---

٥ ـ الدالة ذات الصيغة $\left(f(x,y) = g(ax+by) \right)$ **:**

$\mathbf{D\,f(x,y) = ag'(ax+by)} \rightarrow \mathbf{D^2\,f(x,y) = a^2 g''(ax+by)}, \ldots \rightarrow \mathbf{D^n\,f(x,y) = a^n g^{(n)}(ax+by)}.$

بنفس الطريقة يكون :

$\mathbf{D'f(x,y) = bg'(ax+by)} \rightarrow \mathbf{D'^2\,f(x,y) = b^2 g''(ax+by)}, \ldots \rightarrow \mathbf{D'^n\,f(x,y) = b^n g^{(n)}(ax+by)}.$

$\rightarrow f(D, D')\, g(ax+by) = f(a,b)\, g^{(n)}(ax+by)$.

$\rightarrow \dfrac{g^{(n)}(ax+by)}{f(D, D')} = \dfrac{g(ax+by)}{f(a,b)}$.

$\rightarrow Z2 = \dfrac{Integrating\ The\ Function\ g(ax+by)\ n\ times.}{f(a,b)}$., $Such\ that\ f(a,b) \neq 0.$

مثال ١ : حل المعادلة : $\left(D^2 - 6DD' + 9D'^2\right) Z = 2x + y$

$m^2 - 6m - 9 = 0.$ ($subsdiral\ equation$). $\rightarrow (m-3)(m-3) = 0.$

$\rightarrow m1 = m2 = 3$.

$\rightarrow \quad Z1 = \emptyset 1(y+3x) + x\,\emptyset 2(y+3x)$

$since\ \ a = 2, b = 1 \ \rightarrow \ f(2,1) = 4 - 12 + 9 = 1 \neq 0.$

$\rightarrow Z2 = \dfrac{Integrating\ The\ Function\ (2x+y)\ 2\ times.}{f(a,b)}$

$\rightarrow Z2 = \dfrac{(2x+y)^3}{1(6)}$.

$since\ Z = Z1 + Z2. \quad \rightarrow \quad Z = \emptyset 1(y+3x) + x\,\emptyset 2(y+3x) + \dfrac{(2x+y)^3}{6)}$.

ملاحظة : إذا كان (f (a,b) = 0.) نقوم بتحليل الدالة (f (D, D')) كالآتي :

$f(D, D') = (bD - aD')^r$

عندئذ يكون الحل الخاص بالشكل :

$Z2 = \dfrac{x^r}{r!} \cdot \dfrac{g(ax+by)}{b^r}$.

مثال ١ : حل المعادلة : $\left(9D^2 - 6DD' + D'^2\right)Z = x + 3y.$

$9m^2 - 6m + 1 = 0.$ ($subsdiral\ equation$). $\rightarrow (3m - 1)(3m - 1) = 0.$

$\rightarrow m1 = m2 = \frac{1}{3}.$

$\rightarrow \quad Z1 = \emptyset 1\left(y + \frac{1}{3}x\right) + x\,\emptyset 2\left(y + \frac{1}{3}x\right)$

since $a = 1, b = 3 \rightarrow f(1,3) = 9 - 18 + 9 = 0.$

$f(D, D') = 9D^2 - 6DD' + D'^2 = (3D - D')^2 ., \rightarrow r = 2., b = 3.$

since $Z2 = \frac{x^r}{r!} . \frac{g(ax + by)}{b^r}.$

$\rightarrow Z2 = \frac{x^2}{2!} . \frac{(x+3y)}{3^2} = \frac{(x^3+3x^2y)}{18}.$

$since\ Z = Z1 + Z2. \quad \rightarrow \quad Z = \emptyset 1\left(y + \frac{1}{3}x\right) + x\,\emptyset 2\left(y + \frac{1}{3}x\right) + \frac{(x^3+3x^2y)}{18}$

تمارين ((جد الحل العام للمعادلات الآتية)) :

1	$(D^2 - 2DD' + D'^2)Z = 2x - 3y$ ..
2	$(D^2 + 2DD' - 8D'^2)Z = x + y$ ..
3	$(D^2 - 4DD' + 4D'^2)Z = 5x + 3y$.
4	$(D^2 - 2DD' + D'^2)Z = x + y$..
5	$(D^3 + 2D^2D' - DD'^2 - 2D'^3)Z = x - 2y.$
6	$(D^3 - 4D^2D' + 5DD'^2 - 2D'^3)Z = x - y.$
7	$(D^3 - 6D^2D' + 12DD'^2 - 8D'^3)Z = 2x + y.$
8	$(D^3 - 3D^2D' + 3DD'^2 - D'^3)Z = x + y.$
9	$(D^3 - 3DD'^2 - 2D'^3)Z = 2x - y.$
10	$(D^2 - 6DD' + 9D'^2)Z = 3x + y$..