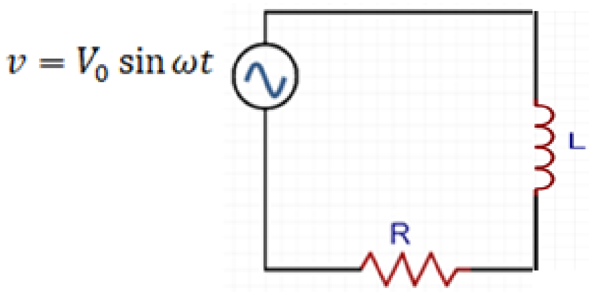
3.6- (ب) تسليط فولتية جيبية على دائرة توالي مكونة من مقاومة ومحث

لنفرض ان مقاومة قيمتها R متصلة على التوالي مع محث L ، وتم تسليط عليها فولتية جيبية هي $v = V_0 \sin \omega t$ وكما موضحة في الشكل (22)



الشكل (22)

للتشابة الكبير بين الخطوات التي تم ذكرها في الفقرة السابقة سنسرد هنا العلاقات الرياضية فقط مع تبيان الفروقات ان وجدت .

$$v = V_R + V_L$$

اي ان

$$V_0 \sin \omega t = iR + L\frac{di}{dt} \qquad \text{.............................} \qquad (61)$$

$$i = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

ولان التيار في المحث يتاخر عن الفولتية فكانت عملية الطرح دلاله على ذلك .

$$V_0 \sin \omega t = I_0 R \sin(\omega t - \varphi) + \omega L I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\sin \omega t = \frac{RI_0}{V_0}(\sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi) +$$

$$\frac{\omega L I_0}{V_0}(\cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi)$$

لذا

$$\sin \omega t \left(1 - \frac{RI_0}{V_0}\cos \varphi - \frac{\omega L I_0}{V_0}\sin \varphi\right) + \cos \omega t \left(\frac{RI_0}{V_0}\sin \varphi - \frac{\omega L I_0}{V_0}\cos \varphi\right) = 0$$

وبملاحظة هذه المعادلة يتضح انه اذا كان كل من المقدارين المحصورين داخل القوسين صفراً ، لاصبح الطرف الايسر من المعادلة مساوياً للصفر . وعلية فان الشرط اللازم توفرة لكي تتحقق المعادلة سيكون متمثلاً بالمعادلتين الاتيتين .

$$1-\frac{RI_0}{V_0}\cos\varphi-\frac{\omega LI_0}{V_0}\sin\varphi=0 \qquad \ldots\ldots (62)$$

$$\frac{RI_0}{V_0}\sin\varphi-\frac{\omega LI_0}{V_0}\cos\varphi \qquad \ldots\ldots (63)$$

والان يصبح بالامكان ايجاد ظل زاوية الطور من المعادلة (63) فنحصل على

$$\tan\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{\omega L}{R} \qquad \ldots\ldots (64)$$

كما يمكن الاستفادة من هذة النتيجة لحساب جيب وجيبتمام زاوية الطور

$$\sin\varphi=\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \qquad \ldots\ldots (65)$$

$$\cos\varphi=\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \qquad \ldots\ldots (66)$$

وبالتعويض عن هاتين النتيجتين في المعادلة (62) نحصل على

$$1=\frac{RI_0}{V_0}\,\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}+\frac{\omega LI_0}{V_0}\,\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$$

وبحل هذة المعادلة نحصل على القيمة القصوى للتيار المتكون في الدائرة

$$\boldsymbol{I_0=\frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}} \qquad \ldots\ldots (67)$$

يتبين ان القيمة تحت الجذرفي العلاقة (67) تمثل ممانعة الدائرة المكونة من ملف متصل على التوالي مع مقاومة . وعلية تصبح الممانعة في هذة الحالة مساوية للكمية .

$$\boldsymbol{Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}}$$

حيث ان X_L تمثل الرادة الحثية والتي تساوي ωL

كما يمكن تحديد قيمة زاوية الطور حسب العلاقة (64) فينتج

$$\boldsymbol{\varphi = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}} \qquad \text{..................................} \qquad (68)$$

<u>مثال13</u>

سلطت فولتية جيبية قيمتها الفعالة تساوي 100 فولت وذات تردد قدرة 70 هرتز على ملف ذو حثية قدرها 0.05 هنري ومقاومة 16 اوم احسب .

(أ) القيمة القصوى للتيار .
(ب) الرادة الحثية للملف .
(ت) ممانعة الملف .
(ث) زاوية الطور التي يتخلف بها التيار في الملف عن الفولتية .

<u>الحل:</u>

(أ) $V_0 = \sqrt{2}V = 100\sqrt{2} = 141.4\ volt$

(ب) $X_L = \omega L = 2\pi f L = 2\pi \times 70 \times 0.05 = 22\ \mathrm{H}$

(ت)

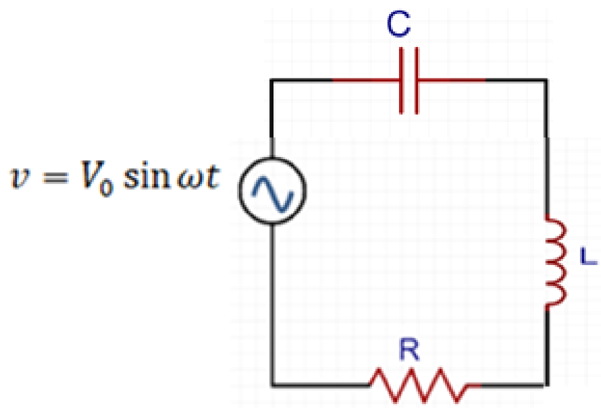
$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{(16)^2 + (22)^2} = 27.2\ \Omega$$

(ث)

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R} = \tan^{-1}\frac{22}{16} = 54^0$$

3.6- (ج) تسليط فولتية جيبية على دائرة توالي مكونة من مقاومة ومحث ومتسعة

لنفرض ان مقاومة قيمتها R متصلة على التوالي مع محث L ومتسعة C ، وتم تسليط عليها فولتية جيبية هي $v = V_0 \sin \omega t$ وكما موضحة في الشكل (23)



الشكل (23)

حسب قانون كيرشوف الثاني فان

$$v = V_R + V_L + V_C$$

لكننا نعلم ان

$$V_L = L\frac{di}{dt} \quad , \quad V_R = iR \quad , \quad V_C = \frac{q}{C}$$

بالتعويض عن فروق الجهد في المعادلة اعلاه نحصل على

$$V_0 \sin \omega t = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

وباخذ المشتقة لطرفي هذه المعادلة بالنسبة للزمن نحصل على

$$\omega V_0 \cos \omega t = R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{d^2 t} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt}$$

عندئذ يصبح بالامكان الاستعاضة عن $\frac{dq}{dt}$ بالتيار الاني i وبذلك تاخذ المعادلة اعلاه الصيغة التالية

$$\omega V_0 \cos \omega t = R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{d^2 t} + \frac{i}{c} \quad \text{..........................} \quad (69)$$

هذه معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية ذات معاملات ثابتة . يمكن حلها وايجاد دالة التيار المتناوب المتكون في الدائرة كما مرة في الفقرتين السابقتين . لايجاد قيمتي $\boldsymbol{I_0}$ ، $\boldsymbol{\varphi}$ ولو اكملنا الحل سنجد انة لن تختلف كثيراً عن حل المعادلتين (50) و (61) سوى في بعض الخطوات الجبرية الناتجة عن احتواء المعادلة (69) حداً اضافياً مقارنة مع تلك المعادلتين . وللك سنسرد المعادلات فقط .

$$\boldsymbol{I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}}} \quad \text{.....................................} \quad (70)$$

$$\boldsymbol{Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad \text{........................} \quad (71)$$

$$\boldsymbol{\varphi = \tan^{-1}\frac{X_L-X_C}{R}} \quad \text{..........................} \quad (72)$$

وكما فرضنا ان

فاذا كانت الرادة الحثية اكبر من الرادة السعوية هذا يعني ان الرادة الكلية للدائرة تكون موجبة وبهذة الحالة تكون زاوية الطور $\boldsymbol{\varphi}$ موجبة وهذا يعني ان التيار يكون متاخر عن فرق الجهد المسلط . فكما فرضنا ان الفولتية المسلطة هي

$$v = V_0 \sin \omega t$$

لذلك ستصبح دالة التيار المتكون في دائرة التولي هي

$$i = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

او بصورة اخرى

$$\boldsymbol{i = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}} \sin(\omega t - \tan^{-1}\frac{X}{R})} \quad \text{.....................} \quad (73)$$

اما اذا كانت الرادة السعوية اكبر من الرادة الحثية هذا يعني ان الرادة الكلية للدائرة تكون سالبة وبهذة الحالة تكون زاوية الطور $\boldsymbol{\varphi}$ سالبة وهذا يعني ان التيار يكون سابقاً لفرق الجهد المسلط .

3.7- الرنين في دائرة التوالي

بينا في الفقرات السابقة انة اذا كانت $(X_L > X_C)$ اصبحت زاوية الطور(φ) موجبة اما اذاكانت $(X_L < X_C)$ كانت زاوية الطور سالبة . اما في حالة $(X_L = X_C)$ عندئذ تصبح زاوالطور صفراً اي ان التيار المتكون في الدائرة يتطابق في الطور مع الفولتية المسلطة عليها . في هذه الحالة يقال ان الدائرة في حالة **رنين (resonance)** عندئذ تصبح ممانعة الدائرة اقل ما يمكن وتساوي R حسب ما يظهر في العلاقة (71) واما التيار المتكون في الدائرة فيحصل على اعلى قيمة ممكنة وحسب ما موضح في المعادلة (70).

ولكي تحدث حالة الرنين في دائرة التوالي لابد ان يكون تردد الفولتية المسلطة مساوياً لقيمة محددة تدعى **تردد الرنين** f_0 . ويمكن ايجاده من الشرط المذكور اعلاه

$$X_L = X_C$$

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

$$2\pi f_0 L = \frac{1}{2\pi f_0 C}$$

اذن

$$\boldsymbol{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}} \qquad \text{..} \qquad (74)$$

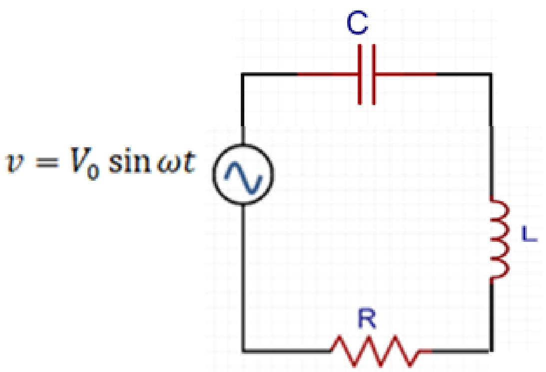
كثيراً ما نستخدم دائرة رنين التوالي في عمل هوائي اجهزة الراديو . فعند نريد التقاط بث معين نغير بالتدريج سعة المتسعة بواسطة زر التنغيم في الجهاز الى ان يحدث الرنين ويصبح تردد دائرة الهوائي مطابقاً لتردد الموجات المنبعثة من المحطة الاذاعية المنتخبة .

مثال14

اذا علمت ان القيمة القصوى لفولتية المصدر في الدائرة ادناه هي 100 فولت وان
$R = 170\ \Omega\ , L = 0.1H\ , C = 2\mu F$

(أ) احسب كلا من ممانعة الدائرة والقيمة القصوى للتيار عندما يكون تردد الفولتية المسلطة 800 هرتز .

(ب) ما مقدار التردد اللازم لحدوث الرنين ، وما مقدار ما تؤول اليه القيمة القصوى للتيار عند حدوث الرنين في هذه الدائرة .



الحل:

(أ) من المعادلة (71) نحصل على

$$Z = \sqrt{R^2 + (2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C})^2}$$

$$Z = \sqrt{(170)^2 + (2\pi \times 800 \times 0.1 - \frac{1}{2\pi \times 800 \times 2 \times 10^{-6}})^2} = 437\ \Omega$$

اما القيمة القصوى للتيار فتساوي

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{100}{437} = 0.229\ \text{A}$$

(ب) وطبقاً للمعادلة (74) نجد تردد الرنين

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0.1 \times 2 \times 10^{-6}}} = 356.7\ \text{Hz}$$

اما القيمة القصوى للتيار فسوف تصبح

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{V_0}{R} = \frac{100}{170} = 0.588\ \text{A}$$