٣- الدالة متعددة الحدود : $(f(x,y) = x^a y^b.,\ \mathbf{a,b} > \mathbf{0}.$

في هذه الحالة نستفاد من إحدى المتسلسلتين :

$1-)\ \frac{1}{1-D} = 1 + D + D^2 + D^3 + D^4 + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots$

$2-)\ \frac{1}{1+D} = 1 - D + D^2 - D^3 + D^4 + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots$

من المعلوم بأن المعادلة يمكن أن نعبر عنها بالصيغة : $((f(D, D')\, Z = x^a y^b .))$

لذلك يمكن أن نعبر عن الحل الخاص في مثل هذه الحالة بالصيغة : $((Z2 = \frac{1}{f(D,D')} . x^a y^b .))$

مثال ١ : جد الحل العام للمعادلة :

$$(D^2 - D'^2)Z = x\, y^2.$$

$m^2 - 1 = 0.$ ($subsdiral\ equation$). $\rightarrow (m+1)(m-1) = 0.$

$\rightarrow m1 = 1.,\ m2 = -1.$

$\rightarrow\ Z1 = \emptyset 1(y+x) + \emptyset 2(y-x)$

$since\ \ Z2 = \frac{1}{f(D,D')} . x^a y^b .,\ then\ \ Z2 = \frac{1}{(D^2 - D'^2)} . x\, y^2.$

$\rightarrow\ Z2 = \frac{1}{D^2\left(1 - \frac{D'^2}{D^2}\right)} . x\, y^2.\ \rightarrow\ Z2 = \frac{1}{D^2}\left\{1 + \frac{D'^2}{D^2} + \frac{D'^4}{D^4} + \cdots \ldots\ldots\right\} x\, y^2.$

$\rightarrow\ Z2 = \frac{1}{D^2}\left\{x\, y^2 + \frac{2x}{D^2} + \frac{0}{D^4} + \cdots \ldots\ldots\right\}. = \frac{1}{D^2}\left\{x\, y^2 + \frac{x^3}{3}\right\}.$

$\rightarrow\ Z2 = \frac{1}{D}\left\{\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^4}{12}\right\}.\ \rightarrow\ Z2 = \frac{x^3 y^2}{6} + \frac{x^5}{60}.$

$since\ Z = Z1 + Z2.\ \rightarrow\ Z = \emptyset 1(y-x) + \emptyset 2(y+x) + \frac{x^3 y^2}{6} + \frac{x^5}{60}.$

مثال 2 : جد الحل الخاص للمعادلة :

$$\left(D^3 - 7DD'^2 - 6D'^3\right)Z = x^2y$$

$$since \quad Z2 = \frac{1}{f(D,D')} \cdot x^a y^b \,., \; then \quad Z2 = \frac{1}{\left(D^3 - 7DD'^2 - 6D'^3\right)} \cdot x^2y.$$

$$\rightarrow \quad Z2 = \frac{1}{D^3} \cdot \frac{1}{\left(1 - \left(7\frac{D'^2}{D^2} + 6\frac{D'^3}{D^3}\right)\right)} \cdot x^2y.$$

$$\rightarrow Z2 = \frac{1}{D^3}\left\{1 + \left(7\frac{D'^2}{D^2} + 6\frac{D'^3}{D^3}\right) + \left(7\frac{D'^2}{D^2} + 6\frac{D'^3}{D^3}\right)^2 + \cdots\cdots\cdots\right\} x^2y.$$

$$\rightarrow Z2 = \frac{1}{D^3}\left\{x^2y + 0 + \cdots\cdots\cdots\right\}.$$

$$\rightarrow Z2 = \frac{1}{D^2}\left\{\frac{x^3y}{3}\right\}. \quad \rightarrow Z2 = \frac{1}{D}\left\{\frac{x^4y}{12}\right\}. \quad \rightarrow Z2 = \frac{x^5y}{60}.$$

تمارين ((جد الحل العام للمعادلات الآتية)) :

1	$(D^2 - DD')Z = x^2\,y^2$..
2	$(D^3 - D'^3)Z = x^2\,y^4$..
3	$\left(D^2 + D'^2\right)Z = x^3\,y^2$..
4	$\left(D^2 - 4DD' + 4D'^2\right)Z = 2xy$..
5	$\left(D^2 - DD' - 6\,D'^2\right)Z = x^2\,y$..
6	$\left(D^3 - 4D^2D' + 4DD'^2\right)Z = x^3\,y$.