إسم المادة : معادلات تفاضلية جزئية ٢

الفصل : الثاني

رقم المحاضرة : ١٠ من أصل ١٥ محاضرة

---

٣ - المعادلات الخطية الغير متجانسة المؤلفة من عدة عوامل خطية: الحل لمثل هذه المعادلات عبارة عن تركيب خطي لحلول تلك العوامل مثلاً المعادلة : $(2D - D' + 1)^2 (D + 3D' + 4) Z = 0.$

$$\rightarrow Z = e^{\frac{-x}{2}} [\emptyset 1(2y + x) + x\, \emptyset 2(2y + x)] + e^{-4x}\, \emptyset 3\, (y - 3x) \quad .$$

---

٤ - المعادلات الخطية الغير متجانسة بسبب وجود مشتقات عليا:

يختلف هذا النوع من المعادلات لعدم تجانس المشتقات ضمن حدود المعادلة و يتم حلها بفرض إن :

$Z = A\, e^{ax+by}$. , *such that A is constant.*

يكمل الحل بالتعويض عن a بدلالة b أو بالعكس بإستخدام العلاقة (f(a,b) ٠= 0) .

مثال ١ : حل المعادلة :

$$. (D + 3D'^2 - 4) Z = 0.$$

$Let\ Z = A\, e^{ax+by}$. $\rightarrow f(a,b) = a + 3b^2 - 4 = 0.$ $\rightarrow a = 4 - 3b^2.$

$\rightarrow \mathbf{Z = A\, e^{(4 - 3b^2)x + by}}$

مثال ٢ : حل المعادلة :

$$. (D^3 - D') Z = 0.$$

$Let\ Z = A\, e^{ax+by}$. $\rightarrow f(a,b) = a^3 - b = 0.$ $\rightarrow b = a^3.$

$\rightarrow \mathbf{Z = A\, e^{ax + a^3 y}}$

تمارين ((جد الحل العام للمعادلات الآتية)) :

1	$(D^2 + DD' + D' - 1)\ Z = 0.$	3	$(D^2 + 2DD' + 2D' + 3)\ Z = 0.\ '$
2	$(D^2 + DD' - D')\ Z = xy.$	4	$(2D^2 + 3D')(2D + D' + 2)\ Z = 0.$

ب المعادلات الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات المتغيرة :

الصيغة العامة لهذا النوع من المعادلات تكون بالشكل :

$$\mathbf{R(x,y)}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\mathbf{S(x,y)}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\mathbf{T(x,y)}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\mathbf{P(x,y)}\frac{\partial z}{\partial x}+\mathbf{Q(x,y)}\frac{\partial z}{\partial y}+\mathbf{z(x,y)}=\mathbf{f(x,y)}\ \ldots\ldots.(*).$$

للإختصار ممكن نعبر عن المعادلة $(*)$ بالشكل :

$$Rr+Ss+Tt+Pp+Qq+Z=f(x,y)\ \ldots\ldots\ldots\ldots.(**).$$

حيث إن : .... $r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$.

إن هذا النوع من المعادلات تحل كل معادلة حسب حالتها التي تأخذ ثالث حالات و هي :

١- **الحالة الأولى:** المعادلات التي تتضمن حداً واحداً فقط من طرفها الأيسر فيه مشتقة ثانية حيث تحل بالتكامل المباشر

مثال ١ : حل المعادلة : $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=3x-y.$

$$\rightarrow\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=3-\frac{y}{x}\ .,\ \rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial x}=3x-yLnx+\ \emptyset\mathbf{1}(\boldsymbol{y}).$$

$$\rightarrow\ Z=\frac{3x^2}{2}-y\,(\,xLnx-x\,)+\ x\,\emptyset1(y)+\ \emptyset1(y)\quad .$$

مثال ٢ : حل المعادلة : $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x^2+y^2\ .$

نكامل بالنسبة إلى x : $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3}{3}+xy^2+\theta(y).$

نكامل بالنسبة إلى y : $\mathbf{Z}=\frac{yx^3}{3}+\frac{xy^3}{3}+\int\theta(y)\ dy\ +\ \emptyset(x)\,.$

$$\mathbf{Z}=\frac{yx^3}{3}+\frac{xy^3}{3}+\varphi(y)+\ \emptyset(x)\,.$$

تمارين ((جد الحل العام للمعادلات الآتية)) :

1	$xy-5xZ_{xx}=4\,.$	4	$y^2+2-yxZ_{yx}=x^2\,.$
2	$y^2t+2x=x^2y^2+1\,.$	5	$t=-x^2sin(xy)\,.$
3	$xy^2s=-4x^2y+1\,.$	6	$Z_{yx}=6x+12y^2\,.$