3.5- القيمة الفعالة للتيار المتناوب (rms)

تعرف القيمة الفعالة للتيار المتناوب (AC) على انها **قيمة ذلك التيار الثابت القيمة (DC) الذي يولد نفس كمية الحرارة في مقاومة معينة ولنفس الفترة الزمنية .**

ولايجاد العلاقة الرياضية بين القيمة الفعالة للتيار (I) والقيمة القصوى له (I_0) ، نفرض ان تياراً جيبياً معطى بالدالة

$$i = I_0 \sin \omega t$$

يمر في مقاومة نقية R ثم نجد كمية الحرارة المتولدة لفترة زمنية معينة (t) نتيجة لمرور هذا التيار فنحصل على $\mathrm{H} = \int_0^t i^2 R\, dt = \int_0^t R I_0^2 \sin^2 \omega t\, dt$

ولتوليد كمية الحرارة نفسها طبقاً للتعريف الذي اشرنا اليه تواً ، يمكننا امرار تيار ثابت قيمته I مساوية للقيمة الفعالة للتيار المتناوب في المقاومة R للفترة الزمنية ذاتها فينتج

$$\mathrm{H} = I^2 R t$$

ومن تساوي هاتين المعادلتين نحصل على المعادلة التي يمكن بواسطتها ايجاد القيمة الفعالة للتيار الجيبي (وكذلك للفولتية الجيبية) وهي

$$I^2 = I_0^2 \left(\frac{1}{t} \int_0^t \sin^2 \omega t\, dt \right)$$

على ان يؤخذ الزمن t مساوياً لمدة دورة واحدة (او لمدة عدد كامل من الدورات) ولهذا يصبح من الافضل اعادة كتابة هذه المعادلة كما يأتي

$$I^2 = I_0^2 \left(\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t\, dt \right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (46)$$

واذا تذكرنا الصيغة الرياضية المشار اليها في اعلاه للتيار الجيبي لاتضح ان

$$i^2 = I_0^2 \sin^2 \omega t$$

عندئذ يصبح بالامكان ايجاد صيغة عامة لحساب القيمة الفعالة لاي تيار متناوب مهما كان شكل الدالة المعبرة عن قيمتة الانية ، هذه الصيغة هي

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\ dt \qquad \text{...} \qquad (47)$$

اذا ان $i(t)$ تمثل الدالة الرياضية المعبرة عن القيمة الانية للتيار المتناوب .

وبتبسيط وحل التكامل في المعادلة (46) نحصل على

$$I^2 = I_0^2\left(\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\omega t\ dt\right) = I_0^2 \times \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}(1-\cos 2\omega t)\ dt$$

$$= \frac{I_0^2}{2T}\left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right]_0^T$$

لكن

$$\sin 2\omega T = \sin 4\pi = 0$$

لذا

$$I^2 = \frac{I_0^2}{2T}[T-0] = \frac{I_0^2}{2}$$

وباخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0.707\ I_0 \qquad \text{.................................} \qquad (48)$$

وباتباع نفس الخطوات السابقة يمكن ان نحصل على القيمة الفعالة القصوى للفولتية

$$V = \frac{V_0}{\sqrt{2}} = 0.707 V_0 \qquad \text{.................................} \qquad (49)$$

ملاحظة

$I\ \&\ V$ في المعادلتين (48 & 49) تمثل قيمة (rms) لكلاهما

فعندما نقول ان الطاقة الكهربائية تجهز في بلادنا بفولتية (220V) نعني بذلك ان القيمة الفعالة للفولتية هي (220V) وان قيمتها القصوى تساوي $V_0 = \sqrt{2}\,V = 311\ volt$

مثال11

تيار جيبي قيمة الفعالة عشرة امبيرات وتردده خمسين هرتز .

(أ) اكتب المعادلة المعبرة عن القيمة الانية للتيار .

(ب) جد القيمة الانية للتيار بعداجتياز القيمة القصوى الموجبة بزمن قدرة 12.5ms

الحل:

(أ) نجد القيمة القصوى للتيار اولاً $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0.707\, I_0$

$$I_0 = \frac{I}{0.707} = \frac{10}{0.707} = 14.14 \text{ A}$$

فاذا اعتبرنا نقطة الصفر مرجعاً لقياس القيمة الانية لاخذت المعادلة الشكل الاتي

$$i = I_0 \sin \omega t = 14.14 \sin \omega t$$

لكن $\omega = 2\pi f = 100\pi$

لذا

$$i = 14.14 \sin 100\pi t$$

(ب) لحساب الزمن ابتداء من نقطة الصفر ينبغي اضافة ربع مدة الدورة الى الزمن المعطى وذلك لان الوصول الى القيمة القصوى للتيار يستغرق زمناً قدره $\frac{T}{4}$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 2 \times 10^{-2} s$$

لذا

$$t = 12.5 \times 10^{-3} + \frac{2 \times 10^{-2}}{4} = 17.5 \times 10^{-3} s$$

وبالتعويض عن الزمن في المعادلة اعلاه نحصل على القيمة الانية للتيار

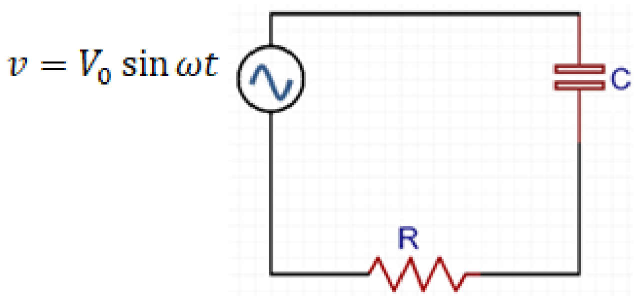
$$i = 14.14 \sin(100\pi \times 17.5 \times 10^{-3}) = -10 \text{ A}$$

3.6- دوائر التيار المتناوب

تطرقنا فيما مضى الى الحالات المثالية للمتسعة والمحث التي لا تمتلك مقاومة ، ولكن عمليا سيكون الامر مختلفاً عندما يتعذر اهمال مقاومة المتسعة ومقاومة المحث . او عندما يكون هناك مقاومات اخرى متصلة على التوالي معها . وهذا ما سنتطرق الية في المرحلة التالية .

3.6- (أ) تسليط فولتية جيبية على دائرة توالي مكونة من مقاومة ومتسعة

لنفرض ان مقاومة قيمتها R متصلة على التوالي مع متسعة سعتها C ، وتم تسليط عليها فولتية جيبية هي $v = V_0 \sin \omega t$ وكما موضحة في الشكل (21)



الشكل (21)

فبتطبيق قانون كيرشوف الثاني على هذه الدائرة لوجدنا ان القيمة الانية للفولتية المسلطة تساوي حاصل جمع القيم الانية لفرق الجهد الاني عبر المتسعة وفرق الجهد الاني عبر المقاومة .

$$v = V_R + V_C$$

واذا فرضنا ان التيار الاني المتكون في الدائرة في لحظة معينة هو i وان القيمة الانية لشحنة المتسعة هي q لنتج $V_C = \frac{q}{C}$, $V_R = iR$

وبالتعويض عن القيم الانية لفرق الجهد في العلاقة اعلاه نحصل على

$$V_0 \sin \omega t = iR + \frac{q}{C}$$

وباخذ المشتقة بالنسبة للزمن ينتج

$$\omega V_0 \cos \omega t = R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\ \frac{dq}{dt}$$

لكن القيمة الانية للتيار تساوي $i = \frac{dq}{dt}$ لذا

$$\omega V_0 \cos \omega t = R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} \qquad \text{.....................................} \qquad (50)$$

بناءً على ما جاء في الفقرات السابقة عن طبيعة التيار المتناوب نستطيع ان نستنتج الاتي حول التيار المتكون في الدائرة اعلاه .

a) ان التيار جيبي وتردده مساوي لتردد الفولتية المسلطة .
b) ان التيار يختلف في الطور عن الفولتية المسلطة بزاوية φ وهي زاوية طور مجهولة القيمة بطبيعة الحال وحيث ان التيار يسبق الفولتية فكانت اشارة الجمع دلالة على ذلك.
c) ان القيمة القصوى لدالة التيار I_0 مجهولة كذلك وعلى ضوء هذه الملاحظات فان

$$i = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

نعوض الان االقيمة الانية للتيار (i) في المعادلة (50) فنحصل على

$$\omega V_0 \cos \omega t = R\omega I_0 \cos(\omega t + \varphi) + \frac{I_0}{C}\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\cos \omega t = \frac{RI_0}{V_0}\cos(\omega t + \varphi) + \frac{I_0}{C\omega V_0}\sin(\omega t + \varphi)$$

وبما ان

$$\boldsymbol{\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

$$\boldsymbol{\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B}$$

لذا

$$\cos \omega t = \frac{RI_0}{V_0}\ (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) +$$

$$\frac{I_0}{C\omega V_0}(\sin \omega t\ \ \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi)$$

وبفتح الاقواس ثم اخراج $\sin\omega t$ و $\cos\omega t$ خارج الاقواس نحصل على

$$0=\cos\omega t\left(1-\frac{RI_0}{V_0}\cos\varphi-\frac{I_0}{\omega CV_0}\sin\varphi\right)+$$

$$\sin\omega t\,(\frac{RI_0}{V_0}\sin\varphi-\frac{I_0}{\omega CV_0}\cos\varphi)$$

وبملاحظة هذه المعادلة يتضح انه اذا كان كل من المقدارين المحصورين داخل القوسين صفراً ، لاصبح الطرف الايمن من المعادلة مساوياً للصفر . وعلية فان الشرط اللازم توفرة لكي تتحقق المعادلة سيكون متمثلاً بالمعادلتين الاتيتين .

$$1-\frac{RI_0}{V_0}\cos\varphi-\frac{I_0}{\omega CV_0}\sin\varphi=0 \qquad \text{.......................} \qquad (51)$$

$$\frac{RI_0}{V_0}\sin\varphi-\frac{I_0}{\omega CV_0}\cos\varphi=0 \qquad \text{..............................} \qquad (52)$$

$$\frac{RI_0}{V_0}\sin\varphi=\frac{I_0}{\omega CV_0}\cos\varphi$$

اذن

$$\tan\varphi=\frac{1}{\omega RC} \qquad \text{..} \qquad (53)$$

وبما ان

$$\boldsymbol{tan^2\theta+1=sec^2\theta \quad , \quad sec^2\theta=\frac{1}{cos^2\theta} \quad , \quad sin^2\theta+cos^2\theta=1}$$

يمكن ان نجد ان

$$\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}} \qquad \text{..................................} \qquad (54)$$

$$\cos\varphi = \frac{\omega RC}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}} \qquad \text{.............................} \qquad (55)$$

وبتعويض عن قيمتي $\sin\varphi$ و $\cos\varphi$ في المعادلة (51) نحصل على

$$\boldsymbol{I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}} \qquad \text{.................................} \qquad (56)$$

يتبين ان القيمة تحت الجذر تقوم مقام المقاومة الكلية في دائرة التيار المستمر . بينما هنا يطلق عليها اسم الممانعة (impedance) ويرمز لها بالحرف Z وبهذا نجد ان الممانعة للدائرة في الشكل (21) تساوي

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

وحيث ان $\frac{1}{\omega C}$ تمثل الرادة السعوية X_C

اذن

$$\boldsymbol{Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}} \qquad \text{...........................} \qquad (57)$$

اما زاوية الطور

$$\boldsymbol{\varphi = \tan^{-1}\frac{1}{\omega RC}} \qquad \text{.............................} \qquad (58)$$

وبالتعويض عن قيمتي I_0 و φ في دالة التيار المتكون في الدائرة

$$i = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

نحصل على

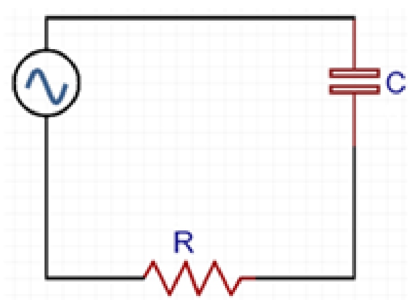
$$i = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \sin(\omega t + \tan^{-1} \frac{1}{\omega RC}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

لكن الكمية $\frac{1}{\omega C}$ هي الرادة السعوية X_C لذا

$$i = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + X_c^2}} \sin(\omega t + \tan^{-1} \frac{X_C}{R}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

مثال12

اذا علم ان دالة الفولتية المسلطة على دائرة مكونة من متسعة $(22.7\mu F)$ متصلة على التوالي مع مقاومة (48Ω) كما مبين في الشكل ادناه هي $v = 300 \sin 314t$
اوجد دالة التيار المتكون في هذه الدائرة .



الحل:

يتضح من معادلة الفولتية المسلطة ان

$$V_0 = 300\ volt \quad , \qquad \omega = 314\ rad/s$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{1}{\omega RC} = \tan^{-1} \frac{1}{314 \times 22.7 \times 10^{-6} \times 48} = 71$$

اما القيمة القصوى للتيار

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \frac{300}{\sqrt{(48)^2 + \frac{1}{(314)^2 (22.7 \times 10^{-6})^2}}} = 2.03\ \text{A}$$

لذا تاخذ معادلة التيار الصيغة الاتية

$$v = 300 \sin(314t + 71)$$

وذلك كون التيار سابقاً لفرق الجهد المسلط على الدائرة بزاوية 71 درجة .