جامعة الأنبار / كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

محاضرات في مادة
المعادلات التفاضلية الجزئية ٢
للصف الثالث

إعداد : أ.م. قاسم حسين علاوي

إسم المادة : معادلات تفاضلية جزئية ٢

الفصل : الثاني

رقم المحاضرة : ١ من أصل ١٥ محاضرة

المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة (n):

تعرفنا في الفصل الدراسي الأول على طرق حل المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى ، أما في هذا الفصل سنتعرف على طرق حل المعادلات التفاضلية الجزئية من المراتب العليا و التي تقسم إلى معادلات متجانسة و معادلات غير متجانسة (المقصود هنا بالتجانس هو تماثل (تساوي) المشتقات في كل حد من حدود المعادلة :

١ - المعادلات الخطية المتجانسة و التي تأخذ الصيغة :

$$A_o \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + A_1 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y} + A2 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2} + ...+ A_n \frac{\partial^n z}{\partial y^n} = f(x,y).......(1).$$

إذا كانت المعاملات $A_o, A_1, ..., A_{(n-1)}, A_n$ في المعادلة (١) أعلاه ثابتة فتسمى المعادلة بمعادلة ذات معاملات ثابتة و إذا كانت متغيرة فتسمى بمعادلة ذات معاملات متغيرة، وللسهولة يمكن أن نعبر عن المعادلة (١) كالآتي :

$$(A_o D^n + A_1 D^{n-1} D' + A2 D^{n-2} D'^2 + ...+ A_n D'^n) z = f(x,y).......(2).$$

أ - حل المعادلات الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة :

من المعلوم بأن الحل العام للمعادلة الجزئية عبارة عن تركيب خطي من الحل المتتام (z1) و الحل الخاص (z2) حيث إن الحل المتتام يمثل الحل العام للمعادلة :

$$(A_o D^n + A_1 D^{n-1} D' + A2 D^{n-2} D'^2 + ...+ A_n D'^n) z = 0.......(3).$$

و الذي يتطلب إيجاده فرض إن :

$$z = \phi(y+mx).,\rightarrow Dz = m\phi'(y+mx).,\rightarrow D^2 z = m^2 \phi''(y+mx).$$

$$\rightarrow D^3 z = m^3 \phi'''(y+mx).,............\rightarrow D^n z = m^n \phi^{(n)}(y+mx).$$

و بنفس الطريقة يكون :

$$\rightarrow D'^n z = \phi^{(n)}(y+mx).,D^r D^s z = m^r \phi^{(r+s)}(y+mx).$$

بالتعويض في المعادلة الأصلية نحصل على :

$$(A_o m^n + A_1 m^{n-1} + A2 m^{n-2} + ...+ A_n)\phi(y+mx) = 0.......(4).$$

و بالقسمة على $\phi(y+mx)$ نحصل على :

$$(A_o m^n + A_1 m^{n-1} + A2m^{n-2} + ...+ A_n) = 0.......(5).$$

المعادلة (5) معادلة جبرية تسمى المعادلة التابعة (subsdiral equation) للمعادلة الأصلية و التي جذورها (m1 , ……. , mn) و التي بتعويضها بالمعادلة أدناه نحصل على الحل المتتام :

Z1 = $\phi1(y+m1x)+\phi2(y+m2x)+..........+\phi n(y+mnx)...........(6).$

ملاحظة : ١ - في حالة وجود جذور متشابهة و لضمان إستقلالية الحلول نضرب تلك الجذور بقوى مختلفة ل **x** .

٢ - في حالة وجود جذر عقدي فإن مرافقه يكون جذراً للمعادلة أيضاً .

مثال ١ : جد الحل المتتام للمعادلة :

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+2\frac{\partial^3 z}{\partial x2\partial y}-5\frac{\partial^3 z}{\partial x\ \partial y^2}-6\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=0.$$

$\rightarrow (D^3+2D^2D'-5DD'^2-6D'^3)Z=0.$

$\rightarrow m^3+2m^2-5m-6=0.,(subsdiralequation).$

$\rightarrow (m+1)(m^2+m-6)=0.,\rightarrow (m+1)(m-2)(m+3)=0 \rightarrow m1=-1.,m2=2.,m3=-3.$

$\sin ce, z1=\phi1(y+m1x)+\phi2(y+m2x)+\phi3(y+m3x)+...........$

$\rightarrow z1=\phi1(y-x)+\phi2(y+2x)+\phi3(y3x).$

مثال ٢ : جد الحل المتتام للمعادلة : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+9\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

$\rightarrow (D^2+9D'^2)Z=0.,\rightarrow m^2+9=0.(subsdiralequation).,\rightarrow m^2=-9.,\rightarrow m=\pm i.$

$\sin ce, z1=\phi1(y+m1x)+\phi2(y+m2x)+\phi3(y+m3x)+.........$

$\rightarrow z1=\phi1(y-ix)+\phi2(y+ix).$

مثال ٣ : جد الحل المتتام للمعادلة : $(D^3-6D^2D'+12DD'^2-8D'^3)Z=0.$

$\rightarrow m^3-6m^2+12m-8=0.,(subsdiralequation).$

$\rightarrow (m-2)(m^2-4m+4)=0.,\rightarrow (m-2)(m-2)(m-2)=0.,\rightarrow m1=m2=m3=2.$

$\rightarrow z1=\phi1(y+2x)+\phi2x(y+2x)+\phi2x^2(y+2x).$
