إسم المادة : معادلات تفاضلية جزئية ٢

الفصل : الثاني

رقم المحاضرة : ٤ من أصل ١٥ محاضرة

٢- الدالة المثلثية : $(f(x,y) = sin(ax+by).,or\ f(x,y) = cos(ax+by).$

في هذه الحالة نفرض إن :

$$Z2 = A\,cos(ax+by) + Bsin(ax+by)\,.$$

ثم نقوم بإشتقاق الحل المفروض و حسب المشتقات الموجودة في المعادلة و نعوض هذه المشتقات في المعادلة المراد حلها للحصول على قيم الثوابت (A,B) بعد مساوات معاملات الدوال (sin , cos) في طرفي المعادلة .

مثال ١ : جد الحل العام للمعادلة :

$$(D^2 - DD' - 2D'^2)Z = cos(x+3y).$$

$m^2 - m - 2 = 0.$ (*subsdiral equation*). $\rightarrow (m+1)(m-2) = 0.$

$\rightarrow m1 = -1.,\ m2 = 2\,.$

$\rightarrow\ Z1 = \emptyset 1(y-x) + \emptyset 2(y+2x).$

Let $Z2 = A\,cos(x+3y) + Bsin(x+3y)\,.$

$\rightarrow DZ2 = -Asin(x+3y) + Bcos(x+3y)$

$\rightarrow D^2\,Z2 = -A\,cos(x+3y) - Bsin(x+3y)\,.$

$\rightarrow DD'\,Z2 = -3A\,cos(x+3y) - 3Bsin(x+3y)\,.$

$\rightarrow D'Z2 = -3Asin(x+3y) + 3Bcos(x+3y)$

$\rightarrow D'^2\,Z2 = -9A\,cos(x+3y) - 9Bsin(x+3y)\,.$

بتعويض هذه المشتقات بالمعادلة الأصلية نحصل على :

$-3A\,cos(x+3y) - 3Bsin(x+3y) + 3A\,cos(x+3y) + 3Bsin(x+3y) + 18A\,cos(x+3y) + 18Bsin(x+3y) = cos\,(x+3y)\,.$

$\rightarrow 20Acos\,(x+3y) + 20Bsin(x+3y) = cos\,(x+3y)\,.$

$\rightarrow B = 0.,20A = 1.,\rightarrow A = \frac{1}{20}\,.$

$\rightarrow\ Z2 = \frac{1}{20}\,cos\,(x+3y).$

$since\ Z = Z1 + Z2.\quad \rightarrow\quad Z = \emptyset 1(y-x) + \emptyset 2(y+2x) + \frac{1}{20}\,cos\,(x+3y).$

مثال 2 : جد الحل الخاص للمعادلة :

$$(D^3 - 7DD'^2 - 6D'^3)Z = \sin(x-2y).$$

Let $Z2 = A\cos(x-2y) + B\sin(x-2y)$.

$\rightarrow DZ2 = -A\sin(x-2y) + B\cos(x-2y)$

$\rightarrow D^2 Z2 = -A\cos(x-2y) - B\sin(x-2y)$.

$\rightarrow D^3 Z2 = A\sin(x-2y) - B\cos(x-2y)$.

$\rightarrow DD' Z2 = 2A\cos(x-2y) + 2B\sin(x-2y)$.

$\rightarrow DD'^2 Z2 = 4A\sin(x-2y) - 4B\cos(x-2y)$.

$D'Z2 = 2A\sin(x-2y) - 2B\cos(x-2y)$

$\rightarrow D'^2 Z2 = -4A\cos(x-2y) - 4B\sin(x-2y)$

$\rightarrow D'^3 Z2 = 8A\sin(x-2y) + 8B\cos(x-2y)$

بتعويض هذه المشتقات بالمعادلة الأصلية نحصل على :

$$A\sin(x-2y) - B\cos(x-2y) - 28A\sin(x-2y) + 28B\cos(x-2y)$$
$$- 48A\sin(x-2y) - 48B\cos(x-2y) = \sin(x-2y).$$

$\rightarrow -75A\sin(x-2y) - 21B\cos(x-2y) = \sin(x-2y).$

$\rightarrow -75A = 1 ., \rightarrow A = \frac{-1}{75} ., -21B = 0. \rightarrow B = 0.$

$\rightarrow Z2 = \frac{-1}{75}\cos(x+3y).$

تمارين ((جد الحل العام للمعادلات الآتية)) :

1	$(D^2 - DD' - 3D'^2)Z = \sin(x-y).$
2	$(D^2 - 3DD' - 4D'^2)Z = \cos(x+y).$
3	$(D^3 - 3D^2D' - 4DD'^2 + 12D'^3)Z = \sin(x+2y).$
4	$(D^3 - 4D^2D' + 5DD'^2 - 2D'^3)Z = \cos(x+3y).$
5	$(D^3 - 3D^2D' + 4D'^3)Z = \cos(x+y) + e^{x+y}.$