مثال:-

جد القيم الذاتية للمصفوفة التالية $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$

الحل:

الطريقة الأولى:

$$AX = \lambda X$$

اذا كانت $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ واستخدمنا المعادلة اعلاه نحصل على

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5X_1 + 7X_2 - 5X_3 \\ 0 + 4X_2 - X_3 \\ 2X_1 + 8X_2 - 3X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda X_1 \\ \lambda X_2 \\ \lambda X_3 \end{bmatrix}$$

$$5X_1 + 7X_2 - 5X_3 = \lambda X_1 \quad \Longrightarrow \quad (5-\lambda)X_1 + 7X_2 - 5X_3 = 0$$

$$0 + 4X_2 - X_3 = \lambda X_2 \quad \Longrightarrow \quad (4-\lambda)X_2 - X_3 = 0$$

$$2X_1 + 8X_2 - 3X_3 = \lambda X_3 \quad \Longrightarrow \quad 2X_1 + 8X_2 - (3+\lambda)X_3 = 0$$

ايجاد قيمة هذه المحددة كما في المثال السابق

$$\det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 7 & -5 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 2 & 8 & -3-\lambda \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 7 & -5 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 2 & 8 & -3-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} 5-\lambda & 7 \\ 0 & 4-\lambda \\ 2 & 8 \end{matrix}$$

$$= (5-\lambda)(4-\lambda)(-3-\lambda) + (-14) + (0)$$

$$-(-5)(2)(4-\lambda) - (5-\lambda)(-1)(8) - 0 = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

ولحل هذة المعادلة نبحث في قواسم الحد الثابت في المعادلة وهو (6)
وهي ∓ 1 , ∓ 2 ,∓ 3 , ∓ 6 وتجربة هذه الحلول تباعاً نجد ان 1 و 2 و 3 هي حلول المعادلة دون الحاجة الى قسمة المعادلة اعلاه .

$$\therefore \lambda = 1 , 2 , 3$$

الطريقة الثانية:

$$AX = \lambda IX \quad \Longrightarrow \quad (A - \lambda I)X = 0$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5-\lambda & 7 & -5 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 2 & 8 & -3-\lambda \end{bmatrix}$$

ويكمل الحل كما في الطريقة الأولى لأيجاد قيم $\lambda = 1 , 2 , 3$

مثال:-

جد قيم المتجه الذاتي المطابق للقيم الذاتية في المثال السابق $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$

الحل:

المتجة الذاتي عندما $\lambda = 1$ تكون

$$(5-\lambda)X_1 + 7X_2 - 5X_3 = 0$$

$$(4-\lambda)X_2 - X_3 = 0$$

$$2X_1 + 8X_2 - (3+\lambda)X_3 = 0$$

المعادلات اعلاه تم اخذها من المثال السابق . نعوض عن قيمة$\lambda = 1$ نحصل على

$4X_1 + 7X_2 - 5X_3 = 0$ …………….. (1)

$3X_2 - X_3 = 0$ ………….. (2)

$2X_1 + 8X_2 - 4X_3 = 0$ ……………… (3)

حل هذه المعادلات

من المعادلة (2) $3X_2 = X_3$

نعوضها في المعادلة (1) $4X_1 + 7X_2 - 5(3X_2) = 0$

$$4X_1 = 8\,X_2 \qquad \therefore X_1 = \frac{8}{4}X_2 = 2X_2$$

$$\therefore \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2X_2 \\ X_2 \\ 3X_2 \end{bmatrix} = X_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

وبالتالي نحصل على المتجة الذاتي $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ عندما $\lambda = 1$

ولايجاد المتجة الذاتي عندما $\lambda = 2$ تكون المعادلات كما يلي

$3X_1 + 7X_2 - 5X_3 = 0$ …………….. (1)

$2X_2 - X_3 = 0$ ………….. (2)

$2X_1 + 8X_2 - 5X_3 = 0$ ……………… (3)

من المعادلة (2) $2X_2 = X_3$

نعوضها في المعادلة (1) $4X_1 + 7X_2 - 5(2X_2) = 0$

$$3X_1 = 3\,X_2 \qquad \therefore X_1 = \frac{3}{3}X_2 = X_2$$

$$\therefore \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_2 \\ 2X_2 \end{bmatrix} = X_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

∴ المتجه الذاتي عندما $\lambda = 2$ هو $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

ولايجاد المتجة الذاتي عندما $\lambda = 3$ تكون المعادلات كما يلي

$2X_1 + 7X_2 - 5X_3 = 0$ …………….. (1)

$X_2 - X_3 = 0$ ………….. (2)

$2X_1 + 8X_2 - 6X_3 = 0$ ……………… (3)

من المعادلة (2) $X_2 = X_3$

نعوضها في المعادلة (1) $2X_1 + 7X_2 - 5X_2 = 0$

$$2X_1 = -2\, X_2 \qquad \therefore X_1 = -\frac{2}{2} X_2 = -X_2$$

$$\therefore \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -X_2 \\ X_2 \\ X_2 \end{bmatrix} = X_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

∴ المتجه الذاتي عندما $\lambda = 3$ هو $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

∴ مصفوفة المتجه الذاتي هي $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

مثال:-

جد القيم الذاتية للمصفوفة التالية
$$A=\begin{bmatrix}2&0&-2\\0&4&0\\-2&0&5\end{bmatrix}$$

الحل:

$$AX=\lambda IX \quad \Longrightarrow \quad (A-\lambda I)X=0$$

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}2&0&-2\\0&4&0\\-2&0&5\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&7&-5\\0&4&-1\\2&8&-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2-\lambda&0&-2\\0&4-\lambda&0\\-2&0&5-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}2-\lambda&0&-2\\0&4-\lambda&0\\-2&0&5-\lambda\end{bmatrix}$$

$$=\left|\begin{matrix}2-\lambda&0&-2\\0&4-\lambda&0\\-2&0&5-\lambda\end{matrix}\right|\begin{matrix}2-\lambda&0\\0&4-\lambda\\-2&0\end{matrix}$$

$$=(2-\lambda)(4-\lambda)(5-\lambda)+0+0$$

$$-(-2)(4-\lambda)(-2)-0-0=\lambda^3-11\lambda^2+34\lambda-24=0$$

ولحل هذة المعادلة نبحث في قواسم الحد الثابت في المعادلة وهو (24) وهي $\mp 6, \mp 4, \mp 3, \mp 2, \mp 1, \mp 12, \mp 24$ وتجربة هذه الحلول تباعاً نجد ان 1 و 4 و 6 هي الحلول التي تحقق المعادلة وهي القيم الذاتية لهذه المصفوفة . ومصفوفة المتجه الذاتي للمصفوفة A هي

$$\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&0&-2\end{bmatrix}$$