إسم المادة : معادلات تفاضلية جزئية ٢

الفصل : الثاني

رقم المحاضرة : ١١ من أصل ١٥ محاضرة

---

٢ الحالة الثانية : اذا تضمنت المعادلة حدين فيها مشتقات لمتغير واحد نقوم بتخفيض رتبة المعادلة ثم نحلها إعتيادياً حيث ستتحول المعادلة إلى معادلة تتضمن مشتقة أولى تحل مباشرة بالتكامل .

مثال ١ : حل المعادلة :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy - 1 \quad .$$

$$\text{Let} - \frac{\partial z}{\partial x} = p . \rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x} .$$

بالتعويض بالمعادلة سنحصل على معادلة خطية يتم حلها بإيجاد عامل التكامل ثم اكمال الحل :

$$\frac{\partial p}{\partial x} - p = 2xy - 1 . \rightarrow \text{I.F.} = e^{\int -dX.} = e^{-x} .$$

$$p . e^{-x} = \int (2xy - 1) . e^{-x}\, dx + \emptyset 1(y) .$$

$$\rightarrow p . e^{-x} = 2y \int x e^{-x}\, dx - \int e^{-x}\, dx + \emptyset 1(y) .$$

$$\rightarrow p . e^{-x} = 2y(-x\, e^{-x} - e^{-x}) + e^{-x} + \emptyset 1(y)$$

بضرب طرفي المعادلة ب (e^x)..نحصل على : ....

$$\rightarrow p = -2yx - 2y + 1 + \emptyset 1(y) e^x .$$

$$\rightarrow Z = -yx^2 - 2yx + x + \emptyset 1(y) e^x + \emptyset 2(y) .$$

تمارين ((جد الحل العام للمعادلات الآتية)) :

1	$y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 3 .$	4	$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} + 2 .$
2	$t - qx = -\sin y .$	5	$yt - q = 2x^2 y .$
3	$r + yp = x^2 .$	6	$xr + 2p = x^2 - 3 .$

---

٣ الحالة الثالثة :

إذا تضمنت المعادلة أكثر من حدين فيه إشتقاق و أمكن تخفيض رتبتها بحيث تصبح بأحد المتغيرين p أو q ثم تحل بطرق حل معادلات المرتبة الأولى حيث يكتب الحل بالصيغة ($\emptyset(c1, c2) = 0$.) كصيغة حل معادلة لاكرانج بحيث تكون $c1, c2$ بدلالة x,y أما إذا كانت بدلالة p أو q نستفاد من الخاصية (($c1=f(c2)$, $c2=g(c1)$)) لكتابتها بدلالة $x\ y$.

مثال ١: حل المعادلة :

$$x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} = 0 .$$

Since $\frac{\partial z}{\partial x} = p \rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x} \ , \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}$.

$$\rightarrow \ x \frac{\partial p}{\partial x} - y \frac{\partial p}{\partial y} - p = 0. \quad \rightarrow \ x \frac{\partial p}{\partial x} - y \frac{\partial p}{\partial y} = p . \ ((\, Lagrang\ equation\,)).$$

$$\rightarrow \ \frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dp}{p} . \quad \rightarrow \ \frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} . \ \rightarrow \ \mathrm{Ln}x = -Lny + Lnc1.$$

$$\rightarrow \ \mathrm{Ln}x + Lny = Lnc1. \quad \rightarrow \ \mathrm{Ln}(\, xy\,) = Lnc1. \quad \rightarrow \ xy = c1.$$

$$, \ \frac{dx}{x} = \frac{dp}{p} . \ \rightarrow \ \mathrm{Ln}x = Lnp + Lnc2. \ \rightarrow \ \mathrm{Ln}x - Lnp = Lnc21.$$

$$\rightarrow \ \mathrm{Ln}\left(\frac{x}{p}\right) = Lnc2. \quad \rightarrow \ \frac{x}{p} = c2.$$

$$\rightarrow \ \emptyset\ (\, c1, c2\,) = 0. \quad \rightarrow \ \emptyset \left(xy , \frac{x}{p} \right) = 0$$

$$\rightarrow \ c2 = g(c1) . \ \rightarrow \ \frac{x}{p} = g(xy) . \ \rightarrow p = \frac{x}{g(xy)} .$$

$$\rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{g(xy)} . \quad \rightarrow \mathbf{Z} = \int \frac{x}{g(xy)} dx + \emptyset\,(y) .$$

تمارين ((جد الحل العام للمعادلات الآتية)) :

1	$2x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial z}{\partial x} = 4x\, \boldsymbol{y^2}$.		
2	$\boldsymbol{2yt + xs - q = 0}$.	5	$\boldsymbol{xyr + x^2 s - yp = 0}$..
3	$\boldsymbol{xr - ys - p = xy}$.	6	$\boldsymbol{xr + ys - 2p} = \frac{x}{y}$.
