إسم المادة : معادلات تفاضلية جزئية ٢

الفصل : الثاني

رقم المحاضرة : ٣ من أصل ١٥ محاضرة

<u>ايجاد الحل الخاص للدالة الأسية اذا كانت f (a,b) = 0</u> :

في مثل هذه الحالة نقوم بتحليل الدالة $f(D,D')$ كلآتي :

$$f(D,D') = \left(D - \frac{a}{b}D'\right)^r G(D,D')., such\ that, G(a,b) \neq 0.$$

$$\rightarrow z_2 = \frac{1}{G(a,b)} \cdot \frac{1}{\left(D-\frac{a}{b}D'\right)^r} \cdot e^{ax+by} \quad such\ that, G(a,b) \neq 0.$$

نفرض إن : $\frac{1}{\left(D-\frac{a}{b}D'\right)^r} \cdot e^{ax+by} = u_r.$

و بضرب الطرفين في الوسطين نحصل على العلاقة : $\left(Du_r - \frac{a}{b}D'u_r \right)^r = e^{ax+by}.$

نستخدم طريقة الإستنتاج الرياضي لحساب هذه المعادلة (التي تمثل معادلة لاكرانج) : كالآتي :

If r=1 $\rightarrow \left(Du_1 - \frac{a}{b}D'u_1 \right) = e^{ax+by}.$

$$\rightarrow \frac{dx}{1} = \frac{dy}{-\frac{a}{b}} = \frac{dz}{e^{ax+by}}. \quad (\ subsdiral\ lagrang\ equation\ ).$$

$$\rightarrow -\frac{a}{b}\,\mathrm{dx} = \mathrm{dy}. \rightarrow -\frac{a}{b}\mathrm{x} = \mathrm{y} + \mathrm{c}. \quad \rightarrow ax + by = bc. \dots\dots(*).$$

The another relation we take :

$$\frac{dx}{1} = \frac{du_1}{e^{ax+by}}. \rightarrow e^{ax+by}\ dx = du_1. \rightarrow e^{bc}\ dx = du_1.$$

$$\rightarrow xe^{bc} = u_1 + d. \rightarrow u_{1+d=xe^{bc}}$$

$$\rightarrow u_1 = \frac{x}{1!}\ e^{ax+by} \dots\dots\dots(**).\ \{by\ using\ (*)\ , we\ can\ but\ d = 0.\}$$

If r=2 $\rightarrow \left(Du_2 - \frac{a}{b}D'u_2 \right)^2 = e^{ax+by}.$

$$\rightarrow \left(Du_2 - \frac{a}{b}D'u_2\right)\left(Du_2 - \frac{a}{b}D'u_2\right) = e^{ax+by}.$$

باستخدام العلاقة $(**)$ نحصل على :

$$\left(Du_2 - \frac{a}{b}D'u_2 \right) = x\,e^{ax+by}. this\ is\ also\ lagrang\ equation\ by\ solving\ we\ get:$$

$$\rightarrow u_2 = \frac{x^2}{2!}\ e^{ax+by} \dots\dots\dots(***)$$

عند ما نستمر بنفس الطريقة نحصل على :

$$\rightarrow \quad u_r = \frac{x^r}{r!} \; e^{ax+by} \; \ldots\ldots\ldots (****)$$

و بذلك يكون :

$$Z2 = \frac{1}{G(a,b)} \cdot \frac{x^r}{r!} \; e^{ax+by} \; .\, such\ that \quad G(a,b) \neq 0, and\ f(a,b) = 0.$$

<u>مثال ١ :</u> جد الحل العام للمعادلة :

$$\left(D^2 - 4\,D'^2\right)Z = e^{2x+y} \quad .$$

<u>الحل :</u>

$m^2 - 4 = 0.\,(\,subsdiral\ \ equation\,).\rightarrow (\mathrm{m}-2)(\mathrm{m}+2) = 0. \rightarrow \mathrm{m} = \mp 2.$

$\rightarrow \quad Z1 = \emptyset 1(y+2x) + \emptyset 2(y-2x).$

$since\ a = 2, b = 1. \;\rightarrow\; f(2,1) = 2^2 - 4(1) = 4 - 4 = 0.$

$\rightarrow \; f(D,D') = \left(D^2 - 4\,D'^2\right) = (D - 2D')(\,D + 2D').$

$\rightarrow \; r = 1\,,\; G(D,D') = (\,D + 2D').\,, \rightarrow \; G(2,1) = (2 + 2.1) = 4 \neq 0.$

$\rightarrow \quad Z2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{X^1}{1!}\, e^{2x+y} \;. = \frac{x}{4}\; e^{2x+y}\,.$

$since\ Z = Z1 + Z2. \quad \rightarrow \quad Z = \emptyset 1(y+2x) + \emptyset 2(y-2x) + \frac{x}{4}\; e^{2x+y}\,.$

<u>مثال ٢ :</u> جد الحل العام للمعادلة :

$$\left(D^3 - D\,D'^2\right)Z = e^{x-y} \quad .$$

$m^3 - \mathrm{m} = 0.\,(\,subsdiral\ \ equation\,).\rightarrow m(\mathrm{m}-1)(\mathrm{m}+1) = 0.$

$\rightarrow m1 = 0.\,,\;\; m2 = 1.\,,\;\; m3 = -1.$ Type equation here.

$\rightarrow \quad Z1 = \emptyset 1(y) + \emptyset 2(y+x) + \emptyset 3(y-x).$

$since\ a = 1, b = -1. \;\rightarrow\; f(1,-1) = 1^3 - 1(-1)^2 = 1 - 1 = 0.$

$\rightarrow \; f(D,D') = \left(D^3 - D\,D'^2\right) = D(\,D - D')(\,D + D').$

$\rightarrow \; r = 1\,,\; G(D,D') = D(\,D - D').\,, \rightarrow \; G(1,-1) = 1(1-(-1) = 2 \neq 0.$

$\rightarrow \quad Z2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{X^1}{1!}\, e^{2x+y} \;. = \frac{x}{2}\; e^{2x+y}\,.$

$since\ Z = Z1 + Z2. \quad \rightarrow \quad Z = \emptyset 1(y) + \emptyset 2(y+x) + \emptyset 3(y-x) + \frac{x}{2}\; e^{2x+y}\,.$

تمارين ((جد الحل العام للمعادلات الآتية)) :

1	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x+y}.$	**5**	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{x-y}.$
2	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{x-y}$	**6**	$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}-2\frac{\partial^3 z}{\partial x 2\partial y}-\frac{\partial^3 z}{\partial x\ \partial y^2}+2\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=e^{x+y}$
3	$(D^2-4D'^2)Z=e^{2x+y}.$	**7**	$(D^2-5DD'+4D'^2)Z=e^{x+y}.$
4	$(D^2-2DD'+D'^2)Z=e^{x+y}$	**8**	$(D^3-4D^2D'+4DD'^2)Z=e^{2x+y}.$