ب - المعادلات الخطية المتجانسة ذات المعاملات المتغيرة القابلة للتحويل الى معادلات ذات معاملات ثابتة :

المقصود بهذا النوع من المعادلات و هي المعادلات التي فيها تجانس بين قوى (D , x) و بين قوى (D′ , y) لكل حد من حدود المعادلة حيث يتم تحويلها إلى معادلات ذات معاملات ثابتة لحلها بالطرق السابقة و ذلك بإستخدام التحويلات : .

$$x = e^u \leftrightarrow u = Lnx.\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x}\right)\right)., \quad and \quad y = e^v \leftrightarrow v = Lny.\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{y}\right)\right)$$

$$D = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{1}{x} = Đ.\frac{1}{x} \rightarrow xD = Đ.$$

$$D^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) - \frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{x}.\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) - \frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

$$\rightarrow D^2 = \frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial z}{\partial u}\right) \rightarrow x^2D^2 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial z}{\partial u}\right).$$

$$\rightarrow x^2D^2 = (Đ^2 - Đ) = Đ(Đ - \mathbf{1}).$$

و بإستخدام الإستقراء الرياضي نحصل على :

$$\rightarrow x^nD^n = Đ(Đ - \mathbf{1})(Đ - \mathbf{2})(Đ - \mathbf{3}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots((Đ - (\boldsymbol{n} - \mathbf{1})).$$

و بنفس الطريقة يكون :

$$\rightarrow y^mD^m = Đ'(Đ' - \mathbf{1})(Đ' - \mathbf{2})(Đ' - \mathbf{3}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots((Đ' - (\boldsymbol{m} - \mathbf{1})).$$

بالتعويض في المعادلة الأصلية بهذه المشتقات تتحول المعادلة الى معادلة ذات معاملات ثابتة بالصيغة :

$$\boldsymbol{f}(Đ, Đ') = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

<u>مثال ١ :</u> حل المعادلة : $\left(\mathbf{x^2D^2} - \boldsymbol{y}^2\mathbf{D'}^2 - \boldsymbol{y}\mathbf{D'} + \boldsymbol{x}\mathbf{D}\right)\mathbf{Z} = \mathbf{x}\boldsymbol{y}$

$$x = e^u \leftrightarrow u = Lnx.., \quad and \quad y = e^v \leftrightarrow v = Lny.$$

$$D = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{1}{x} = Đ.\frac{1}{x} \rightarrow xD = Đ., \qquad \boldsymbol{yD'} = Đ'.,$$

$$\rightarrow x^2D^2 = (Đ^2 - Đ) = Đ(Đ - \mathbf{1}).,\qquad \boldsymbol{y^2D'^2} = Đ'(Đ' - \mathbf{1}).$$

بالتعويض بالمعادلة الأصلية نحصل على :

$$(Đ (Đ - 1) - Đ'(Đ' - 1) - Đ' + Đ)Z = e^{u}.e^{v} \ .$$

$$\rightarrow \left(Đ^2 - Đ - Đ'^2 + Đ' - Đ' + Đ \right)Z = e^{u+v}.$$

$$\rightarrow \left(Đ^2 - Đ'^2 \right)Z = e^{u+v}.$$

$m^2 - 1 = 0.$ (*subsdiral equation*). $\rightarrow (m-1)(m+1) = 0.$

$\rightarrow m1 = 1. \ , m2 = -1 \ .$

$\rightarrow \quad Z1 = \emptyset 1(v+u) + \emptyset 2(v-u)$

since $a = 1, b = 1. \ \rightarrow \ f(1,1) = 1 - 1 = 0.$

$\rightarrow \ f(D,D') = \left(Đ^2 - Đ'^2 \right) = (Đ - Đ')(Đ + Đ').$

$\rightarrow \ r = 1 \ , \ G\left(Đ, Đ' \right) = (Đ + Đ')., \rightarrow \ G(1,1) = 1 + 1 = 2 \neq 0.$

$$\rightarrow \quad Z2 = \frac{1}{2} . \frac{u^1}{1!} e^{u+v} \ . \ = \frac{u}{2} \ e^{u+v} \ .$$

since $Z = Z1 + Z2. \quad \rightarrow \quad Z = \emptyset 1(v+u) + \emptyset 2(v-u) + \dfrac{u}{2} \ e^{u+v} \ .$

$$\rightarrow \quad Z = \emptyset 1(Lny + Lnx) + \emptyset 2(Lny - Lnx) + \frac{Lnx}{2} \ e^{Ln(xy)} \ .$$

$$\rightarrow \quad Z = \emptyset 1(Ln(yx)) + \emptyset 2\left(Ln\left(\frac{y}{x}\right)\right) + \frac{Lnx}{2} \ (xy) \ .$$

<u>تمارين ((جد الحل العام للمعادلات الآتية)) :</u>

1	$\left(x^2D^2 - 2xyDD' - 3\,y^2D'^2 - 3yD' + xD\right)Z = 0..$
2	$\left(x^2D^2 - y^2D'^2 - yD' + xD\right)Z = \dfrac{x}{y}.$
3	$\left(x^2D^2 + y^2D'^2 + yD' + xD\right)Z = Ln(xy).$