2.5 - قانونا كيرشوف (Kirchhoff's Laws)

هناك الكثير من الدوائر الكهربائية التي تحتوي على شبكة من المقاومات التي لا يمكن اختصارها بتراكيب مبسطة من المقاومات المتصلة على التوالي اوالتوازي ، ومن ثم حساب التيار في فروع الدائرة المختلفة حسبما ذكر سابقا . هذا من ناحية ، ومن ناحية اخرى توجد شبكات كهربائية تحتوي على مصادر للقوة الدافعة الكهربائية في اكثر من فرع واحد من فروع الشبكة ،ولهذا يتعذراختصار تلك الشبكات وفق الطريقة السابقة (التوالي او التوازي) . ولحساب التيار في الفروع المختلفة لمثل هذه الشبكات المعقدة ، هناك عدد من القوانين والنظريات تستخدم لذلك ومنها قانوني كيرشوف .

- ينص قانون كيرشوف الاول على ان **المجموع الجبري للتيارات التي تتفرع من أية نقطة تفرع (branch point) في شبكة كهربائية يساوي صفراً.** اي ان مجموع التيارات الداخلة الى اي نقطة تفرع يجب ان تساوي مجموع التيارات الخارجة منها. وبذلك يمكن ان تكون الصيغة الرياضية لقانون كيرشوف الاول هو

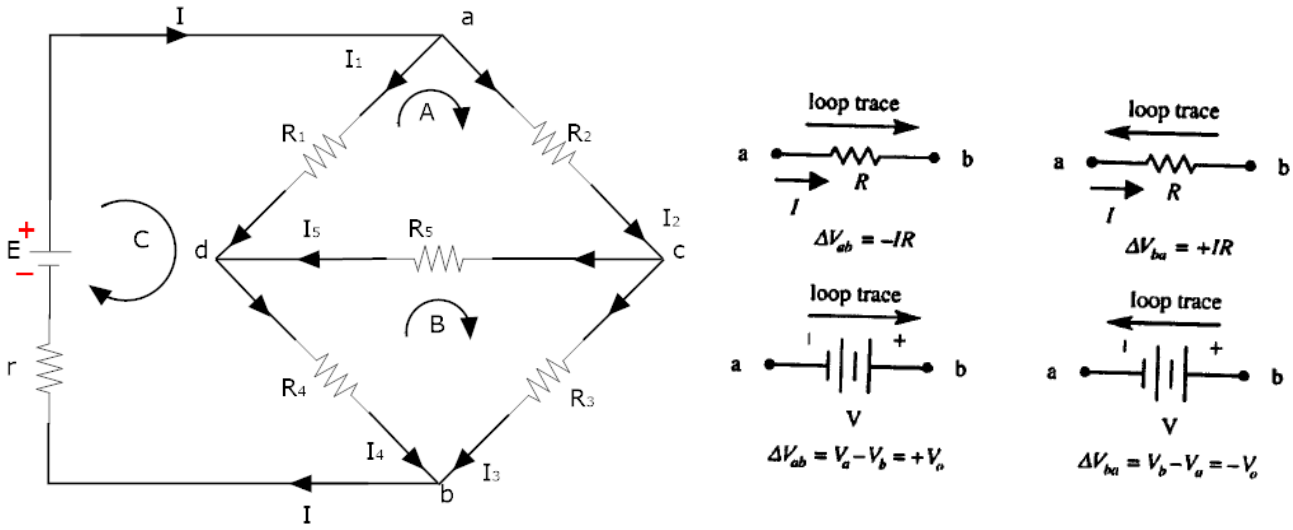
$$\sum \boldsymbol{I} = \mathbf{0} \quad \text{.....} \quad \textbf{(32)}$$

- اما القانون الثاني لكيرشوف فينص على ان **المجموع الجبري للتغيرات الحاصلة في الجهد عبر اي مسار مغلق في الشبكة يساوي صفراً .** وبعبارة اخرى ان المجموع الجبري للقوة الدافعة الكهربائية لكل المصادر التي يحتويها المسار زائداً المجموع الجبري لحاصل ضرب التيار في المقاومة التي يمر فيها التيار بجميع مقاومات المسار يساوي صفراً . اي ان

$$\sum \boldsymbol{E} + \sum \boldsymbol{IR} = \mathbf{0} \quad \text{.....} \quad \textbf{(33)}$$

وعند تطبيق قانون كيرشوف الثاني يجب ان نجزىء الشبكة الكهربائية الى الدوائر المغلقة (loop) المتكونة منها ، ونعتبر كل دائرة وكأنها وحدة مستقلة . ولتوضيح ذلك نأخذ الشبكة الكهربائية المبينة في الشكل(15) ونحاول حلها باستخدام قانون كيرشوف . نلاحظ ان هذه الشبكة تحتوي على اربع نقاط تفرع هي (d, c, b, a) كما نلاحظ أنها تحتوي على ست فروع (branches) تصل بين نقاط التفرع الاربعة ، وتمر فيها تيارات مختلفة هي $(I_5, I_4, I_3, I_2, I_1, I)$ وهي التيارات التي تمر بالمقاومات $(R_5, R_4, R_3, R_2, R_1, r)$ على الترتيب . اما اتجاهات التيارات فيجب تأشيرها على

الشبكة الكهربائية ولو بصورة اعتباطية . اذ ليس من الضروري ان نراعي في ذلك اية اعتبارات فيزيائية ، فالنتائج التي نحصل عليها هي التي تقرر الاتجاهات الصحيحة للتيارات .



شكل (15)

وبتطبيق قانون كيرشوف الاول على نقاط التفرع الاربعة نحصل على

$$I - I_1 - I_2 = 0$$

$$I_3 + I_4 - I = 0$$

$$I_2 - I_3 - I_5 = 0$$

$$I_1 + I_5 - I_4 = 0$$

حيث اعتبرنا **التيار الداخل الى نقطة التفرع موجباً في حين اعتبرنا التيار الخارج من النقطة سالباً** وبصورة عامة ان كان عدد نقاط التفرع m فيجب تطبيق قانون كيرشوف الاول على(m-1) من النقاط .

ولاجل ايجاد قيم التيارات الستة في فروع هذه الشبكة يجب ان نحصل على ثلاث معادلات اخرى . ويمكن الحصول على تلك المعادلات الثلاث من قانون كيرشوف الثاني ، وذلك بتصور ان الشبكة مجزأة الى ثلاث دوائر مغلقة (loops) مستقلة مؤشرة بالاحرف C,B,A كما في الشكل(15) حيث نطبق قانون كيرشوف الثاني على الدائرة المغلقة A وذلك بتتبع المسار ابتداءاً من النقطة a باتجاة عقرب الساعة ونجمع التغيرات الحاصلة في الجهد لجميع عناصر هذا المسار المغلق فينتج

$$-I_2R_2 - I_5R_5 + I_1R_1 = 0$$

وبنفس الطريقة نطبق القانون نفسة على الدائرتين C,B وبالسير كذلك باتجاه عقرب الساعة ابتداءً من نقطة d فنجد على الترتيب

$$I_5R_5 - I_3R_3 + I_4R_4 = 0$$

$$-I_4R_4 - Ir + E - I_1R_1 = 0$$

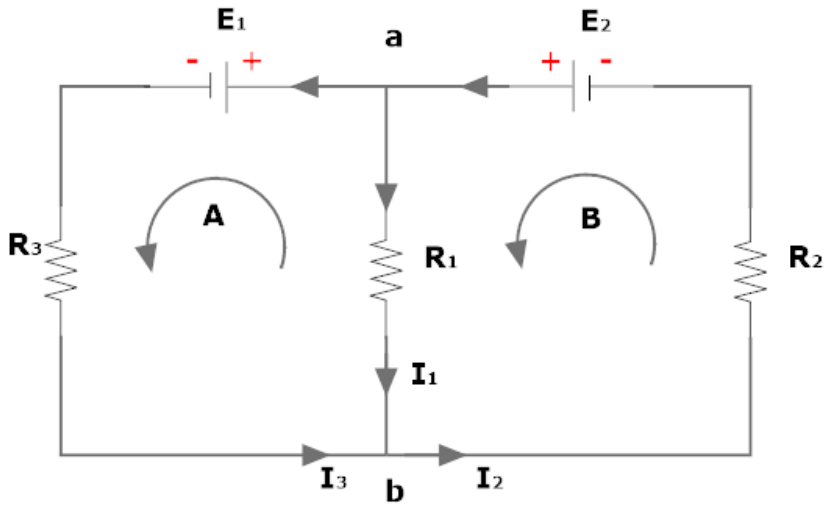
وبذلك حصلنا على ست معادلات تحتوي على ست قيم مجهولة للتيار ، يمكن حلها بطرق جبرية مختلفة ، فاذا ظهر ان احدى قيم التيارات سالبة فهذا يعني ان الاتجاه المفترض للتيار في ذلك الفرع كان خطأ وعلية فأن الاتجاه الصحيح هو العكس . اما اذا ظهرت نتيجة التيار موجبة فمعنى ذلك ان الاتجاه المؤشر على الدائرة هو الاتجاه الصحيح للتيار .

مثال9

(أ) أحسب قيم التيارات المارة في فروع الشبكة الكهربائية المبينة في الشكل ادناه .

(ب) أحسب فرق الجهد بين النقطتين a , b .

علما ان $R_1 = 5\Omega\,,\ R_2 = 2\Omega\,,\ R_3 = 4\Omega\,,\ E_1 = 3V\,,\ E_2 = 1V$



الحل:

(أ) نفرض ان اتجاهات التيارات الثلاثة I_3, I_2, I_1 المارة في المقاومات R_3, R_2, R_1 على الترتيب هي باتجاه الاسهم المؤشرة في الشكل . بعد ذلك نطبق قانون كيرشوف الاول على احدى نقطتي التفرع ولتكن b فنحصل على

$$I_1 + I_3 - I_2 = 0 \qquad \text{.....} \qquad 1$$

ثم نتصور هذه الشبكة مجزأة الى دائرتين مغلقتين هما A , B المبينة في الشكل . وبتطبيق قانون كيرشوف الثاني على كل من الدائرتين A , B على الترتيب ابتداءً من نقطة a وباتجاه معاكس لعقرب الساعة نحصل على

$$-E_1 - I_3R_3 + I_1R_1 = 0$$

$$-3 - 4I_3 + 5I_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2$$

$$-I_1R_1 - I_2R_2 + E_2 = 0$$

$$-5I_1 - 2I_2 + 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3$$

نعوض عن قيمة I_3 من المعادلة الاولى في المعادلة الثانية

$$-3 - 4I_2 + 9I_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4$$

ولايجاد المجهولين I_1, I_2 بطريقة المحددات نعيد ترتيب المعادلتين الرابعة والثالثة ونكتبها كما ياتي

$$-5I_1 - 2I_2 = 1$$

$$9I_1 - 4I_2 = -3$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-38} = 0.26A$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 9 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{6}{-38} = -0.16A$$

واخيرا نحسب I_3 من المعادلة الاولى

$$I_3 = I_2 - I_1 = -0.16 - 0.26 = -0.42A$$

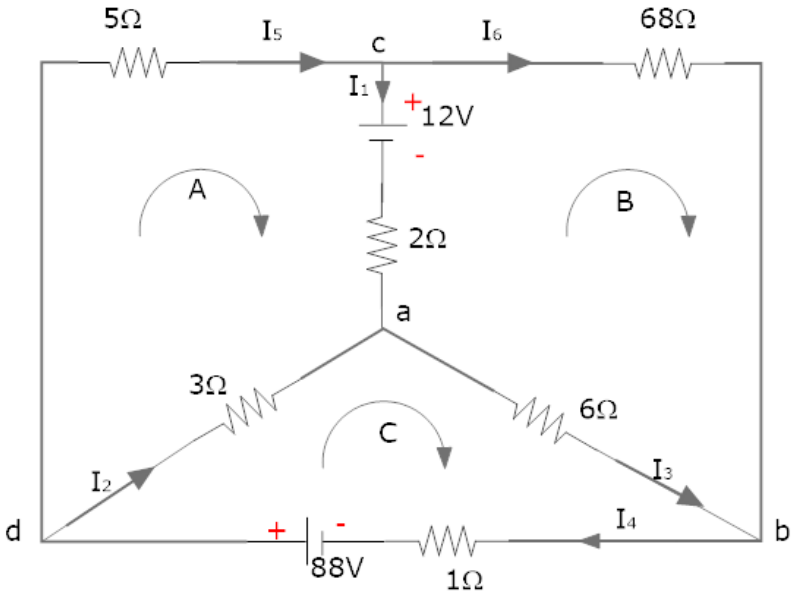
ومن هذه النتائج يتضح لنا ان اتجاه التيار I_1 صحيح كما افترضناه ، اما اتجاه كل من التيار I_2 والتيار I_3 فيجب ان يكون عكس الاتجاه المؤشر بالشكل .

(ب) لايجاد فرق الجهد بين النقطتين a , b ناخذ احدى الدوائر المغلقة ولتكن A

$V_{ab} = E_1 + I_3R_3 = 3 - 0.42 \times 4 = 1.32V$

مثال10

احسب قيم التيارات التي تسري في فروع الشبكة الكهربائية المبينة في الشكل ادناه



الحل:

لنفرض ان التيارات التي تسري في الفروع الستة للشبكة هي $I_1 , I_2 , I_3 , I_4 , I_5 , I_6$ اما اتجاه سريان هذه التيارات فقد حدد بصورة اعتباطية وأشر بالاسهم كما مبين في الشكل اعلاه .

بتطبيق قانون كيرشوف الاول على نقاط التفرع a , b , d نحصل على

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad \text{.....} \quad 1$$

$$I_6 + I_3 = I_4 \quad \text{.....} \quad 2$$

$$I_5 + I_2 = I_4 \quad \text{.....} \quad 3$$

وبتطبيق قانون كيرشوف الثاني نحصل على

$$-5I_5 - 12 - 2I_1 + 3I_2 = 0 \quad \text{.....} \quad 4$$

$$-68I_6 + 6I_3 + 2I_1 + 12 = 0 \quad \text{.....} \quad 5$$

$$-I_4 + 88 - 3I_2 - 6I_3 = 0 \quad \text{.....} \quad 6$$

وهكذا حصلنا على ست معادلات تتضمن ست قيم مجهوله . وبتعويض عن I_5 من المعادلة 3 في المعادلة 4 تصبح على النحو التالي

$$-5(I_4 - I_2) - 12 - 2I_1 + 3I_2 = 0$$

$$-2I_1 + 8I_2 - 5I_4 - 12 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7$$

وبالتعويض عن I_6 من المعادلة 2 تصبح المعادلة 5 بالشكل التالي

$$-68(I_4 - I_3) + 6I_3 + 2I_1 + 12 = 0$$

$$-68I_4 + 74I_3 + 2I_1 + 12 = 0$$

ولكن $I_1 + I_2 = I_3$

لذا

$$-68I_4 + 74I_2 + 74I_1 + 12 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8$$

واخيرا نعوض عن I_3 في المعادلة 6 لتصبح بالصيغة التالية

$$-I_4 + 88 - 3I_2 - 6(I_1 + I_2) = 0$$

$$-I_4 + 88 - 6I_1 - 9I_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9$$

وباعادت ترتيب المعادلات 7،8،9

$$-2I_1 + 8I_2 - 5I_4 = 12$$

$$74I_1 + 74I_2 - 68I_4 = -12$$

$$6I_1 + 9I_2 + I_4 = 88$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 8 & -5 \\ -12 & 74 & -68 \\ 88 & 9 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 8 & -5 \\ 76 & 74 & -68 \\ 6 & 9 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$I_1 = 1A$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 & -5 \\ 76 & -12 & -68 \\ 6 & 88 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 8 & -5 \\ 76 & 74 & -68 \\ 6 & 9 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$I_2 = 8A$$

$$I_4 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 8 & 12 \\ 76 & 74 & -12 \\ 6 & 9 & 88 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 8 & -5 \\ 76 & 74 & -68 \\ 6 & 9 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$I_4 = 10A$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = 9A$$

$$I_5 = I_4 - I_2 = 2A$$

$$I_6 = I_4 - I_3 = 1A$$