- **المصفوفة القطرية** (Diagonal Matrix):

التحويل العمودي الى الصورة القطرية – المصفوفات المتماثلة

اي ان مصفوفة A مصفوفة من نوع $(n \times n)$ القابلة للتحويل العمودي الى الصورة القطرية تحول عمودياً الى الصورة القطرية بواسطة اي مصفوفة (P) من نوع $(n \times n)$ مشكلة اعمدتها من متجهات ذاتية للمصفوفة A ولتكن D المصفوفة القطرية

$$\therefore \mathbf{D} = \mathbf{P^{-1} A\, P}$$

حيث D : مصفوفة قطرية.

A : مصفوفة قابلة للتحويل العمودي الى قطري من نوع $(n \times n)$.

P : مصفوفة اعمدتها هي المتجهات الذاتية للمصفوفة A .

P^{-1} : معكوس المصفوفة P .

مثال:-

برهن ان المصفوفة A التالية يمكن تحويلها الى مصفوفة قطرية D اذا علمت ان P هي مصفوفة المتجهات الذاتية للمصفوفة A .

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix} \quad \& \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل:

لكي تكون A قابلة للتحول الى الصورة القطرية يجب ان تحقق المعادلة التالية

$$D = P^{-1} A\, P$$

لدينا A ولدينا P نحتاج نستخرج P^{-1}

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} adj\, P$$

$$|\mathrm{P}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix} = 2+3-2+3-4-1 = 1$$

$$\alpha_{11} = (1-2) = -1 \quad \& \quad \alpha_{12} = -(1-2) = 2 \quad \& \quad \alpha_{13} = (2-3) = -1$$

$$\alpha_{21} = -(1+2) = -3 \quad \& \quad \alpha_{22} = (2+3) = 5 \quad \& \quad \alpha_{23} = -(4-3) = -1$$

$$\alpha_{31} = (1+1) = 2 \quad \& \quad \alpha_{32} = -(2+1) = -3 \quad \& \quad \alpha_{33} = (2-1) = 1$$

$$adj(\mathrm{P}) = \left(\left[\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}\right]\right)^T = \left(\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}\right)^T$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{P}|} adj\ \mathrm{P} = \frac{\begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

بعد ذلك نحصل على المصفوفة القطرية من العلاقة التالية

$$\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1} \mathrm{A}\ \mathrm{P}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

وهذا يحقق العلاقة السابقة اي انا حصلنا على مصفوفة قطرية ناتجة من تطبيق العلاقة اعلاه

مثال:-

برهن ان المصفوفة A التالية يمكن تحويلها الى مصفوفة قطرية D اذا علمت ان P هي مصفوفة المتجهات الذاتية للمصفوفة A .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \& \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

الحل:

لكي تكون A قابلة للتحول الى الصورة القطرية يجب ان تحقق المعادلة التالية

$$D = P^{-1} A\, P$$

لدينا A ولدينا P نحتاج نستخرج P^{-1}

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} adj\ P$$

$$|P| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} = -4 + 0 + 0 - 1 - 0 - 0 = -5$$

$\alpha_{11} = -2 \quad \& \quad \alpha_{12} = 0 \quad \& \quad \alpha_{13} = -1$

$\alpha_{21} = 0 \quad \& \quad \alpha_{22} = -5 \quad \& \quad \alpha_{23} = 0$

$\alpha_{31} = -1 \quad \& \quad \alpha_{32} = 0 \quad \& \quad \alpha_{33} = 2$

$$adj(P) = \left(\left[\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}\right]\right)^T = \left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right)^T$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

من الملاحظ ان المصفوفة P مصفوفة متماثلة حيث ان $P = P^T$

$$P^{-1}=\frac{1}{|P|}adj\,P=\frac{1}{-5}\begin{bmatrix}-2&0&-1\\0&-5&0\\-1&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}&0&\frac{1}{5}\\0&1&0\\\frac{1}{5}&0&-\frac{2}{5}\end{bmatrix}$$

ولايجاد المصفوفة القطرية يجب ان تحقق العلاقة $D=P^{-1}A\,P$

$$=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}&0&\frac{1}{5}\\0&1&0\\\frac{1}{5}&0&-\frac{2}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&-2\\0&4&0\\-2&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{bmatrix}$$

وهذا يحقق العلاقة السابقة اي انا حصلنا على مصفوفة قطرية ناتجة من تطبيق العلاقة اعلاه

• المصفوفات المتماثلة (Symmetric Matrix):

يقال للمصفوفة المربعة A من نوع $(n\times n)$ انها متماثلة **Symmetric** اذا كانت $A=A^T$ اي ان $a_{ij}=a_{ji}$ كذلك من صفات المصفوفة المتماثلة انها قابلة للتحول العمودي الى مصفوفة قطرية كما في المثال السابق لتحويل المصفوفة A الى مصفوفة قطرية.

مثال على ذلك المصفوفات التالية هي عبارة عن مصفوفات متماثلة

$$A=\begin{bmatrix}3&-1&5\\-1&4&7\\5&7&-6\end{bmatrix}=A^T=\begin{bmatrix}3&-1&5\\-1&4&7\\5&7&-6\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}2&0&-2\\0&4&0\\-2&0&5\end{bmatrix}=B^T=\begin{bmatrix}2&0&-2\\0&4&0\\-2&0&5\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1&-4&5\\-4&3&0\\5&0&7\end{bmatrix}=C^T=\begin{bmatrix}1&-4&5\\-4&3&0\\5&0&7\end{bmatrix}$$

- **المصفوفة المتماثلة التخالفية (Skew-Symmetric Matrix):**

يقال للمصفوفة المربعة A من نوع $(n \times n)$ انها متماثلة تخالفية اذا كانت $A = -A^T$ اي ان $a_{ij} = -a_{ji}$ ويتضح من ذلك ان كل عنصر واقع على القطر الرئيسي (j=i) في المصفوفة المتماثلة التخالفية هو صفر .مثال على ذلك

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -2 \\ -7 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = -A^T = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -2 \\ -7 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- **المصفوفة الهيرميتية (Hermitian Matrix):**

هي مصفوفة A مربعة من نوع $(n \times n)$ متماثلة الا ان عناصرها تحتوي على ارقام غير حقيقية (معقدة) مثال على ذلك

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \qquad \& \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -2i & 3i \\ -2i & 4i & 6i \\ 3i & 6i & 5i \end{bmatrix}$$