المحاضرة السادسة

البرمجة الخطية (Linear Programming)

تمهيد :-

مع كبر حجم المنشآت وتعدد أوجه نشاطها ظهر كثير من المتغيرات والمشاكل التي تؤثر بصورة أو بأخرى في امكانية اتخاذ القرار السليم الأمر الذي يتطلب ضرورة البحث عن اسلوب جديد يساعد على اتخاذ عدد من القرارات الحرجة التي تواجه الإدارة العليا المنشآت . اذ تعد البرمجة الخطية أحد الأساليب العلمية الحديثة لبحوث العمليات التي ساعدت وتساعد على اتخاذ القرار المناسب وقد أسهم كل من الاقتصاديين والرياضيين في تطوير هذا الأسلوب الذي بدأ ظهوره في عام 1920 على ايدي الاقتصادي الشهير (اليونتيف) في تطويره لتحليل المدخلات والمخرجات ، ثم تابع تطوره في عام 1947 على ايدي الرياضي الانجليزي (دانتزك Dantig)اذ اكتشف طريقة simplex ، احدى طرق الحل للبرمجة الخطية التي ستعرض لها بشيء من التفصيل .

مفهوم البرمجة الخطية :-

تعرف البرمجة الخطية بانها اسلوب ، رياضي حديث يستعمل اداة لإيجاد افضل الاستعمالات للموارد المحدودة المتاحة لدى المنشأة ولهذا الأسلوب جانبان هما البرمجة Program وتعني امكانية استعمال الأسلوب لإيجاد البرامج المختلفة لاستعمال الموارد المحدودة المتاحة لدى المنشأة وبما يتلاءم مع القيود المفروضة على هذه الموارد تم اختيار افضل هذه البرامج التي تحقق هدف المنشأة وذلك بالانطلاق من برنامج لأخر افضل منه وهكذا أما الخطة (Linearity) فيقصد بها العلاقات بين المتغيرات المحددة كافة المشكلة قيد الدرس علاقات خطية ، أي أن استجابة المتغيرات كافة في استجابة واحدة وتتناغم مع استجابة دالة الهدف ومما تجدر الاشارة اليه هو أن الغاية من تطبيق اسلوب البرمجة الخطية هي الوصول الى حل نموذج البرمجة الخطية

(ونموذج البرمجة الخطية هو عبارة عن مجموعة من المعادلات والمتباينات بالإضافة الى دالة الهدف) . ولا ننسي ان لكل مجموعة من المعادلات حلا ، و عادة ما تكون للمعادلات الأنية حلول اي ايجاد قيم

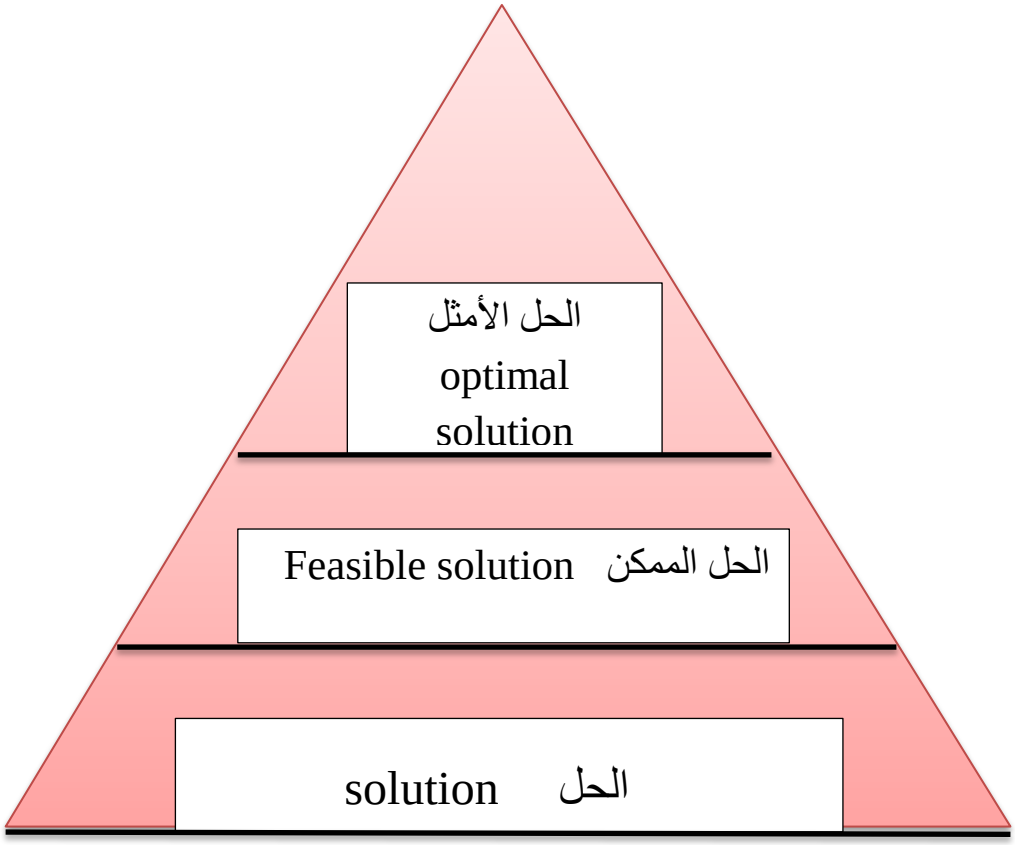
المتغيرات ، وفي حالة حل نموذج البرمجة الخط دائما نسعى الى ايجاد الحل الأمثل (اي الحل الذي يحقق القيود كافة بوجود دالة إلى objective function)وتكون الحصول على ثلاثة أنواع

أ- **الحل** : Solution وهو حل ممكن الوصول اليه في أية مجموعة من المعادلات .

ب . **الحل الممكن** : Feasible solution وهو الحل الذي يمكن ايجاده بعد التوصل الى الحل في الحالة الأولى وهذا الحل يحقق القيود كافة بشكل عام.

ج . **الحل الأمثل** : Optimal solution وهو الحل الذي يمكن ايجاده بعد التوصل الى الحل الممكن ، وهذا الحل يحقق القيود كافة بوجود دالة الهدف .

وبهذا الصدد يجب التأكد من أن الحل السكن لا يتحقق بعد وجود الحل ، ولايمكن تحقيق الحل الأمثل الا بعد أن يتحقق الحل الممكن ويمكن تمثيل ذلك بالشكل رقم (1)



شكل رقم (1)

صياغة نموذج البرمجة الخطية وبناؤه :-

الهدف الأساس من استعمال نماذج البرمجة الخطية هو حل مشكلة ما تواجه الإدارة ولذلك يتم الاستعانة بالبرمجة الخطية ، وهنا يستلزم الأمر

نقل المشكلة من حالتها الأولية (حالة الكلام أو الحالة الإنشائية والمتمثلة بالسرد الكلامي لتفاصيل المشكلة كافة) الى حالة المعدلات والمتباينات المعبرة عن المشكلة قيد الدرس ، وهنا يجب أن يوضح نموذج البرمجة الخطية ابعاد المشكلة الأصلية وبتفاصيلها كافة ،

وبالأخير يمكن ايجاد الحل الرياضي لنموذج البرمجة الخطية (والذي يمثل أصلا حل للمشكلة المبحوثة) . وللحصول على الحل الأمثل ، ولذلك يجب أن تستعمل الأمور كافة من خبرة ودراية في صياغة نماذج البرمجة الخطية.

والرسم البياني رقم (1) يوضح العلاقة المهمة لصياغة النماذج الرياضية.

وبعد أن يتم تحويل المشكلة من حالتها الأولية الى نموذج برمجة خطية (مجموعة من المعادلات و المتباينات بالإضافة الى دالة الهدف) وهنا يتم الحصول على حل النموذج بالطرق الرياضية التي سنعرض لها ونتعرف عليها .

ثم يصار الى سوق مثال طبيعي ويقصد هنا بالطبيعية انه ممكن ان يكون في اي مؤسسة التاجية ولكن للوهلة الأولى سوف تفترض الأرقام وذلك لتوخي السهولة ليس الا ، وتقريب المشكلة الى التصور الواقعي وعلى النحو الآتي

مثال (1)

افرض لدينا مصنع ينتج منتجين ويوجد في المصنع خطين انتاجيين .مفترضين بان عدد الوحدات المنتجة من المنتج الأول X_1 , والمطلوب تحديد الكمية المنتجة من هذا المنتج في ظل ظروف تطرحها قيود المشكلة ولو سلمنا بوجود 48 ساعة عمل متاحة اسبوعيا لتشغيل احدى الماكينات و التي من الممكن أن نسميها (طاقة تشغيل المتاحة اسبوعيا ، والمنتج X_1 يمر من خلال هذه الماكنة ، ولغرض تحديد الكمية) X_1 (أي عدد الوحدات المنتجة) التي يمكن انتاجها على هذه الماكينة ، والذي يستغرق انتاج الوحدة الواحدة منه لساعتين مقابل هذا الكلام يمكننا التعبير رياضيا عن ذلك بالمعادلة الأتية :-

$$2X = 48 \quad \ldots\ldots(1)$$

هذا الشكل الرياضي (1) الذي هو برنامج رياضي يعطينا الحل **X= 24** ،

وهو ما نسمية (بالبرنامج) ،

والبرنامج رقم (1) يحقق شرطا اساسيا وهو استغلال كل الطاقة المتاحة

على انه ليس من الضروري أن يكون الهدف هو استغلال كل الطاقة المتاحة . كما انه ليس صحيحا دائما أن يكون البرنامج الأمثل هو الذي يستغل كل الطاقات المتاحة ، وفقا للعبارة الأخيرة (عدم استغلال كل الطاقات) يكون التعبير الرياضي المناسب للعلاقة (1) هو .

$$2X_1 \leq 48 \qquad .....(2)$$

وتفسير البرنامج (2) يتفق مع احد مبادي (فرضيات) بحوث العمليات ، وهو بإمكاننا انتاج اية كمية بحيث لا تتعدى الطاقة التشغيلية المتاحة (48 ساعة) ، وبينما يوجد للمعادلة (1) حل وحيد (البرنامج وحيد) والذي هو

$$X = 24$$

تكون لدينا مجموعة كبيرة من البرامج المتاحة التي تحقق المتباينة (2) احدهما هو

$$X_1 = 24$$

الآن لنفرض ان بالإمكان ان للمنتج على الماكينة السابقة منتجا آخر ، ويستلزم انتاج الوحدة الواحدة منه اربع ساعات فان التعبير الذي يشترط استغلال كل الطاقات المتاحة ، وبهذا يكون البرنامج لكلا المنتجين :

$2X_1 + 4X_2 = 48$ .....(3)

X_1 : الكمية (عدد الوحدات) المنتجة من المنتج الأول

X_2 : الكمية (عد الوحدات) المنتجة من المنتج الثاني .

وجميع قيم X1 و X2 التي تحقق المعادلة (3) هي برامج او تخطيط انتاج الماكينة والتي منها مثلا

$X_1 = 0$ $X_2 = 12$

$X_1 = 24$ $X_2 = 0$

فاذا كان البرنامج لا يشترط استغلال كل الطاقات المتاحة أمكن التعبير عنه بالمتباينة الأتية (4)

$2X_1 = 4X_2 < 48$

وهنا من الطبيعي ان كل البرامج التي تحقق المعادلة (3) تحقق ايضا المتباينة (4) الا ان هناك مجموعة كبيرة من البرامج التي تحقق المتباينة (4) ولا تحقق المعادلة **(3)** ومنها :

$X_1 = 2$ $X_2 = 1$

$X_1 = 6$ $X_2 = 3$

$X_1 = 5$ $X_2 = 4$

$X_1 = 10$ $X_2 = 6$

فاذا كان لدينا ماكينة ثانية بحيث يجب مرور (تشغيل) كل من المنتجين X_1 و X_2 على هذه الماكينة (بعد ان مرا أو شغلا على الماكينة الاولى) وان عدد ساعات التشغيل الكلية المتاحة في الماكينة الثانية هي (84) ساعة اسبوعيا والمنتج الاول يستغرق (4) ساعات في تشغيله بينما يستغرق المنتج الثاني ساعتين في تشغيله على الماكينة الثانية و المعادلة الآتية تبين ذلك

$$\mathbf{4X_1 + 2X_2 = 84} \quad \text{.....(5)}$$

(اذا كان البرنامج موضوع البحث لا يشترط استغلال كل الطاقات المتاحة) لذلك ستؤول المعادلة (5) الى المتباينة الأتية

$4X_1 + 4X_2 \leq 84$ .... (6)

ولكي يكون برنامجا متكاملا يجب ان يأخذ في اعتباره طاقة كل من الماكنتين

$2X_1 + 4X_2 \leq 48$

$4X_1 + 2X_2 \leq 84$

وفي معظم الأحيان تكون المتباينات هي الصورة الرياضية الشائعة في مسائل البرمجة الخطية وذلك من طبيعة التخطيط ذاته الذي يسبق ذكره وهو (انه ليس من الضروري أن يكون استغلال كل الطاقات امثل البرامج) .

وقد لا تكون جميع المتباينات في التعبيرات السابقة على صورة (اصغر او تساوي) الا انه قد تظهر المتباينة على صورة (اكبر او تساوي) فلو أردنا ادخال شرط المتعاقد مثلا وهو الا تقل كمية المنتج X2 مثلا المسلمة اليه اسبوعيا عن سبع وحدات فان ذلك يتمثل في المتباينة الأتية :

$X_2 \geq 7$ ..... (8)

وهي التعبير الرياضي المناسب ، في هذه الحالة فاذا اضيفت الى التعبير الرياضي (7) سيكون لدينا التعبير الاتي هو

$$\left.\begin{array}{l} 2X_1 + 4X_2 \leq 48 \\ 4X_1 + 2X_2 \leq 84 \\ X_2 \geq 7 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

هـذه التعبيـرات الرياضـية التـي تعبـر عـن الشـروط المطلوبـة (اسـتيفاؤها) عنـد انتـاج (X_1,X_2) تسـمى عـادة (بـالنموذج الرياضـي) ، وهـي اللغـة المختصـرة التـي تحـول فيهـا المسـالة المطروحـة : الـى مجموعـة مـن المعـادلات أو المتباينـات وكـل منهـا يحقـق أحـد الشـروط المطلوبـة علـى التعبيـر الرياضـي (9) الـذي لا يحتـوي علـى كـل القيـود المطلوبـة إذ يسـمح بـان تكـون قيمة (X_1 , X_2) سالبة قيمة الدالة الهدف .

لـذلك يجـب اضـافة هـذا الشـرط ايضـا لاسـتكمال القيـود كافـة وبهـذا يصـبح النموذج الرياضي على النحو الآتي

$$\left.\begin{array}{l} 2X_1 + 4X_2 \leq 48 \\ 4X_1 + 2X_2 \leq 84 \\ X_2 \geq 7 \\ X_1, X_2 \geq \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

ويسمى القيد $X_1, X_2 \geq 0$, بقيد علم السلبية (non - negativity)

وبالرغم من ان النموذج الرياضي (10) يعطينا صورة كاملة عن القيود الواجب استيفاؤها عند انتاجنا لـ (X_1 و X_2) ، الا انه لا يعطينا اية طريقة تتيح لنا تفضيل برنامج على اخر لذلك يلزم فضلا عما تقدم وجود مقياس يقاس به ما يحققه لنا كل برنامج وبالتالي نستطيع أن نفضل برنامجا على اخر ، وهذا المقياس هو ما يسمى في مسالة البرمجة الخطية (دلة الهدف) ، فمثلا اذا امكننا في المسألة السابقة تحديد صافي الربح الناجم عن انتاج وحدة واحدة من المنتج الأول وليكن (C1) وربح الوحدة الواحدة من المنتج الثاني (C2)فان الربح الكلي يتحقق على وفق المعادلة الاتية (معادلة دالة الهدف)

$$Z = C1\, X_1 + C2\, X_2 \qquad \ldots\ldots\ldots (11)$$

فاذا فرضنا ان C1= 1 و C2 =2 فستكومن المعادلة (11) على النحو الاتي :-

$$\mathbf{Z = X_1 + 2X_2}$$

واضح أن قيمة X و X4 التي تجعلZ اكبر ما يمكن هي التي يجب اختيارها اي ان مسالة البرمجة الخطية المطلوب حلها في هذه الحالة تعطي بالنموذج الرياضي الاتي

Maxinize $Z = X_1 + 2X_2$

Subject to

$$\left.\begin{aligned} 2X_1 + 4X_2 &\leq 48 \\ 4X_1 + 2X_2 &\leq 84 \\ X_2 &\geq 7 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{..... (12)}$$

وما يقال عن معاملات المتغيرات لدالة الهدف في حالة الربح C1 و C2 اي اختيار اعلى قيمة لدالة الهدف ، ايضا يقال عن معاملات المتغيرات لدالة الهدف ، إذا كانت دالة الهدف دالة كلفة ويجب تحقيق اقل كلفة أي (Minimize) أي اختيار قيمة دالة الهدف اصغر ما يمكن وتكون قيم C2 (C1 ,) هي فيم كلفة الوحدة الواحدة منX_1 ، X_2 بعد أن كانت في دالة

الهدف من نوع Maximize ارباح لـ X_1 و . X_2 وبالرجوع الى النموذج (12) فقد استعمل المصدر المحدود وهو عدد الساعات التشغيلية المتاحة مثالا ، وهو الجانب الأيمن في القيد الأول والثاني والشيء نفسه يكون اذا استعمل رأس المال أو المواد الأولية أو العمالة مثلا للمصدر المحدود فهنا الأمثلة كثيرة ومتعددة ويمكن تطبيق البرمجة الخطية في اي قطاع من القطاعات.