٢ - المعادلات الخطية الغير متجانسة :

أ- المعادلات الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة :

هناك عدة انواع من هذه المعادلات منها :

١- المعادلات الخطية غير المتجانسة بسبب احتوائها على حد مطلق ذات الصيغة (aD + bD′ + C)Z = 0 :

لحل مثل هذا النوع من المعادلات نستخدم التحويل ($Z = e^u$) الذي به تتحول المعادلة الى معادلة متجانسة ثم نحلها بالطرق السابقة .

$Since\ Z = e^u \rightarrow DZ = e^u Du .,\quad D'Z = e^u D'u.$

$Since\ \ (aD + bD' + c)Z = 0. \rightarrow \ (aD + bD' + c)\, e^u = 0.$

$. \rightarrow \ (aD\, e^u + bD'\, e^u + c\ e^u) = 0. \quad \rightarrow \ (ae^u D\, u + b\, e^u D'\, u + c\ e^u) = 0$

$\rightarrow \ (aD\, u + b\, D'\, u + c\ )\, e^u = 0 . \rightarrow \ aDu + b\, D'u + c = 0.$

$\rightarrow \ aDu + b\, D'u = -c\, . \ \rightarrow \ (aD + \ b\, D')\, u \ = \ -c \ \ldots\ldots\ldots (*)..$

المعادلة $(*)$ معادلة متجانسة ذات معاملات ثابتة و حلها كالآتي :

$$\boldsymbol{a}m + b = 0. (\,subsdiral\ \ equation\ ). \ \rightarrow \ \mathrm{m} \ = \ -\frac{b}{a}.$$

$$\rightarrow \mathrm{u1} \ = \emptyset \left(y - \frac{b}{a}.\mathrm{x} \right) \ . \ \rightarrow \mathrm{u1} \ = \emptyset \,(a\, y \, - b.\mathrm{x})\, .$$

$$u2 = \frac{1}{f(\,D\,,D')}\ .\mathrm{f(x,y)}\, . = \frac{1}{aD + bD'}\ .(-\mathrm{c}\,).\ = \frac{1}{aD\,\left(1 + \frac{bD'}{aD}\right)}\ .(-\mathrm{c}\,).$$

$$u2 = \frac{1}{aD}\left\{1 - \ \frac{bD'}{aD} + \left(\frac{bD'}{aD}\right)^2 - \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\right\}.(-\mathrm{c}\,). = \frac{-c}{aD} \ = \frac{-cx}{a}$$

$$\rightarrow \ \mathrm{u = u1 + u2}\, . \ \rightarrow \ \mathrm{u} = \ \emptyset\,(a\, y \ - b.\mathrm{x}) + \left(\frac{-cx}{a}\right).$$

$$\boldsymbol{Since\ \ Z} = \ \mathbf{e^{u}} \ \rightarrow \ \boldsymbol{Z} = \ \mathbf{e^{u1+u2}} \ = \mathbf{e^{u1}}\,.\mathbf{e^{u2}} \ = \ \mathbf{e}^{\emptyset\,(a\,y\,-b.\mathrm{x})}\,.\mathbf{e}^{\frac{-cx}{a}}$$

$$\rightarrow \ \ \boldsymbol{Z} = \ \mathbf{e}^{\frac{-\mathbf{cx}}{\mathbf{a}}}\ \varphi\,(\mathrm{a\,y} \, - \mathrm{bx}) \ \ .$$

ملاحظة : ممكن استخدام طريقة حل معادلات لاكرانج لحل المعادلة (*) للتأكد من صحة الحل و كالآتي :.

$$Since\ \ (aD+bD'+c)Z=0.\ \rightarrow\ aDZ+bD'Z=-cZ.\ \rightarrow\ \frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{-cz}.$$

$$\rightarrow\ \frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}.\ \rightarrow\ ady=bdx.\ \rightarrow\ ay-bx=c1.\ \rightarrow\ u=ay-bx.$$

$$\frac{dx}{a}=\frac{dz}{-cz}.\ \rightarrow\ \frac{dz}{z}=\frac{-cdx}{a}.\ \rightarrow \mathrm{Ln}z=\frac{-cx}{a}+c2.\ \rightarrow\ z=k\,e^{-cx}.\ \rightarrow\ z\,e^{cx}=v.$$

$$Since\ \ v=\emptyset(v)\ .\ \rightarrow\ z\,e^{cx}=\emptyset(a\,y-b.x).\ \rightarrow\ Z=\ \mathbf{e}^{\frac{-cx}{a}}\varphi\,(a\,y-bx).$$

مثال : حل المعادلة : $.(2D-D'+3)Z=0.$

$$Since\ \ a=2.,b=-1,c=3.\ .\ \text{and}\ \ Z=\ \mathbf{e}^{\frac{-cx}{a}}\varphi\,(a\,y-b.x).$$

$$\rightarrow\ \ Z=\ \mathbf{e}^{\frac{-3x}{2}}\varphi\,(2\,y+x).$$

تمارين ((جد الحل العام للمعادلات الآتية)) :

1	$(D-3D'+5)Z=0.$	3	$(D-D'+1)Z=0.$
2	$(3D+4D'-3)Z=0.$	4	$(2D-D'+4)Z=0.$

٢ – المعادلات الخطية غير المتجانسة التى تأخذ الصيغة :

$(aD+bD'+c)^kZ=0.$, Such that k is positive integer .

يتم ايجاد صيغة الحل بإستخدام الإستقراء الرياضي فإذا كان (k=1) حلها بالطريقة السابقة .، أما إذا كان (k=2).

سنفرض الحل بالشكل : ($Z=\ v\,\mathbf{e}^{\frac{-cx}{a}}$) ثم نشتقه و نعوضه بالمعادلة لتحويلها الى معادلة ذات معاملات ثابتة و كالآتي :

$$\rightarrow\ DZ=-\frac{c}{a}\,v\,\mathbf{e}^{\frac{-cx}{a}}+\ \mathbf{e}^{\frac{-cx}{a}}\,Dv.,\ \ D'Z=\ \mathbf{e}^{\frac{-cx}{a}}\,D'v.$$

$$(aD+bD'+c)^2v\,\mathbf{e}^{\frac{-cx}{a}}=0.\ \rightarrow\ \left(aD\left(v\,\mathbf{e}^{\frac{-cx}{a}}\right)+bD'\left(v\,\mathbf{e}^{\frac{-cx}{a}}\right)+c\left(v\,\mathbf{e}^{\frac{-cx}{a}}\right)\right)^2=0.$$

$$\rightarrow\ \left(a\left(-\frac{c}{a}\,v\,\mathbf{e}^{\frac{-cx}{a}}+\ \mathbf{e}^{\frac{-cx}{a}}\,Dv\right)+b\left(\mathbf{e}^{\frac{-cx}{a}}\,D'v\right)+cv\,\mathbf{e}^{\frac{-cx}{a}}\right)^2=0.$$

$$\rightarrow\ \left(-cv\,\mathbf{e}^{\frac{-cx}{a}}+a\mathbf{e}^{\frac{-cx}{a}}\,Dv+b\mathbf{e}^{\frac{-cx}{a}}\,D'v+\ cv\,\mathbf{e}^{\frac{-cx}{a}}\right)^2=0.$$

$$\rightarrow\ \mathbf{e}^{\frac{-cx}{a}}(a\ Dv+b\ D'v)^2=0.\ \rightarrow\ (a\ Dv+b\ D'v)^2=0.$$

$(am+b)^2 = 0.$ $(subsdiral\ equation). \rightarrow m1 = m2 = -\frac{b}{a}$.

$$\rightarrow v = \emptyset 1\left(y - \frac{b}{a}x\right) + x\,\emptyset 2\left(y - \frac{b}{a}x\right). \rightarrow v = \emptyset 1(ay - bx) + x\,\emptyset 2(ay - bx).$$

$$Since\ Z = v\,e^{\frac{-cx}{a}}. \rightarrow Z = e^{\frac{-cx}{a}}\left[\,\emptyset 1(ay - bx) + x\,\emptyset 2(ay - bx)\,\right].$$

بنفس الطريقة يمكن أن نثبت بأنه إذا كان (k =3).فإن :

$$Z = e^{\frac{-cx}{a}}\left[\,\emptyset 1(ay - bx) + x\,\emptyset 2(ay - bx) + x^2\,\emptyset 3(ay - bx)\,\right].$$

و بصورة عامة إذا كانت القوة تساوي k فإن :

$$Z = e^{\frac{-cx}{a}}\left[\,\emptyset 1(ay - bx) + x\,\emptyset 2(ay - bx) + \cdots \ldots \ldots + x^{k-1}\,\emptyset k(ay - bx)\,\right].$$

مثال : حل المعادلة : $(D - 2D' + 1)^4 Z = 0.$

$Since\ a = 1.,\quad b = -2.,\quad c = 1.,\quad k = 4.$

$$Since\ Z = e^{\frac{-cx}{a}}\left[\emptyset 1(ay - bx) + x\,\emptyset 2(ay - bx) + \cdots \ldots + x^{k-1}\,\emptyset k(ay - bx)\right].$$

$$\rightarrow Z = e^{-x}\left[\emptyset 1(y + 2x) + x\,\emptyset 2(y + 2x) + x^2\,\emptyset 3(y + 2x) + x^3\,\emptyset 4(y + 2x)\right].$$

تمارين ((جد الحل العام للمعادلات الآتية)) :

1	$(D - 3D' - 1)^3 Z = 0.$	3	$(2D + D' + 3)^2 Z = 0.$
2	$(3D - 2D' + 1)^4 Z = 0.$	4	$(D - D' + 2)^5 Z = 0.$ . .