \neq \emptyset \forall U \in T, P \in U$

مثال: (2−10): [8]

اوجد $A^{/}$ للمجموعة A الجزئية من X بالنسبة للفضاء المنقطع $(X.D)$

الحل:

نعلم أن $D = P(X)$ أي أن كل مجموعة جزئية من X هي مجموعة مفتوحة إذا $\forall P \in X \Longrightarrow \{P\} \in D$

أي أن $(\{P\} - \{P\}) \cap A = \emptyset$ وبالتالي فإن

نظرية (2−11): [4]

نفرض أن (X, T) فضاء توبولوجي إذا كانت $A, B \subseteq X$ فإن:

i− $A \subseteq B \Longrightarrow A^{/} \subseteq B^{/}$
ii− $(A \cup B)^{/} = A^{/} \cup B^{/}$
iii− $(A \cap B)^{/} \subseteq A^{/} \cap B^{/}$
iv− $If \; x \in A^{-} \Longrightarrow x \in (A - \{x\})^{/}$

تعريف (2−12): المجموعات المغلقة (closed sets): [8]

نفرض (X, T) فضاء توبولجي المجموعة $A \subseteq X$ تسمى مجموعة مغلقة **(closed)** إذا وفقط إذا كانت A^{c} مجموعة مفتوحة أي أن

A مجموعة مغلقة **(closed)** $\Leftrightarrow$ A^c مجموعة مفتوحة **(open)**.

A مجموعة مفتوحة **(open)** $\Leftrightarrow$ A^c مجموعة مغلقة **(closed)**.

سوف نرمز لمجموعة المجموعات المغلقة في فضاء التوبولوجي (X,T) بالرمز $\tilde{X}$ أو $\tilde{v}$.

<u>مثال (2−13): [6]</u>

نفرض المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$ نعرف التوبولوجي T على X على النحو التالي:

<u>مثال (2−14): [8]</u>

نفرض الفضاء التوبولوجي المتقطع (X,D) نجد أن كل مجموعة جزئية من (X,D) هي مفتوحة ومغلقة في نفس الوقت لأن:

<u>مثال: (2−15): [8]</u>

في الفضاء التوبولوجي الغير متقطع (X,I) المجموعتان $X,\emptyset$ المجموعتان المغلقتان فقط.

النظرية التالية توضح خصائص المجموعات المغلقة في أي فضاء توبولوجي (X,T) حيث ان:

1− المجموعتان $X,\emptyset$ مغلقتان.

2− تقاطع اي عدد من المجموعات المغلقة يعطي مجموعة مغلقة.

3−اتحاد عدد محدد من المجموعات المغلقة يعطي مجموعة مغلقة.

يتضح مما سبق ذكره في بند (1) انه لكن تشكل فضاء توبولوجي (X,T) يجب أن نعرف أولاً العائلة T , أي عائلة المجموعات المفتوحة.

وتوجد اكثر من طريقة لتعريف توبولوجي على المجموعة X (كما سنرى في الباب الثالث) احدى هذه الطرق بواسطة المجموعات المغلقة وهذه الطريقة هي الأكثر استعمالاً بعد طريقة المجموعات المفتوحة, والنظرية التالية توضح ذلك.

نظرية (2−16): [8]

إذا كانت X مجموعة غير خالية, نفرض $\underset{v}{\sim}$ عائلة من مجموعات الجزئية من X تحقق الشروط التالية:

$C_1)$ $X, \emptyset \in \underset{v}{\sim}$

$C_2)$ $\bigcap_i Fi \in \underset{v}{\sim}, \forall Fi \underset{v}{\sim}, i = 1,2, \ldots$

$C_3)$ $If\ F_1, F_2 \in \underset{v}{\sim} \Longrightarrow F_1 \cup F_2 \in \underset{v}{\sim}$

فإنه يمكن ايجاد توبولوجي T على X حيث $T = \{\cup \subseteq X : \cup^c \in \underset{v}{\sim}\}$

هو التوبولوجي الوحيد الذي تتطابق فيه عائلة المجموعات المغلقة مع العائلة $\underset{v}{\sim}$.

نظرية (2−17): [8]

نفرض (X, T) فضاء توبولوجي, إذا كانت $A \subseteq X$ فإن:

1− A مجموعة مغلقة إذا وفقط إذا كانت $A^{/} \subseteq A$.

2- $A \cup A^{/}$ مجموعة مغلقة.

مثال: (2-18): [8]

إذا كانت المجموعة A مغلقة فإن المجموعة $A^{/}$ تكون مغلقة عكس هذه العلاقة ليس بالضرورة صحيح.

الحل:

أولاً: حيث أن A مجموعة مغلقة فإن $A^{/} \subseteq A$ ومنها نجد أن $(A^{/}) \subseteq A^{/}$ وبالتالي فإن $A^{/}$ مجموعة مغلقة.

ثانياً: نفرض الفضاء التوبولوجي العادي (R, u) إذا كانت $A = [a, b]$ فإن $A^{/} = [a, b]$ في هذا المثال يلاحظ أن $A^{/}$ مجموعة مغلقة ولكن A مجموعة مفتوحة.

تعريف (2-19): [8]

نفرض (X, T) فضاء توبولوجي ونفرض المجموعة $A \subseteq X$ يعرف الإغلاق للمجموعة A (يرمز لها بالرمز $\overline{A}$) على انه تقاطع جميع المجموعات المغلقة في X والتي تحتوي المجموعة A أي أن:

$$\overline{A} = \bigcap_{i} \left\{ Fi : A \subseteq Fi, Fi \subseteq X Fi \text{ مغلقة } \forall i \right\}$$

ملاحظات (2-20): [8]

من التعريف يتضح ما يلي:

1- $\overline{A}$ مجموعة مغلقة لأنها تقاطع لمجموعات مغلقة.

2- $\overline{A}$ هـي أصـغر مجموعـة مغلقـة تحتـوي A أي أن لأي مجموعـة مغلقـة F تحتـوي المجموعة A فإن $A \subseteq \overline{A} \subseteq F$.

مثال (2-21): [8]

نفـرض المجموعـة $X = \{, b, c, d, e\}$ نعـرف التوبولـوجي T علـى X كمـا يلـي: $T = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}$

إذا كانت $A = \{a\} B = \{b, c\}, C = \{b, d\}, D = \{a, b, c\}$

اوجد $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ ؟

الحل: نجد أن مجموعة جميع المجموعات المغلقة في X هي:

وعليه يكون $\overline{A} = \{a\}, \overline{B} = \{b, c, d, e\} = \overline{C}, \overline{D} = X$

نظرية (2-22): [1]

نفرض (X, T) فضاء توبولوجي إذا كانت $A \subseteq X$ فإن:

i. $A \subseteq \overline{A}$
ii. $\overline{A} = A \Leftrightarrow A$ مغلقة
iii. $\overline{A} = A \cup A^{/}$
iv. $A \subseteq B \Longrightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

نظرية (2-23): [2]

إذا كانت A, B مجموعتان جزئيتان من الفضاء التوبولوجي (X, T) فإن:

$C_1)\ \overline{\emptyset} = \emptyset$

$C_2)\ A \subseteq \overline{A}$

$C_3)\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$C_4)\ \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

$C_5)\ \overline{\overline{A}} = \overline{A}$

<u>تعريف (2−24): المجموعة الكثيفة Dense set: [7]</u>

في الفضاء التوبولوجي (X,T) إذا كانت $A,B \subseteq X$ فإن:

1− يقال إن A كثيفة **(dense)** في B إذا كانت $B \subseteq \overline{A}$

2− يقال إن A كثيفة **(dense)** في X إذا كانت $\overline{A} = X$.

<u>مثال (2−25): [8]</u>

في فضاء الغير متقطع (X,I) إذا كانت $A \subseteq X$ حيث $A \neq \emptyset$ فإن A في X لأن X هي المجموعة الوحيدة المغلقة التي تحتوي A ومن ثم فإن $\overline{A} = X$.

<u>تعريف (2−26): [8]</u>

لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء (X,T) النقطة $P \in A$ تسمى نقطة داخلية **(interior point)** للمجموعة A إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مفتوحة $U \in T$ بحيث أن $P \in U \subseteq A$ مجموعة جميع النقاط الداخلية للمجموعة A يرمز لها بالرمز A° (أو (A) int) وتقرأ داخلية A . أي ان

<u>تعريف (2−27): [8]</u>

لـتكن A مجموعـة جزئيـة مـن الفضـاء (X,T) النقطـة $P \in X$ تسـمى نقطـة خارجيـة (exterior point) للمجموعة A إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مفتوحة $U \in T$ بحيث أن $P \in U \subseteq A^c = X - A$ إذا كانـت $P \in (A^c)^\circ$ مجموعـة جميـع النقـاط الخارجيـة للمجموعـة A ويرمـز بهـا بـالرمز $\text{ext}\ (A)$ وتقـرأ خارجيـة A أي أن $P \in ext\ (A) \Leftrightarrow$ $\exists U \in T, P \in U\ s.t.\ \ P \in U \subseteq A^c$

<u>تعريف (2−28): [8]</u>

لـتكن A مجموعـة جزئيـة مـن الفضـاء (X,T) النقطـة $P \in X$ تسـمى نقطـة حديـة **(boundary point)** للمجموعـة A إذا وفقـط إذا كانـت $P \in X$ ليسـت نقطـة داخليـة وليست نقطة خارجية يرمز لمجموعة النقاط الحدية للمجموعة A بالرمز $b(A)$ وعليه يكون:

أي أن $b(A) = X - \left(A^\circ \cup ext\ (A)\right)$

<u>مثال (2−29): [8]</u>

نفـــــرض (X,T) فضـــــاء توبولـــــوجي حيـــــث $X = \{a,b,c,d,e\}$ $T = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}$ إذا كانـــت $A = \{b,c,d\}$ أوجـــد $A^\circ, ext(A), b(A)$؟

الحل:

واضـح $c,d \in A$ هـما العنصـران الوحيـدان اللـذان يحققـان وجـود $\{c,d\} \in T$ بحيـث أن $\{c,d\} \subseteq A$ ومـن ثـم فـإن $A^\circ = \{c,d\}$ وبالمثـل $A^c = \{a,e\}$ نجـد أن $a \in A^c$ هـو العنصـر الوحيـد الـذي يحقـق وجـود $\{a\} \in T$ بحيـث أن $\{a\} = A^c$ ومـن ثـم فـإن

$ext(A) = \{a\}$ وحيـــث أن $A^{\circ} U\ ext\ (A) = \{A, c, d\}$ نحصـــل علـــى $b(A) =$ $\{b, e\}$.

تعريف (2−30): [8]

نفرض (X, T) فضاء توبولوجي يقال ان المجموعة $A \subseteq X$ متناثرة **(nowhere dense)** في X إذا تحقق أن $(\bar{A})^{\circ} = \emptyset$.

نظرية (2−31): [7]

إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي (X, T) فإن للخواص الآتية محققة:

1− $A^{\circ} = \cup \{G_i : G_i \in T, G_i \subseteq A\}$

2− A° هي أكبر مجموعة مفتوحة تقع داخل A.

3− $A^{\circ} = A$ إذا وفقط إذا كانت A مجموعة مفتوحة.

4− $(\bar{A})^c = (A^c)^{\circ}, (A^{\circ})^c = (\overline{A^{\circ}}), A^{\circ} = (\overline{A^c})^c$

نظرية (2−32): [6]

إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي (X, T) فإن الخواص الآتية محققة.

1− $b(A) = \bar{A} \cap \bar{A}$.

2− $b(A)$ مجموعة مغلقة.

3− $b(A) = b(A^c)$.

4− $b(A) = \bar{A} - A^{\circ}$.

5− $\bar{A} = b(A) \cup A^{\circ}$.

نظرية (2−33): [3]

إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي (X, T) فإن الخواص الآتية محققة:

$b(A) \cap A^\circ = \emptyset$ −1

$b(A) \cap ext(A) = \emptyset$ −2

$A^\circ \cap ext\ (A) = \emptyset$ −3

$A^\circ \cup ext\ (A) \cup b(A) = X$ −4

نظرية (2−34): [5]

اذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي (X,T) فإن الخواص الآتية محققة:

i. $ext\ (A) \subseteq X - A$

ii. $ext\ (A) = ext\ \big(A - ext(A)\big)$

iii. $ext(A \cup B) = ext(A) \cap ext(A) \cap ext(B)$

نظرية (2−35): [5]

إذا كانت A, B مجموعتين جزئيتين من الفضاء (X,T) فإن الخواص الآتية محققة:

1− $\emptyset^\circ = \emptyset\ , X^\circ = X$

2− $A^\circ \subseteq A$

3− $A \subseteq B \Longrightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$

4− $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

5− $(A^\circ)^\circ = A^\circ$

6−$A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \subseteq B)^\circ$

الامثلة الآتية توضع متى تكون أي مجموعة A جزئية من الفضاء التوبولوجي مغلقة أو مفتوحة ذلك بالاعتماد على حدية A.

مثال (2−36): [8]

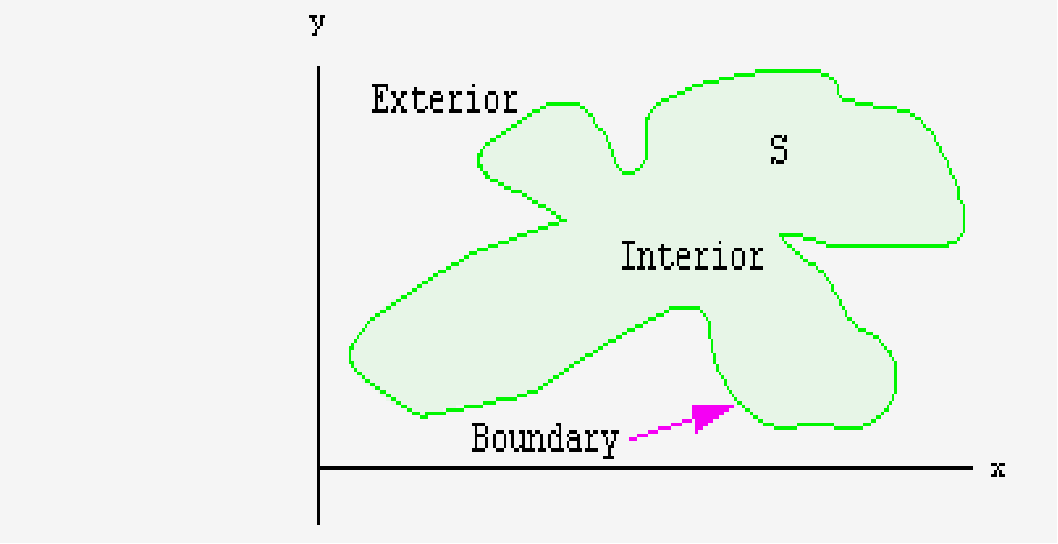
A مفتوحة ومغلقة إذا وفقط إذا كان $b(A) = \emptyset$

الحل:

$(\Longrightarrow)$ نجد ان:

ولكن $A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}$ إذا $A = A^\circ = \bar{A}$

وحيث أن A مجموعة مفتوحة ومغلقة فإن $A = A^\circ = \bar{A}$ إذا $b(A) = \bar{A} - A^\circ$



-Chapter Three- الفصل الثالث
طرق توليد التوبولوجيات (Methods of generating topologies)

بفرض أن X مجموعة اختيارية وغير خالية بتوليد توبولوجي معرف على X نعنى بذلك اختيار عائلة T من المجموعات الجزئية من X والتي تحقق الشروط (3) (2) (1) *أي العائلة* T *بحيث يكون* (X,T) فضاء توبولوجي سوف نتعرض في هذا الفصل لعدة طريق لتعريف

توبولوجي على مجموعة خلاف التي اوردناها في الفصل الثاني وذلك عن طريق تقديم بعض المفاهيم مثل نظم الجوار- الاساس – الاساس الجزئي- التوبولوجي النسبي.

البند (1) الجوار وأنظمة الحوار (**Neigh boohooed and Neigh boohooed systems**):

<u>تعريف (3−1−1): Neighborhood: [6]</u>

في الفضاء التوبولوجي (X,T), إذا كانت $P \in X$ $N \subseteq X$ يقال أن المجموعة N مجموعة مفتوحة $U \in T$ بحيث أن $P \in U \subseteq N$ أي أن $Nis\ and\ d\ of\ P \Leftrightarrow \exists \in T\ s.t. P \in U \subseteq N$ مجموعة كل مجموعات الجوار للنقطة P تسمى أنظمة الجوار إذا وجدت مجموعة مفتوحة $U \in T$ بحيث أن $P \in U \subseteq N$ أي أن:

ملاحظة: N جوار للنقطة P يكافي أن P نقطة داخلية للمجموعة N أي أن: $N \in N_p \Leftrightarrow P \in N^\circ$

<u>مثال: (3−1−2) [8]</u>

1− نفرض الفضاء التوبولوجي (X,T) حيث أن $X = \{a,b,c\}$ $T = \{X, \emptyset, \{b\}, \{b,c\}\}$ اوجد الجوارات للنقاط التي تنتمي إلى المجموعة X

الحل:

الجوار الوحيد للنقطة a هو مجموعة X.

بالنسبة للنقطة b فإن المجموعات الاربعة $\{b\},\{b,c\},X,\{a,b\}$ هي جوارات للنقطة b حيث أن كل منها يحتوي على المجموعة المفتوحة $\{b\}$ والتي تحتوي على العنصر b.

وبالنسبة للنقطة c فإن المجموعات $\{b,c\},X$ هي جوارات للنقطة c.

2- نفرض $X=\{a,b,c,d\}$ ونفرض $T=\{X,\emptyset,\{b\}\}$ من الواضح أن (X,T) فضاء توبولوجي. نجد ان المجموعة $\{b,c\}$ هي الجوار للنقطة bحيث $b\in\{b\}C\{b,c\}$ ونلاحظ ان المجموعة $\{b,c\}$ ليست مفتوحة حيث انها لا تنتمي إلى التوبولوجي T.

3- نفرض الفضاء التوبولوجي (X,T) حيث $T=X=\{a,b,c,d\}$ $\{X,\emptyset,\{a\},\{a,b\}\}$ المجموعة $A=\{a,b,c\}$ تعتبر جوار للنقاط a,b حيث $b\in\{b\}\subseteq A, a\in\{a\}\subseteq A$ ايضاً $a,b\in\{a,b\}\subseteq A$ ولكن المجموعة A ليست جوار للنقطة c الجوار الوحيد في هذا المثال للنقطة c هو المجموعة X.

<u>مثال: (3-1-3) : [8]</u>

نفرض الفضاء التوبولوجي (X,T) حيث أن

$X=\{a,b,c,d\}, T=\{X,\emptyset,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ أوجد مجموعة الجوارات للنقاط$X=\{a,b,c\}$ a,b,c,d

الحل:

$Na=\{N\subseteq$

$=\{\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,b,c\},\{a,c,d\},\{a,b,d\},X\}$

$Na=\{N\subseteq X:\{a\}\subseteq N\}$

$$= \{\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},X\}$$

$$N_c = \{N \subseteq X : \{a,b,c\} \subseteq N\} = \{\{a,b,c\},X\}$$

$$N_d = \{N \subseteq X : X \subseteq N\} = \{X\}$$

مثال: (3−1−4): [8]

في الفضاء العادي (R,u) إذا كانت $N = [0,\frac{3}{2}]$ نجد ان $N \in N_1$ لان $1 \in CN: \left(0,\frac{3}{2}\right)$ ولكن $N \notin N_0$ وايضاً $N \in N_{\frac{3}{2}}$ حيث لا توجد مجموعة مفتوحة (فترة مفتوحة) تحتوي O وتقع بأكملها داخل N.

مثال (3−1−5): [8]

في الفضاء (X,T) , $\forall P \in X \Longrightarrow NP = \{N \subseteq X : P \in N\}$ أي أن لكل $N \subseteq X$ إذا كانت $P \in N$ فإن $N \in N_p$.

مثال(3−1−6): [8]

في الفضاء التوبولوجي (X,T) لأي نقطة $P \in X$ نجد أن:

نظرية (3−1−7): [8]

المجموعة الجزئية A من الفضاء التوبولوجي (X,T) تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت A جوار لجميع نقاطها أي أن: $\forall P \in A ;\ A \in N_p \Leftrightarrow$ مفتوحة A

ملاحظة (3−1−8): [8]

1- من البديهي أن نرى انه إذا كانت N جوار للنقطة P فإن أي مجموعة جزئية من X تحتوي N تكون ايضاً جوار للنقطة P.

2- من السهل أن نرى أن تقاطع جوارين للنقطة P هو ايضاً جوار للنقطة P.

النظرية التالية تقدم مسلمات نظام الجوار لنقطة في أي فضاء توبولوجي وبواسطة هذه المسلمات يمكن تكوين توبولوجي يسمى التوبولوجي المولد بواسطة نظام الجوار.

<u>نظرية (3-1-9): [8]</u>

بفرض أن (X,T) فضاء توبولوجي فإن نظام الجوار $\{NP: P \in N\}$ يحثث الملمات الآتية:

N_1) $N_p \neq \emptyset \; and \; P \in Ni \; \forall N \in N_p$

N_2) $If \; N \in N_p, N \subseteq M \Longrightarrow M \in N_p$

N_3) $If \; N_1, N_2 \in N_p \Longrightarrow N_1 \cap N_2 \in N_p$

N_4) $\forall N \in N_p \Longrightarrow \exists M \subseteq N, M \in N_p$

بحيث أن $M \in N_p \; \forall q \in M$

N_1) حيث أن X مجموعة مفتوحة تحتوي P لكل $P \in X$ *فإن* $X \in N_p$ ومن ثم فإن $N_p \neq \emptyset$ ايضاً $P \in N$ *لكل* $N \in N_p$.

N_2) نفرض أن $N \in N_p \; , N \subseteq M$ فإنه يوجد $U \in T$ بحيث $P \in U \subseteq N$ وحيث ان $N \subseteq M$ فإنه يوجد $U \in T$ بحيث ان $P \in U \subseteq M$ وعليه يكون $M \in N$.

N_3) نفرض أن $N_1, N_2, \in N_p$ فإنه توجد مجموعتان $U.V \in T$ بحيث $P \in U \subseteq N_2$ وعليه فإن $P \in U \cap V \subseteq N_1 \cap N_2$ وحيث أن $U \cap V \in T$ فإن $N_1 \cap N_2 \in N_p$.

N_4) نفرض أن $N \in N_p$ *إذا يوجد* $M \in T$ بحيث $P \in M \subseteq N$ ومن ذلك نجد ان $P \in M \subseteq M$ أي ان $M \in N_p$ وحيث أن M مجموعة فعلية تكون أي نقطة $q \in M$ هي نقطة داخلية للمجموعة M ومن ثم فإن $M \in N_q;\ \forall q \in M$.

ملاحظات (3−1−10): [8]

1− من الخاصية (N_3) يمكن القول بأنه إذا كانت $N_1, N_2, \dots\ N_n \in N_p$ فإن $\bigcap_{i=1}^{n} N_i \in N_p$ ايضاً.

2− من نظرية (3−1−7) اتضح ان كل مجموعة مفتوحة هي حوار لكل النقاط التي تنتمي اليها, والسؤال الآن هو هل العملية العكسية لهذه النظرية الصحيح؟ أي هل يمكن تكوين توبولوجي على X باعتبار ان المجموعات المفتوحة هي تلك المجموعات التي تكون جوارات لكل نقطاها؟ النظرية التالية سوف تجيب على هذا السؤال وتعطى الشروط الواجب أن تحققها أنظمة الجوار لكي تعين توبولوجي على X.

نظرية (3−1−11): [8]

نفرض ان X مجموعة غير خالية ولكل $P \in X$ نفرض أن M_p هي عائلة كل المجموعات الجزئية من X التي تحقق الشروط $(N_1) - (N_n)$ في النظرية (3−1−9) فإنه يوجد توبولوجي وحيد $T = \{U \subseteq X: \forall P \in U \Longrightarrow UM_p\}$ بحيث أن M_p تتطابق مع انظمة الجوار للنقطة P.

البرهان: فما يلي برهن أن العائلة T تمثل توبولوجي على X.

(01) بما ان $X \in M_p;\ \forall P \in X$ فإن $X \in T$ ايضاً $\emptyset$ تحقق تعريف الجوار وعليه فإن $\emptyset \in T$.

(02) نفــرض ان $U_1, U_2 \in T$ وســوف نبــرهن أن $U_1 \cap U_2 \in T$ نفــرض ان $P \in U_1 \cap U_2$ فـإن $P \in U_1$, $P \in U_2$ وعليـه $U_1 \in M_p$ $U_2 \in M_p$ مـن (N_3) نحصـل علـى $U_1 \cap U_2 \in M_p \forall P$ وعليـه نحصـل علـى $U_1 \cap U_2 \in T$.

(03) نفرض ان $U_i \in T\ ;\ \forall i$ وسوف نبرهن أن $\bigcup_i \in T$ بفرض ان $P \in \bigcup_i U_i$ فإنـه يوجــد U_{io} بحيــث $P \in U_{io}$ إذا $U_{io} \in M_p$ لكــل $P \in U_{io}$ وحيــث أن $U_{io} \subseteq \bigcup_i U_i$ وباستخدام (N_2) نحصل على:

$\bigcup_i U_i \in M_p$ لكل $P \in \bigcup_i U_i$ اي ان $\bigcup_i U_1$ إذا T تمثل توبولوجي على X.

والمطلوب الآن اثبات أن M_p تتطابق مع أنظمة الجوار في الفضاء التبولوجي (X,T) أي ان $M_p = N_p$ لذلك نفرض $N \in M_p$ فاته من الشروط (N_u) نجد انه توجد M حيث $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$ تحقق $M_c M_p, P \in M \subseteq N$ لكل $\mathrm{P} \in \mathrm{M}$ وهذا يعني أن M جوار لكل نقطة فيها وبالتالي فهي مجموعة مفتوحة $M \in T$. ومن ثم فإن $N \in N_p$اي N جوار النقطة P فــي الفضــاء (X,T) اذا توجــد مجموعــة مفتوحــة $U \in T$ بحيــث $P \in U \subseteq N$ وحيث$U \in T$ فإن $U \in M_p$ ومن الشروط (N_2) نجد ان $N \in M_p$ اي ان $N_p \subseteq M_p$ ومن ذلك نستنتج أن $N_p = M_p$ وهو المطلوب.

<u>مثال (3-1-12): [8]</u>

بفرض أن N_p هي عائلة جوارات النقطة P في الفضاؤ التوبولوجي (X,T) $N_i \in N_p$ لجميع قيم $i = 1,1, \ldots$ بين ان $\bigcap_i N_i \notin N_p$.

الحل:

نعتبر الفضاء التوبولوجي العادي (R,u) $n \in N\ , n \neq 0$ $N_n = [\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}]$ وعليه تكون N_n جوار للصفر لكل $n \in N$ أي أن $N_n \in N_0$ ولكن $\bigcap_n N_n = \{0\}$ ولا توجد مجموعة مفتوحة (فترة مفتوحة) تحتوي الصفر وتقع بأكملها داخل المجموعة $\{0\}$ ومن ثم فإن $\bigcap_n N_n \notin \{N_O\}$.

<u>مثال (3−1−13): [8]</u>

في فضاء المكملات المنتهية (X,C) $P \in X$ اثبت ان $N_p \subseteq C$.

الحل:

نفرض أن $N \in N_p$ ومن تعريف الجوار توجد مجموعة مفتوحة U تحقق $P \in U \subseteq N$ ومن ذلك نحصل على ان $N^c \subseteq U^c$ ولكن U^c منتهية (لأن U مجموعة مفتوحة) إذا N^c منتهية وبالتالي $N \in C$ وعليه فإن $N_p \subseteq C$.

<u>مثال (3−1−14): [8]</u>

لتكن R مجموعة الاعداد لحقيقة N_x عائلة المجموعات الجزئية من R التي تحوي فترة تحتوي x أي أن:

نجد ان N_x تحقق الشروط الواردة في نظرية (3−1−9).

وبالتالي يوجد توبولوجي وحيد على R بحيث تكون N_x انظمة جوار للنقطة x وهو:

أي أن المجموعة G تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت لكل نقطة x من G فإن G تحوي فترة مفتوحة تحتوي x وهذا يكافئ أن G هي اتحاد فترات مفتوحة, وعليه تكون T هي التوبولوجي العادي والفضاء (X,T) هو الفضاء العادي.

البند (2): الاساس والاساس الجزئي (Base and sub base):

تعريف (3−2−1): (الاساس Base) [7]

في الفضاء التوبولوجي (X,T) العائلة $\beta \subseteq T$ تسمى اساس **(base)** للتوبولوجي T إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة مفتوحة هي عبارة عن اتحاد عناصر من العائلة β أو بمعنى مكافئ يقال أن β اساس التوبولوجي T إذا وفقط إذا كان لكل $P \in U$ حيث $U \in T$ يوجد $B \in \beta$ بحيث يكون $P \in B \subseteq U$.

مثال (3−2−2): [8]

في الفضاء العادي (R,u) عائلة الفترات المفتوحة $\beta = \{(a,b): a,b \in R\}$ تمثل اساس على R لأنه لأي مجموعة مفتوحة U في R توجد فترة مفتوحة $(P-S,P+S)$ بحيث أن $P \in (P-S,P+S) \subseteq U$.

مثال (3−2−3): [8]

عائلة $\beta = \{\{P\}: P \in X$ تمثل اساس للتوبولوجي المنفصل D على X.

مثال (3−2−4): [8]

نفرض الفضاء التوبولوجي (X,T) حيث أن $X = \{a,b,c,d\}$ وليكن $T = \{X,\emptyset,\{a,b\},\{c,d\}\}$ فإن $\beta_1 = \{\{a,b\},\{c,d\}\}$ تمثل اسا للتوبولوجي T كذلك المجموعة $\beta_2 = \{X,\{a,b\},\{c,d\}\}$ تمثل اسا للتوبولوجي T. أما المجموعة

$\beta_3 = \{X, \{a, b\}\}$ لا تمثل اساس للتوبولوجي T لأن $\{c, d\}$ مجموعة مفتوحة ولا يمكن التعبير عنها كاتحاد عناصر من β_3.

❖ السؤال الذي يطرح نفسه الآن هو ما هي الشروط التي يجب ان تحققها العائلة $\beta \subseteq P(X)$ لكي تكون اساس للتوبولوجي X؟ وقبل الإجابة على هذا السؤال نسوق المثال التالي

مثال (3−2−5): [8]

نفرض أن $X = \{a, b, c, d\}$ وأن $\beta = \{\{a, b\}, \{b, c\}\} \subseteq P(X)$ ولو افترضنا أن هناك توبولوجي T معرف على X هل β تمثل اسا لهذا التوبولوجي؟ ليكن T توبولوجي معرف على X وهذا يلزم أن يكون $\beta \subseteq T$ ومن ثم فإن $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \in$ $\{a, b\}, \{b, c\} \in T$ إذاً T لكن المجموعة المفتوحة $\{b\}$ لا يمكن التعبير عنها كاتحاد عناصر من β وكذلك X لا يمكن التعبير عنها كاتحاد عناصر من β.

ملاحظة: (3−2−6): [8]

مثال (3−2−5) يجعلنا نستنتج أن اختبار β جب أن يتوفر فيه الشروط التالية:

i. $B_1, B_2 \in B \Longrightarrow B_1 \cap B_2 = \cup \{B_i : B_i \in \beta\}$
ii. $X = \cup \{B : B \in \beta\}$

النظرية التالية تعطي الشروط الضرورية والكافية لكي تكون عائلة من المجموعات الجزئية من X تمثل اساس لتوبولوجي ما على X.

نظرية (3−2−7): [6]

إذا كانت β عائلة من المجموعات الجزئية غير خالية من X فإن β اساس التوبولوجي على X إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية

i. $X = \cup \{B: B \in \beta\}$

ii. $\forall B_1, B_2 \in \beta \Longrightarrow B_1 \cap B_2 = \{B_i: B_i \in \beta\}$

أو بمعنى آخر:

$$\forall B_1, B_2 \in \beta, \forall P \in B_1 \cap B_2 \Longrightarrow \exists\, B_3 \in \beta, P \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$$

البرهان:

أولاً: نفرض أن β اساس للتوبولودجي T على X:

i. $X \in T \Longrightarrow X = \cup \{B: B \in \beta\}$

ii. $If\ B_1, B_2 \in \beta \Longrightarrow B_1, B_2 \in T \Longrightarrow B_1 \cap B_2 \in T \Longrightarrow B_1 \cap B_2 = \cup \{B_i: B_i \in \beta\}$

ثانياً: نفرض أن β عائلة كل المجموعات الجزئية من X التي تحق الشرطين (i) , (ii) وان T عائلة كل المجموعات الجزئية من X التي يمكن التعبير عنها كاتحاد عناصر من β أي ان $T = \{U \subseteq X: U = \cup B_i: B_i \in \beta\}$

سوف نبرهن أن T تشكل توبولوجي على X وبالتالي β اساس لهذا التوبولوجي.

1) من التعريف والخاصية (i) نجد أن $\emptyset = \cup, \emptyset \in \beta$ $X \in T$ أي أن $\emptyset$ هي اتحاد المجموعات الخالية من β وعليه يكون $X, \emptyset \in T$.

2) إذا كان $U_1, U_2 \in T$ فإن $U_1 = \cup \{B_i, B_i \in \beta\}$ $U_2 = \cup \{B_j: B_j \in \beta\}$ من ذلك نجد ان $U_1 \cap U_2 = \left(\bigcup_i B_i\right) \cap \left(\bigcup_j B_j\right) = \cup\ (B_i \cap B_{i)}$ ومن الخاصية (ii) $B_i \cap B_j$ عبارة عن اتحاد عناصر من β وعليه يكون $U_1 \cap U_2 \in \cup \{B_K: B_K \in \beta\}$ $U_1 \cap U_2 = \cup \{B_K: B_K \in \beta\}$ اي ان T.

3) نفرض أن $U_i \in T$ اذا $\forall$, $U_i = \cup \{B: B \in \beta\}$ وعليه يكون $U_i \cup [\{\cup B_K: B_K \in \beta\}]$ ومنها نحصل على $\cup U_i \in T$.

ملاحظـة: التوبولـوجي T المعـرف فـي النظريـة السـابقة يسـمى التوبولـوجي المولـد بواسـطة الاساس β وهو التوبولوجي الوحيد على X الذي له الاساس β.

وبالتالي من هذه النظرية نستنتج أن:

إذا كانت X غير خالية $\beta \subseteq P(X)$ عائلة من المجموعات الجزئية من X وتحققق الشروط (i) , (ii) فـإن العائلـة T المؤلفـة ممـن كـل مجموعـات الجزيئـة مـن X التـي تسـاوي اتحـاد عناصر من β تعرف توبولوجي حيد على X تكون β اساس لـه ومن ابسط الامثلـة علـى ذلك عائلة الفترات المفتوحة في R تحقق الشروط (i) , (ii) وبالتالي يوجد على R توبولوجي وحيد اساسـه هـذه العائلـة وكـل مجموعـة مفتوحـة فيـه اتحـاد الفتـرات وبالتـالي نحصـل علـى الفضـاء العـادي سوف نتعرض إلـى نوعين من التوبولوجي علـى خط الأعداد الحقيقة يسمى الاول توبولوجي النهاية العليا **(upper limit topology)** والاخر يسمى توبولوجي النهاية السفلى **(lower limit topology)** وهذا كما يلي:

<u>مثال (3−2−8): [8]</u>

نفرض ان:

i. $\beta_1 = \{(a,b): a,b \in R, a < b\}$

ii. $\beta_2 = \{(a,b): a,b \in R, a < b\}$

ثبت الآن أن كل من β_1 , β_2 اساسين لتوبولوجين ما على R

(i) (a) $R = \cup \{B : B \in \beta_1\}$ لأن لأي عدد حقيقي $x \in R$ يوجد له مجموعة نصف مفتوحة (a,d] بحيث أن: $x \in (a,b] \subseteq R$

(b) إذا كانت $(a,b],(c,d]$ فإن

$$\begin{cases} \emptyset; if\ a < b < c < d \\ (c,b]; if\ a < c < b < d \\ (a,b); if\ c < a < d < b \\ (a,b); if\ c < a < b < d \end{cases}$$

أي ان تقاطع عنصرين من β_1 هو عنصر من β_1.

إذا β_1 اساس التوبولوجي T على R وطبقاً لنظرية (3-2-7) إن التوبولوجي T يحتوي على كل العناصر التي هي عبارة عن اتحاد عناصر من β_1. إذاً T توبولوجي على R يسمى توبولوجي النهاية العليا, ويجب ان نلاحظ أن هذا التوبولوجي ليس هو التوبولوجي العادي u على R بل $u \subseteq T$ لأن أي فترة مفتوحة (a,b) يمكن التعبير عنها كاتحاد عناصر من β_1 :

$(a,b) = \cup \left\{a, b - \frac{1}{n}\right] : n \in N\}$ والفترات المفتوحة أساس للتوبولوجي u وبذلك يكون التوبولوجي العادي u اصغر من توبولوجي النهاية العليا على R.

بالمثل يمكن اثبات أن β_2 هو اساس لتوبولوجي T على R ويسمى T توبولوجي النهاية الدنيا.

ملاحظة: يجب أن نلاحظ هنا بانه على مجموعة الأعداد الحقيقة R يمكن تعريف عديد من التوبولوجيات ولكن عندما نقول التوبولوجي العادي (الحقيقي) نقصد بذلك التوبولوجي u المعرف في الباب الثاني والذي فيه الفترات المفتوحة هي مجموعات جزئية من المجموعات المفتوحة.

تعريف (3−2−9): الاساس الجزئي (sub base): [7]

نفرض ان (X,T) فضاء توبولوجي العائلة $S \subseteq T$ تسمى أساس جزئي للتوبولوجي T على X إذا وفقط إذا كانت التقاطعات المنتهية من عناصر S هي اساس للتوبولوجي T.

مثال (3−2−10): [8]

نفرض $X = \{a,b,c,d\}$ نعرف التوبولوجي T على X كما يلي:

$T = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{a,c,d\}$ وبفرض أن $S = \{\{a,c\},\{a,d\}\}$ بالتالي فإن التقاطعات المنتهية من عناصر S هي $\beta = \{\{a\},\{a,c\},\{a,d\},X\}$

(لاحظ أن $X \in \beta$ لأنها التقاطعات الخالية من عناصر S) وحيث أن β اساس للتوبولوجي T فإن S اساس جزئي T.

نظرية (3−2−11): [8]

نفرض أن (R,u) الفضاء العادي فإن: $S = \{(a,\infty),(-\infty,b): a,b \in R, a < b\}$ اساس جزئي للتوبولوجي u لأن $(a,\infty),(-\infty,b) = (a,b)$ وحيث أن عائلة الفقرات المفتوحة تكون اساس التوبولوجي على R فغن S اساس جزئي.

ملاحظة: أي اساس للفضاء التوبولوجي يكون اساس جزئي ولكن العكس غير صحيح وهذا يتضح من مثال **(3−2−11)**.

مثال (3−2−12): [8]

في الفضاء المنفصل (X,D) العائلة $S = \{\{a,b\}: a,b \in X\}$ اسا جزئي للتوبولوجي D ولتوضيح ذلك بفرض أن $D = \{a,b,c\}$ ناخذ الصورة:

$D = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, d\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ فـــــــــإن العائلـــــــــــة $S =$ $\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ اسا جزئي وذلك التي تشكل اساس للتوبولوجي D.

<u>نظرية (3-2-13): [8]</u>

العائلة $S \subseteq P(X)$ تكون اساس جزئي لتوبولوجي وحيد على X.

البرهان:

بفرض أن العائلة β تتكون عناصرها من التقاطعات المنتهية من عناصر S ومن ثم فإن المطلوب اثبات أن β اساس للتوبولوجي T.

i) حيث أن X هي التقاطعات الخالية من عناصر S فإن $X = \{\cup$ $\{B : B \in \beta\}$ (ليس من ضروري أن يكون X احد عناصر S).

ii) نفرض أن $U_1, U_2 \in \beta$ ومن ثم فإن كلاً من U_1, U_2 عبارة عن تقاطع عدد منته من عناصر S وبالتالي فإن $U_1, U_2 \in \beta$ والآن إن $x \in U_1 \cap U_2$ فإنه يوجـــد $B_1, B_2 \in \beta$ بحيـــث ان $x \in B_1 \cap B_2 \subseteq$ $U_1, U_2 \in \beta$ وعليه فإن β تحقق الشرط (ii).

وبفرض أن S اساساً جزئياً لكل من التوبولوجي T, T^* سوف تثبت أن $T = T^*$ أي أن التوبولوجي المولد بأساس جزئي يكون وحيد لذلك نفرض أن $S =$ $\{S_i : i \in I\}$ اساس جزئي لـ T^*, T نفرض أن $G \in T$, إذا $G =$ $\bigcup_{i \in I} (\bigcap_{ni}^{m} S_{ni})$ وحيث أن S اسا جزئي لـ T^* فإن $S \subseteq T^*$ وعليه فإن $S_{ni} \in T^*$ ومنها $\bigcap_{ni=1}^{m} S_{ni} \in T^*$ إذا

$G = \bigcup_{i \in I} (\bigcap_{ni}^{m} S_{ni}) \in T^*$ وعليه نحصل على $T^* \subseteq T$ وبنفس الطريق يمكن اثبات أن $T \subseteq T^*$ إذا $T = T^*$ من هذه النظرية نستطيع القول بانه إذا كانت $S \subseteq P(X)$ حيث $X = \cup \{S_i : S_i \in S\}$ فإن S تكون اساس جزئي لتوبولوجي وحيد على X كذلك $S \cup \{X\}$ اساس جزئي لتوبولوجي حيد فيه عناصر S مجموعات مفتوحة.

مثال (3-2-14): [8]

نفرض $X = \{a, b, c, d\}$ ونفرض ان $S = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{sd\}\}$ مجموعة جزئية اختيارية من X إذا عائلة كل التقاطعات لعناصر S هي:

$$\beta = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{d\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

$$T = \{X, \emptyset, \{d\}, \{b$$

مثال: (3-2-15): [8]

لتكن $X = \{a, b, c, d\}$, $S = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}$ هل S اساس جزئي للتوبولوجي:

الحل:

$\{a\} \cap \{a\} = \{a\}, \{c\} \cap \{c\} = \{c\}$

$\{a, b\} \cap \{a, b\} = \{a, b\}, \{a\} \cap \{c\} = \emptyset$

$\{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$

إذاً $\beta = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}\}$

واضح أن β تشكل اساس للتوبولوجي T إذاً S اساس جزئي للتوبولوجي T .

نظرية (3-2-16): [8]

اذا كانت $S \subseteq P(X)$ تجمع من المجموعات الجزئية الغير خالية من X فإن التوبولوجي T_s المولد بالأساس الجزئي هو اصغر توبولوجي يحتوي على S.

البرهان:

نفرض ان T_i تجمع التوبولوجيات التي يحتوي كل منها على S, $T^* = \bigcap_i T_i$ المطلوب اثبات أن $T^* = T_s$ واضح أن $T^* \subseteq T$ نفرض ان $G \in T_s$ **إذا** $G = \bigcup_{i \in I} (\bigcap_{ni}^{m} Sni)$ وحيث أن S اساس جزئي لـT_s, $Sni \in S$ وحيث أن $S \subseteq T^*$ فإن $Sni \in T^*$ ومن ثم فإن $(\bigcap_{ni}^{m} sni) \in T^*$, وعلي تكون $G = \bigcup_{i \in I} (\bigcap_{ni}^{m} Sni) \in T^*$ ومنها نحصل على $Ts \subseteq T^*$ إذا $T_s = \bigcap_i T_i$ أي أن التوبولوجي T_s على X المولد بواسطة S هو تقاطع كل التوبولوجيات على X التي تحتوي على S ومن ثم فإن T_S هو اصغر توبولوجي يحتوي على S ومن ثم فإن T_S هو اصغر توبولوجي يحتوي على S.

مثال (3-2-17): [8]

إذا كانت $X = \{a, b, c, d, e\}$, $S = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, e\}, \{e\}\}$ اوجد اصغر توبولوجي على X يحتوي على S.

الحل:

واضح أن $\beta = \{X, \emptyset, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,e\}, \{e\}, \{b\}\{c\}\}$

اساس لأصغر توبولوجي على T_S وبناء على نظرية سابقة حيث

$T = \{X, \emptyset, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,e\}, \{e\}, \{b\}\{c\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,e\}\{a,b,e\},$

$\{b,c,e\}, \{b,e\}\}$

المثال التال يوضح انه يمكن تكوين توبولوجي يحتوي ضمن عناصره مجموعات معلومة (اي التوبولوجي المولد بواسطة عائلة من المجموعات)

<u>مثال (3−2−18): [8]</u>

بفرض ان $X = \{a,b,c,d,e\}$ كون التوبولوجي T على X الذي يحتوي ضمن عناصره المجموعات التالية: $\{a,b,c\}, \{b,c,d\}, \{c,d\}$

الحل:

أولاً: أي توبولوجي على X لا بد وأن يحتوي على $X, \emptyset$ وهذا يحقق الشرط (01).

ثانياً: حيث أن $\{a,b,c\}, \{b,c,d\}, \{c,d\} \in T$

فإنه لكي يتحقق الشرط (02) من تعريف التوبولوجي يلزم لذلك أن:

$\{a,b,c\} \cap \{$

$\{b,c,d\} \cap \{$

$\{a,b,c\} \cap \{$

وبذلك نجد ان

$\{X, \emptyset, \{a,b,$

ولكي يتحقق الشرط (03) من تعريف التوبولوجي يلزم بذلك أن:

$\{a,b,c\} \cup ($

وايضاً اتحاد بعض المجموعات محققة تلقائياً ولهذا لم تركز عليها مثل:

$\{c\} \cup \{c,d\} = \{c,d\}$ كلها موجودة.

وبالتالي فإن التوبولوجي المطلوب هو:

$T = \{X, \emptyset, \{$

<u>مثال (3−2−19): [8]</u>

بفرض ان $X = \{a,b,c,d\}$ كون التوبولوجي T على X الذي له أقل رتبة ممكنة المولد بواسطة العائلة $A = \{\{a,b\{,\{b,d\},\{a,c,d\}\}$ أي عناصر A ضمن عناصر T.

الحل:

أولاً: أي توبولوجي على X لا بد وأن يحتوي على $X,\emptyset$ إذا $X,\emptyset \in T$.

ثانياً: التقاطعات المحدودة لعناصر A هي:

$\{a,b\} \cap \{b,$

$\{a,b\} \cap \{a,$

$\{b,d\} \cap \{a,$

إذاً $\beta = \{X,\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,d\},\{a,c,d\}\} \subseteq T$

ثالثا: اتحادات عناصر β هي:

$T = \{X, \emptyset, \{$

مثال (3−2−20): [8]

عين التوبولوجي T على R المولد بواسطة كل الفترات المغلقة $[a, a+1]$ حيث $a \in R$ التي طولها يساوي الواحد.

الحل:

بفرض أن $P \in R$ فإن $[P-1, P] \cap [P, P+1] = \{P\}$

وحيث أن $\beta = \{\{P\}: P \in R\}$ اساس للتوبولوجي T فإن T يتطابق مع التوبولوجي المنفصل D على R.

تعريف (3−2−21): الاساس المحلي (Local base): [6]

نفرض أن (X, T) فضاء توبولوجي عائلة كل المجموعات المفتوحة β_p والتي تحتوي P تسمى أساس محلى عند النقطة P إذا وفقط إذا كان:

$\forall U \in T, P \in U \Longrightarrow \exists B \in \beta_p, P \in B \subseteq U$ أو إذا وفقط إذا كانت β_p هي اصغر مجموعة مفتوحة تحتوي P.

مثال: (3−2−22): [8]

نفرض $X = \{a, b, c\}$, نعرف التوبولوجي T على X كما يلي: $T = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$

فإن:

نظرية (3-2-23): [7]

إذا كان β اساس للتوبولوجي T على X أن $P \in X$ فإن كل عناصر الاساس التي تحتوي P تكون اساس محلى عند النقطة P أي أن: $\beta_p = \{B: P \in B\}$ اساس محلى عند P.

البرهان:

بفرض أن U مجموعة مفتوحة $P \in U$ حيث أن β اساس للتوبولوجي T فإنه يوجد $B \in \beta$ بحيث أن $P \in B \subseteq U$ إذا $B \in \beta_p$ بحيث أن $P \in B \subseteq U$ وعليه يكون β_p اساس محلى عند P.

نظرية (3-2-24): [8]

إذا كان (X, T) فضاء توبولوجي $P \in X$ فإن النقطة P تكون نقطة نهاية للمجموعة $A \subseteq X$ إذا وفقط إذا كان كل عنصر من عناصر الاساس المحلى عند P يحتوي على الأقل عنصر من A يختلف عن P, أي أن:

البرهان:

نفرض أن $P \in A^{/}$ اذا $\forall U \in \mathrm{T}, \mathrm{P} \in \mathrm{U}$

$(U - \{P\}) \cap A \neq \emptyset$ وبما أن $\beta_p \subseteq T$ اذا $\forall B \in \beta$

$(B - \{P\}) \cap A \neq \emptyset$

($\Leftarrow$) نفرض أن $(B-\{P\})\cap A\neq\emptyset$ لكل $B\in\beta_p$ وأن U مجموعة مفتوحة تحتوي P وحيث أن β_p اساس محلى عند P فإنه توجد مجموعة $B\in\beta_p$ بحيث يكون $P\in B\subseteq U$ إذا

$(U-\{P\})\cap A\neq\emptyset, \forall U\in T, P\in U$ وعليه تكون $P\in A^{/}$

مثال (3-2-25): [8]

تعتبر توبولوجي النهاية السفلى T على R حيث $\beta=\{[a,b]: a,b\in R\}$ اساس لهذا التوبولوجي وبفرض أن $A=(0,1)$ فإن المجموعة $U=[1,2)$ من عناصر الاساس تحتوي على العنصر واحد تحقق ان $U\cap A\neq\emptyset$ وعليه فإن $1\notin A^{/}$ ولكن $0\in A^{/}$ لان اي عنصر من عناصر الاساس $B=[a,b)$ حيث $0\in B$ فإن $a\leq 0<b$ وعليه فإن $(B-\{0\})\cap A\neq\emptyset$.

تعريف (3-2-26): [8]

إذا كان (X,T) فضاء توبولوجي, يقال أن:

1- X يتمتع بقابلية العد الاولى (**first countable**) إذا وفقط إذا كان للفضاء X اساس محلى قابل للعد لكل نقطة $P\in X$.

2- X يتمتع بقابلية العد الثانية (**second countable**) إذا وفقط إذا كانت X لها اساس قابل للعد.

3- X فضاء منفصلاً (**separable space**) إذا وفقط إذا كانت X لها مجموعة جزئية كثيفة قابلة للعد (**countable dense**).

مثال (3-2-27): [8]

الفضاء التوبولوجي العادي (R,u) يتمتع بقابلية العد الأولى وذلك لأنه لأي $P \in R$ فإن العائلة:

$$\beta_p = \left\{ \left(P \right. \right.$$

اساس محلى قابل للعد عند النقطة P.

مثال (3−2−28): [8]

الفضاء التوبولوجي العادي (R,u) يتمتع بقابلية العد الثانية وذلك لأن عائلة المجموعات المفتوحة (a,b) حيث $a,b \in R$ تشكل اساس قابل للعد.

مثال (3−2−29): [8]

لتكن X مجموعة غير قابلة للعد, (X,D) الفضاء المنفصل فإن X يتمتع بقابلية العد الأولى ولا يتمتع بقابلية العد الثانية.

مثال (3−2−30): [8]

الفضاء التوبولوجي العادي (R,u) هو فضاء منفصلاً وذلك لاحتوائه على المجموعة الكثيفة Q القابلة للعد.

نظرية (3−2−31): [6]

اذا كان الفضاء X يتمتع بقابلية العد الثانية فإنه يتمتع بقابلية العد الأولى ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح.

البرهان:

أولاً: نفـرض أن X فضـاء يتمتـع بقابليـة العـد الثانيـة $P \in X$ إذاً $\beta_p = \{B \in \beta : P \in B\}$ اساس محلى عندما P حيث β اساس, وحيث أن β قابل للعد فإن β_p قابل للعد أيضاً, إذا X لها اساس محلى قابل للعد ومن ثم فإن X فضاء يتمتع بقابلية العد الاولى.

ثانياً: تبين أنه إذا كان الفضاء X يتمتع بقابلية العد الاولى فإن X لا يتمتع بقابلية العد الثانية بالمثال التالي:

بفـرض أن X مجموعـة غيـر قابلـة للعـد (X, D) هـو فضـاء المنفصـل فـإن: $\beta = \{\{P\} : P \in X\}$ هو اصغر اساس للتوبولوجي D أن β غير قابلة للعد فإن X لا يتمتع بقابلية العد الثانية في حين أن X يتمتع بقابلية العد الأولى لأنه $\forall P \in X \Longrightarrow \beta_p = \{\{P\}\}$.

<u>نظرية (3-2-32): [8]</u>

إذا كان الفضاء X يتمتع بقابلية العد الثانية فإن X لها اساس β قابل للعد نفرض المجموعة $A = \{P \in B_i : B_i \in \beta\}$ وحيث أن β قابل للعد فإن A قابلة للعد, المطلوب ثبات أن A كثيفة في X أي أن $\bar{A} = X$؟

نفرض أن $P \in X, U \in T, P \in U$ إذاً يوجد $B_i \in \beta$ بحيث أن $P \in B_i \subseteq U$ وعليه فإنِ $A \cap B_i \subseteq A \cap U$ ومنها نحصل على $U \cap A \neq \emptyset, \forall U \in T, P \in$ اذا $P \in \bar{A}$ U وعليه يكون $X \subseteq \bar{A}$ ولكن $\bar{A} \subseteq X$ ومن ثم فإن $\bar{A} = X$ إذا A كثيفة وحيث أن A قابلة للعد فإن A كثيفة وقابلة للعد وعليه فإن X فضاء منفصلاً.

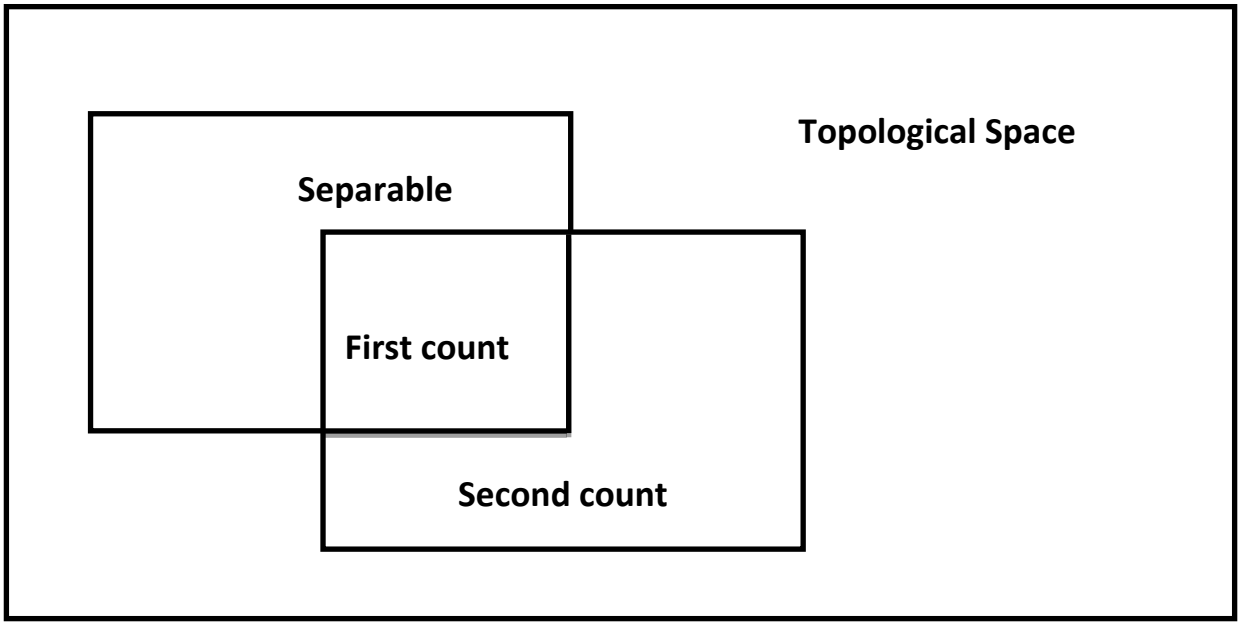
ثانياً: في المثال التالي سوف نوضح أن الفضاء X منفصلاً ولكن لا يتمتع بقابلية العد الثانية:

بفرض أن X غير قابلة للعد (XPp) فضاء النقطة المختارة حيث:

اساس للتوبولوجي P_p وهو اصغر اساس للتوبولوجي P_p إذاً β اساس غير قابل للعد لأن X غير قابلة للعد إذا X لا يتمتع بقابلية العد الثانية في حين أن:

$A = \{P\}$ تعطى $\bar{A} = X$ وعليه فإن X لها مجموعة كثيفة قابلة للعد أي أن X فضاء منفصلاً.

من الأمثلة السابقة يمكن رسم الشكل التوضيحي الآتي:



البند 3: التوبولوجي النسبي والفضاءات الجزئية: (The Relative Topology and subs paces):[4]

إذا كان (X,T) فضاء توبولوجي A مجموعة جزئية فعلية من X نعرف عائلة كل المجموعات من A الناتجة من تقاطع كل المجموعات المفتوحة في X مع المجموعة A ويرمز لها بالرمز T_A أي أن: $V \in T_A \Leftrightarrow \exists U \in Y, V = U \cap A$

النظرية التالية تبرهم أن T_A تمثل توبولوجي على A.

نظرية (3−3−1): [5]

نفرض الفضاء التوبولوجي (X,T), A مجموعة جزئية غير خالية من X العائلة $T_A = \{U \cap A : U \in T\}$ تمثل توبولوجي على المجموعة A.

البرهان:

(01) بما أن $X, \emptyset \in T$ اذا $X \cap A = A \in T_A$

$\emptyset \cap A = \emptyset \in T_A$ وعليه $X, \emptyset \in T_A$.

(02) نفرض $V_1, V_2 \in T_A$ اذاً يوجد $U_1, U_2 \in T$ بحيث

$V_2 = U_2 \cap A, V_1 = U_1 \cap A$ وعليه فإن

$V_1 \cap V_2 = ($

لأن $U_1 \cap U_2 \in T$

(03) نفرض $\{Vi : i \in I\} \subseteq T_A$ إذاً يوجد $U_i \in T$, $Vi = U_i \cap A$

$\left(\bigcup_i : U_i \in T\right.$

إذاً T تشكل توبولوجي على A.

تعريف (3−3−2): [5]

إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء التوبولوجي (X,T) فإن التوبولوجي T_A المعرف على المجموعة A يسمى التوبولوجي النسبي (***Relative Topology***) يسمى الفضاء بالفضاء الجزئي ***subspsce***.

مثال (3−3−3): [8]

نفـــــــرض الفضـــــــاء التوبولـــــــوجي (X,T) حيـــــــث $X=\{a,b,c,d\}$ و $T=\{\{X,\emptyset,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$ اوجد T_c,T_B,T_A .

حيث $A=\{a,d\}$, $B=\{a,b,c\}$, $C=\{a\}$

الحل:

$T_A=\{X\cap A$

$=\{A,\emptyset,\{a\}$

$T_B=\{B,\emptyset,$

$T_c=\{C,\emptyset\}$

<u>ملاحظة: (3−3−4): [8]</u>

(1) في المثال السابق لاحظ ان T_A هو التوبولوجي المنفصل, T_c هو التوبولوجي الغير منفصل بالرغم من ان T ليس توبولوجي منفصل أو غير منفصل على X ونلاحظ ايضاً انه يمكن ايجاد $V\in T_A$ ولكن $V\notin T$ أي هناك مجموعات مفتوحة في A وليست مفتوحة في X .

(2) إذا كانت A مجموعة مفتوحة في الفضاء الكلي (X,T) فإن (A,T_A) يسمى جزئي مفتوح.

<u>مثال (3−3−5): [8]</u>

أي فضاء جزئي من الفضاء المنفصل (غير المنفصل) يكون ايضاً فضاء منفصل (غير المنفصل).

<u>مثال (3−3−6): [8]</u>

في الفضاء التوبولوجي العادي (R,u) إذا كانت $A=[3,8]$ فإن $A\cap(1,5)=[3,5)$ أي أن $[3,5)\in T_A$ ومن ثم فإن $[3,5)$ مجموعة مفتوحة بالنسبة إلى A ولكنها ليست مفتوحة بالنسبة إلى R.

<u>مثال (3−3−7): [8]</u>

إذا كانت X مجموعة غير منتهية $C=\{\emptyset,U\subseteq X: U^c\ finite\}$ ولتكن $A\neq\emptyset$ مجموعة جزئية منتهية من X أوجد T_A.

الحل:

لتكن P نقطة اختيارية من A فإن المجموعة $X-\{A-\{P\}\}$ مفتوحة في X وتقاطعها مع المجموعة A يساوي المجموعة $\{P\}$ أي أن

ومن قم فإن $\{P\}$ مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي A وحيث أن P اختيارية فإن الفضاء الجزئي المعرف على A هو الفضاء المنفصل.

<u>مثال (3−3−8): [8]</u>

في الفضاء العادي (R,u) صف التوبولوجي النسبي u_N حيث N مجموعة الاعداد الحقيقة.

الحل:

لكل $n \in N$ فإن $\left(n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right)$ فترة مفتوحة تحوي n,

لذلك فإن كل مجموعة $\{n\}$ تحتوي على عدد طبيعي هي مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي (N, u_N) وبالتالي فإن كل مجموعة جزئية من N هي مجموعة مفتوحة وعليه يكون u_N هو التوبولوجي المنفصل على N.

نظرية (3-3-9): [8]

إذا كان (A, T_A)فضاء جزئي من الفضاء (X, T) فإن المجموعة الجزئية E من A تكون مغلقة في الفضاء الجزئي إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مغلقة F في الفضاء الكلي بحيث يكون $E = A \cap F$.

البرهان:

نفرض أن E مجموعة مغلقة في الفضاء الجزئي (A, T_A) فإن E^c مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي وبالتالي من تعريف الفضاء الجزئي توجد مجموعة مفتوحة U في الفضاء الكلي بحيث يكون $E^c = U \cap A = A - E$ إذا

$E = A - (A \cap V) = A \cap (A \cap U)^c = A \cup U^c$ ويوضع $U^c = F$ فهي مجموعة مغلقة في X ومن ثم فإنه توجد مجموعة مغلقة F بحيث $E = A \cap F$ والعكس, لنفرض أنه توجد مجموعة مغلقة F في X بحيث يكون $E = A \cap F$ ونحاول اثبات أن E غلقة في A أي E^c مفتوحة في A

$E^c = A - E$

$\therefore E^C = A \cap$

$= (A \cap A^C)$

وبالتالي فإن المجموعة E^c مفتوحة في الفضاء الجزئيA .

نتيجة (3-3-10): [8]

إذا كانت A مجموعة جزئية مفتوحة (مغلقة) وغير خالية من الفضاء التوبولوجي (X,T) فإن المجموعة B من الفضاء التوبولوجي الجزئي (A,T_A) تكون مفتوحة (مغلقة) إذا وفقط إذا كانت B مفتوحة في الفضاء الكلي (X,T).

نظرية (3-3-11): [8]

ليكن (A,T_A) فضاء جزئي من الفضاء الكلي (X,T) , N مجموعة جزئية من A فإن:

$N \in (VN_X)A \Leftrightarrow \exists V \in N_X, N = A \cap V$ اي تكون N جوار للنقطة x في الفضاء الجزئي إذا وفقط إذا وجد جوار V للنقطة x ي الفضاء الكلي بحيث يكون $N = A \cap V$

البرهان:

$(\Longrightarrow)$ نفرض $N \in (N_X)a$ إذاً يوجد $H \in T_A$ و $x \in H \subseteq N$ وعليه يوجد $G \in T$ بحيث $H = A \cap G$ إذاً $V = G \cup N \in N_X$.

$G \cup N$ جوار للنقطة x في الفضاء الكلي والآن

إذا يوجد V للنقطة x في الفضاء الكلي بحيث أن $N = V \cap A$.

لتكن N مجموعة من الفضاء الجزئي $V, (A,T_A)$ جوار للنطقة x في الفضاء الكلي (X,T) بحيث أن $N = V \cap A$ الفضاء الكلي (X,T) بحيث ان $N = A \cap V$.

وعليه يوجد $x \in G \subseteq V, G \in T$ إذاً

$x \in (G \cap A) \subseteq (V \cap A) \subseteq V$ ومن ثم فإن $N \in (N_X)A$.

نظرية (3-3-12): [8]

إذا كـــان (A,T_A) فضـــاء جزئـــي مـــن الفضـــاء الكلـــي (X,T) اذا كانـــت $\beta=\{B_i\}_{i\in I}$ اسـاس للفضـاء الكلـي فـإن $\beta^*=\{B_i\cap A\}_{i\in I}$ تشـكل اسـاس للفضـاء الجزئي.

البرهان:

بفـــرض أن $\beta=\{B_i\}_{i\in I}$ اســـاس للتوبولـــوجي T إذا $\forall U\in T, P\in U\Longrightarrow \exists B\in \beta, P\in B_{io}\subseteq u$

ومن تعريف الفضاء الجزئي تكون المجموعات $\{B_i\cap A\}_{i\in I}$ مفتوحة في الفضاء الجزئي وإذا كانـــت $P\in A$ فـــإن $P\in B_{io}\cap A\subseteq U\cap A$ وحيـــث أن $U\cap A\in T_A$ فـــإن $\{B_i\cap A\}_{i\in I}$.

تشكل اساس لفضاء الجزئي والسؤال الذي يطرح نفسه الآن ما هي العلاقة بين نقاط النهاية والنقاط الداخلية وعلاقة المجموعة في كل من الفضائين الكلي والجزئي سوف نرمز بـ $AY, A^{\circ}Y, \bar{A}Y$ لمشتقة داخلية وعلاقة المجموعة A في الفضاء الجزئي.

نظرية (3-3-13): [6]

بفرض أن (Y,T_y) فضاء جزئي من الفضاء (X,T) إذا كانت $A\subseteq Y$ فإن

i) $A^{/}Y=A^{/}\cap Y$
ii) $A^{\circ}=A^{\circ}Y\cap Y^{\circ}. A^{\circ}\cap Y\subseteq A^{\circ}Y$
iii) $\overline{AY}=\bar{A}\cap Y$

البرهان:

i. نفـــرض $x \in A^{/}Y$ إذاً لكـــل $V \cap A \neq \emptyset, x \in U. U \in T_A$ إذا يوجـــد $U = W \cap Y, x \in U, W \in T$ إذا لأي $W \in T$ بحيـــث يكـــون $x \in W$ سوف نجد أن $W \cap Y \neq \emptyset$ وبذلك نحصل على $(W \cap Y) \cap A = W \cap A \neq \emptyset$ إذا $x \in A^{/}$ وعليه فإن $A^{/}Y \subseteq A^{/}$ ولبرهان العلاقة العكسية , نفرض $x \in A^{/}$ إذا يوجد $U \cap A \neq \emptyset , x \in U , U \in T$ واضح أن $W = U \cap Y \in T_Y$ مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي والتي تحتوي على x.

اذاً $x \in A^{/}Y$ فإن $A^{/} \subseteq A^{/}Y$ **إذاً** $A^{/}Y = A^{/} \cap Y$.

ii. نفـــرض $P \in A^{\circ}$ يوجـــد $H \in T$ بحيـــث $P \in H \subseteq A \subseteq Y$ إذا $P \in Y \cap A \subseteq A$. $P \in Y^{\circ}$ وعليه فإن $P \in AY^{\circ}$, $P \in Y^{\circ}$ إذا $P \in Y^{\circ} \cap AY^{\circ}$ إذاً $A^{\circ} \subseteq AY^{\circ} \cap Y^{\circ}$ والآن نفـــــرض أن $x \in AY^{\circ} \cap Y^{\circ}$ إذا يوجـــــد $H_1, H_2 \in T$ بحيـــــث أن $x \in H_2 \subseteq Y$, $x \in Y \cap H_2 \subseteq A$ إذاً $x \in H_1 \cap H_2 \subseteq A$ وعليـــه فـــإن $x \in A^{\circ}$. إذاً $A^{\circ}Y \cap Y^{\circ} \subseteq A^{\circ}$ وعليـــه نحصل $A^{\circ} = AY^{\circ} \cap Y^{\circ}$ والجزء الأخير واضح من كون أن $A^{\circ} \cap Y$ مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي ومحتواه في المجموعة A.

iii. $\overline{AY} = A^{/}Y \cup A = \left(A^{/} \cap Y\right) \cup A, A \subseteq Y$

<u>مثال (3-3-14): [8]</u>

(1) بـين انـه إذا كانـت $A^{/} = \emptyset$ فـي الفضـاء التوبولـوجي (X, T) فـإن T_A هـو التوبولوجي المنفصل.

الحل:

لكي نثبت أن T_A هو الفضاء المنفصل يجب أن نبين أن كل مجموعة جزئية من A تكون مغلقة إذا كانت $B \subseteq A$ فإن $B^{/} \subseteq A^{/}$ وعليه يكون $B^{/} \subseteq \emptyset$ (لأن $A^{/} = \emptyset$) إذاً B مغلقة في X, وحيث أن $A \cap B = B$ مغلقة في A.

(2) بين أنه إذا كانت $\bar{A} \cap B = \emptyset$ فإن A في $A \cap B$ حيث A, B مجموعتين جزئيتين من الفضاء التوبولوجي (X, T).

الحل:

بما أن $\bar{A}$ مغلقة في X إذاً $\bar{A} \cap (A \cup B)$ مغلقة في $A \cup B$ ولكن $\bar{A} \cap (A \cup B) = (\bar{A} \cap A) \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup \emptyset = A$ إذاً A مغلقة في $A \cup B$.

(3) بفرض أن A, B مجموعتين جزئيتين من X بين أن U مجموعة مفتوحة في $A \cup B$ إذا وفقط إذا كانت $U \cap A$ مفتوحة في A , $U \cap B$ مفتوحة في B.

الحل:

بما أن $U \in T_A$ إذا يوجد $V \in T$ بحيث أن $U = V \cap (A \cup B)$ إذاً

بما أن $V \cap A \in T_A$ إذاً $U \cap A$

وبطريقة مشابهة يمكن أن $U \cap B \in T_{CB}$

$T_{A \cup B} = \{V$

$T_{(A \cup B)_A} = \{$

$= \{V \cap A:$

بالمثل $T(A \cup B)_B = T_B$. بما ان $U \cap A \in T_A, U \cap B \in T_B$

اذاً $U \cap A \in T_{(A \cap B)_A}, U \cap B \in T_{(A \cup B)_B}$

إذاً يوجد $W \in T_{A \cup B}$ بحيث أن $W \cap B = U \cap B, W \cap A = U \cap A$

إذاً $(W \cap A) \cup (W \cap B) = (U \cap A) \cup (U \cap B)$

وعليه فإن $W \cap (A \cap B) = \cap (A \cup B)$

وبما أن $U, W \subseteq A \cup B$ إذاً $U = W, U \in T_{A \cup B}$

إذاً $U \in T_{A \cup B}$